

IDENTIFICACIÓN DE DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO A PARTIR DE LOS RESULTADOS DE EXÁMENES COLEGIADOS

José Alvaro Encinas Bringas, Luís Ángel Contreras Niño, Ruth Elba Rivera Castellón, Maximiliano De Las Fuentes Lara, Enrique René Bastidas Puga
Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo. Facultad de Ingeniería, Mexicali Universidad Autónoma de Baja California
aencinasb@uabc.mx, aencinasb1834@gmail.com
Campo de investigación: Medición

México

Nivel: Superior

Resumen. Este trabajo es continuación de un proyecto iniciado en el año 2004 para la aplicación a gran escala de exámenes elaborados de manera colegiada. Se describen dos procedimientos cuantitativos para estudiar el comportamiento estadístico de los ítems de un examen de cálculo diferencial. El primero, se basa exclusivamente en las respuestas dadas por los estudiantes. El segundo relaciona las respuestas de los examinados con características curriculares de los reactivos correspondientes. Se identifican ítems o grupos de ítems que presentan dificultades a los estudiantes, tanto en la comprensión de conceptos como en el dominio de procedimientos; se identifican dificultades para grupos de reactivos relacionados con representaciones gráfica, numérica o analítica. A partir del análisis de dichas dificultades se proponen mejoras en la enseñanza de los temas correspondientes.

Palabras clave: dificultades en la enseñanza, aprendizaje del cálculo, exámenes colegiados

Introducción

El presente estudio es continuación de un proyecto evaluativo realizado entre 2004 y 2005 (Contreras *et al*, 2005; Encinas *et al*, 2006), mediante el cual se desarrolló de manera colegiada un examen criterial de opción múltiple alineado con el currículum de la materia de Cálculo Diferencial. Desde el semestre 2005-2 al 2007-1, el instrumento se ha aplicado a 500 estudiantes por semestre en promedio, inscritos en nueve carreras que se imparten en la Facultad de Ingeniería-Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California.

Para construir el examen se adaptó el modelo propuesto por Nitko (1994) para desarrollar exámenes nacionales orientados por el currículum. Dicho modelo se complementó con la metodología para la construcción de test criterios de Popham (1990) y con aportaciones metodológicas y operativas de Contreras (1998, 2000). El examen desarrollado tiene las siguientes características: a) es criterial, pues su propósito es informar qué puede hacer o

477

no el examinado respecto al currículo de la materia; b) está alineado con el currículo, identifica lo esencial de éste y se orienta a evaluar su dominio; c) es de opción múltiple, pues solicita al estudiante elegir la respuesta correcta o mejor opción de entre las que se ofrecen; d) es de gran escala, ya que se aplica regularmente a cientos de alumno que cursan la materia.

Una vez elaborados los reactivos se estructuraron en modelos de examen y fueron aplicados a una pequeña muestra de alumnos a fin de calibrarlos psicométricamente. Así, tras su ensayo empírico, se efectuó un análisis de reactivos para detectar los que tenían dificultad inadecuada, discriminación inapropiada y opciones no seleccionadas, entre otros errores. Posteriormente, a partir de los resultados de dicho análisis, se procedió a revisar y corregir los reactivos que presentaron fallas y a estructurar de nueva cuenta la versión definitiva de los modelos de examen que se aplicaron a gran escala. Finalmente, se obtuvieron tres modelos de examen: A, B y C, cada uno con 75 reactivos de opción múltiple. Las tres versiones de examen son paralelas. Así, en cada modelo cada uno de los ítems evalúa el dominio del mismo contenido temático del curso de cálculo, lo que permite hacer comparaciones de los resultados en los tres modelos.

Las respuestas de los estudiantes ante esos exámenes son revisadas y discutidas, mediante los procedimientos descritos a continuación.

Método

Una vez elaborados, los exámenes fueron administrados a los examinados en cuadernillos de papel con una hoja de respuestas desprendible. Después, se utilizó el software Microsoft Excel 2003 para la captura y organización de los datos, y a continuación se procedió a su análisis.

El primer procedimiento de acuerdo a Contreras et al (2004), consistió en efectuar un análisis de reactivos; para ello, se procedió a: a) calcular el *índice de dificultad* o valor p del

reactivo, mismo que se obtuvo dividiendo el número de examinados que contestaron correctamente el ítem entre el total que lo respondieron. ¿Un reactivo con $p = .9$ es fácil? ¿Uno con $p = .2$ es difícil? En general, la interpretación de la dificultad es contextual; es decir, la facilidad o dificultad del ítem está relacionada con el estudiante, el profesor y el contenido y el método de instrucción. b) Calcular el *índice de discriminación* o valor D del reactivo. Esto se logró mediante la fórmula $D = pa - pb$, donde pa representa el 27% de estudiantes con las calificaciones más altas en el examen y pb el 27% de los examinados con más bajo aprovechamiento. El valor discriminativo del ítem se considera apropiado para $D \geq 0.2$. La utilidad de este índice radica en que señala los reactivos con defectos ya sea en la pregunta, en la respuesta correcta o en los distractores.

Un segundo procedimiento consistió en codificar los reactivos que conforman los exámenes, según diversos criterios relacionados con el contenido a evaluar:

a) Unidad temática del curso. Para nuestro caso: I) funciones, II) límites y continuidad, III) derivación y IV) aplicaciones.

b) Subtemas. Cada uno de estos temas fue subdividido en sus componentes, mismos que fueron representados gráficamente en una retícula o mapa curricular que puede ser consultado la página web de la Facultad de Ingeniería-Mexicali:

<http://ingenieria.mxl.uabc.mx/TC/examenColegiado/matematicasl.html>

c) Concepto/procedimiento. Según la naturaleza del contenido, cada uno de los reactivos se clasificó como evaluando el dominio de un concepto o de un procedimiento del curso de cálculo. (Castañeda, 1996)

d) Representación: Gráfica, Analítica o Numérica. De acuerdo con la teoría de representaciones, (Duval, 2000 y Hitt, 1998), los ítems fueron clasificados como gráfico, analítico o numérico, así como las conversiones entre ellos.

e) Eje: Antecedente/Consecuente. Con base en el mapa curricular de la materia, los reactivos fueron ubicados en líneas de formación configuradas como una cadena de antecedentes de un tema y de sus consecuentes.

Por último las dificultades identificadas por este procedimiento fueron analizadas de acuerdo a la problemática que las origina.

Resultados y discusión

Las tres versiones del examen se han aplicado desde el semestre 2005-2 a 669 alumnos; en 2006-1 a 475; en 2006-2 a 599 estudiantes. Con el solo propósito de ilustrar la aplicación de los procedimientos antes mencionados, enseguida se presentan algunos resultados obtenidos tras la aplicación a 447 alumnos efectuada durante el semestre 2007-1.

SUBTEMA	Ítem	Dif(p)	Disc(D)	C	P	G	A	N
4.2.2 Teorema del valor medio.	68	0.13	0.06*	0	1	0	1	0
2.6.3 Razón de cambio instantáneo.	46	0.14	0.07*	1	0	0	1	0
1.3.11 La inversa de una función.	23	0.15	0.11*	1	0	1	0	0
3.1.4 La derivada numérica de una función	51	0.2	0.19*	0	1	0	0	1
2.6.3 Razón de cambio instantáneo.	45	0.21	0.21	0	1	0	1	0
3.1.3 La derivada gráfica de una función.	49	0.22	0.28	0	1	1	0	0
1.3.2 Graficación por parámetros.	15	0.24	0.45	1	0	1	0	0
2.2.1 Límite por la derecha.	34	0.25	0.31	0	1	0	1	0
4.6.3 Aproximaciones lineales.	75	0.25	0.35	0	1	0	1	0
2.1.2 Límites numéricos.	31	0.27	0.3	1	0	0	0	1
4.3.4 Criterio de la segunda derivada.	72	0.27	0.32	1	0	0	1	0
1.4.5 La función logaritmo.	27	0.28	0.41	1	0	1	0	0
2.6.1 Razón de cambio promedio.	44	0.28	0.42	0	1	1	0	0
1.4.4 La función exponencial.	26	0.29	0.21	1	0	1	0	0
2.6.1 Razón de cambio promedio.	43	0.29	0.34	1	0	0	1	0
4.3.2 Concavidad.	70	0.3	0.33	1	0	1	0	0
2.3.3 Asíntotas verticales.	39	0.34	0.42	0	1	0	1	0
3.1.5 La derivada analítica de una función.	53	0.34	0.37	0	1	0	1	0
3.4.2 Derivación de funciones implícitas.	63	0.34	0.55	0	1	0	1	0
1.3.11 La inversa de una función.	22	0.35	0.19*	0	1	0	1	0

Tabla 1. Subtemas codificados e Indicadores de ítems del examen.

La tabla 1 ilustra una parte de los datos recabados en la aplicación del semestre 2007-1. En la primer columna se tiene el nombre y código del subtema. El número del ítem, es un valor entre uno y el 75, y corresponde a su ubicación en la prueba. Cuando el nombre de un subtema está repetido, significa que se elaboraron dos reactivos diferentes para evaluar su dominio. La columna Dif. (p), registra el índice de dificultad del reactivo. La columna Disc. (D) localizada enseguida, presenta el índice de discriminación del ítem. El asterisco señala los ítems que presentaron discriminación baja, menor al estándar de calidad establecido. Las columnas posteriores significan: C, concepto; P, procedimiento; G, reactivo en contexto grafico; A, ítem en contexto analítico y N, ítem en numérico. Los valores uno o cero indican su pertenencia a uno u otro tipo.

Se observa que temas tales como razones de cambio, cálculo de límites y de derivadas, estos últimos particularmente en los contextos gráfico y numérico, encabezan la lista de contenidos que se le presentan al estudiante como difíciles. Ya sea por la complejidad propia del tema o por los métodos de enseñanza utilizados por los profesores.

En cuanto a los índices de dificultad por temas, en la tabla 2 se aprecia que la segunda unidad es la más difícil para los estudiantes. Esto puede ser por la inclusión en el examen de reactivos de cálculo de límites en forma numérica y gráfica, además de la tradicional forma analítica.

Tema	Dificultad
I) Funciones	0.50
II) Límites y cont.	0.39
III) Derivación	0.43
IV) Aplicaciones	0.44

Tabla 2. Dificultad promedio de los temas.

Tipo Representación	Dificultad
Concepto	0.44
Procedimiento	0.45
Gráfico	0.39
Analítico	0.45
Numérico	0.35

Tabla 3 Dificultad promedio según codificación.

La tabla 3 concentra los índices de dificultad en todas las cuatro unidades del examen, pero al través de considerar los atributos de los reactivos tales como si pregunta sobre un concepto o un procedimiento; o bien, si el reactivo es de tipo gráfico, numérico o analítico. Los índices más bajos corresponden a las representaciones numérica y gráfica, lo cual apoya el comentario del párrafo anterior.

A continuación se muestran y comentan los resultados específicos de dos reactivos del examen. El primero, el ítem 23, fue seleccionado por tener discriminación menor a 0.20 y por tanto se le considera como defectuoso. El segundo, el reactivo 15 se seleccionó por ser un ítem estadísticamente correcto e ilustrativo de la problemática de enseñanza.

Ítem 23.- La gráfica de la inversa de una función $f(x)$ es simétrica respecto a:

a) el eje x b) $y = x$ c) el eje y d) $y = -x$

Inciso	# de alumnos	Porcentaje
a)	154	34
b)	66	15
c)	164	37
d)	47	10
No contestó	16	4
Total	447	100

Tabla 4. Distribución de respuestas del ítem 23.

# Alumnos altos que acertaron	25
Dificultad altos	0.21
# Alumnos bajos que acertaron	12
Dificultad bajos	0.10
Discriminación (altos-bajos)	0.11
Índice de dificultad	0.15

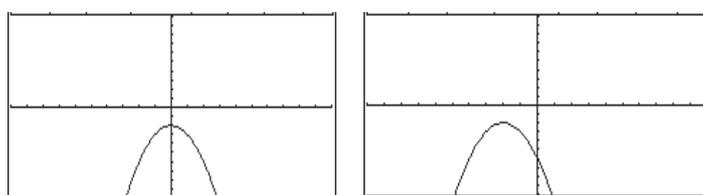
Tabla 5. Discriminación del ítem 23.

Para este reactivo, con respuesta correcta en el inciso b) y con baja discriminación, se observa en la tabla 4 una marcada tendencia a responder como opción correcta los incisos que involucran los ejes coordenados. Se considera que un reactivo es correcto desde el punto de vista técnico si es contestado correctamente por los alumnos del grupo de más alto rendimiento y mal contestado por los de abajo. La tabla 5 indica que esto no se cumplió cabalmente. En consecuencia, se propone modificar el enunciado de las opciones

b) y c) quedando por ejemplo, b) la recta $y = x$, d) la recta $y = -x$. Esto por la falta de claridad en su enunciado actual. En una aplicación futura del examen se volverán a analizar las respuestas al reactivo y de ser necesario se revisará nuevamente.

Ítem 15. Si $f(x)$ es representada por la gráfica de abajo-izquierda, entonces la de abajo-derecha corresponde a:

- a) $f(x - 2)$ b) $f(x) + 2$ c) $f(x + 2)$ d) $f(x) - 2$



Para este reactivo con respuesta correcta en el inciso c) se presentan a continuación las tablas 6 y 7 que concentran los datos de las respuestas de los alumnos y la discriminación del ítem.

Inciso	# de alumnos	Porcentaje
a)	115	26
b)	29	6
c)	106	24
d)	180	40
No contestó	17	4
Total	447	100

Tabla 6. Distribución de respuestas del ítem 15.

# Alumnos altos que acertaron	62
Dificultad altos	0.51
# Alumnos bajos que acertaron	7
Dificultad bajos	0.06
Discriminación (altos-bajos)	0.45
Índice de dificultad	0.24

Tabla 7. Discriminación del ítem 15

Este ítem evalúa el contenido de graficación de funciones por parámetros, el cual no es complejo desde el punto de vista conceptual o procedimental. El alto número de estudiantes que seleccionaron el distractor correspondiente al primer inciso, sugiere la existencia de un obstáculo cognitivo generado en el estudio de la aritmética y el álgebra, donde se enseña que “quitar dos unidades significa que algo se desplaza a la izquierda en

esas mismas dos unidades”. El desempeño sugiere que los profesores no están utilizando tecnología para su enseñanza, tal como la calculadora graficadora o algún software para computadora.

En nuestra institución, el estudio de los resultados de la aplicación a gran escala de exámenes de opción múltiple, alineados con el currículo construidos de manera colegiada, ha mostrado utilidad para identificar áreas temáticas en las que el aprovechamiento de los estudiantes puede catalogarse como bajo. En la tabla 8, se enlistan los contenidos problemáticos que se han manifestado de manera repetitiva a lo largo de los cuatro semestres de aplicación de dichos exámenes, y que se han identificado debido a nuestras condiciones escolares, profesores, estudiantes, contenidos y métodos de enseñanza.

1. Graficación de funciones por parámetros.	6. Derivada gráfica de una función.
2. Razón de cambio promedio	7. Derivada numérica de una función.
3. Razón de cambio instantáneo	8. Teorema del valor medio.
4. Límites numéricos	9. Criterio de la segunda derivada
5. Límites laterales: gráficos y numéricos	10. Aproximaciones lineales.

Tabla 8. Principales contenidos en los que se han observado dificultades.

Como puede observarse en la tabla 8, la problemática se ubica esencialmente en los contextos numérico y gráfico, no así en el algebraico donde tradicionalmente se da mayor énfasis en la enseñanza del cálculo. Con el fin de atender esta problemática, se está promoviendo una serie de acciones tendientes a disminuir su intensidad. Por ejemplo, el uso de la calculadora graficadora en la práctica cotidiana del profesor de matemáticas. Al respecto, cabe señalar que se implementó un taller con 35 calculadoras y proyector. Además, varios profesores de matemáticas están empleando como apoyo al aprendizaje de los estudiantes software de graficación. El uso de los procedimientos descritos, permitió detectar que varios profesores no alcanzan a revisar el último tema del programa: aproximaciones lineales.

Finalmente, cabe señalar que los temas conceptualmente complejos como el criterio de la segunda derivada o la noción de límite, merecen un tratamiento aparte. Por ejemplo, el rediseño de contenidos a enseñar en el cálculo, mediante el enfoque socioepistemológico, Cantoral y Farfán (2000, 2004).

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal* (pp.69-91). México: Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo Infinitesimal*. México: Thomson.

Castañeda, M. (1996). *Análisis del aprendizaje de conceptos y procedimientos*. México: Trillas.

Contreras, L. A., Encinas, J. A. y De Las Fuentes, L. M. (2005). Evaluación Colegiada del Aprendizaje en la Universidad Autónoma de Baja California: el caso del examen de Matemáticas I de la Facultad de Ingeniería Mexicali. *Memoria del VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. México. COMIE.

Contreras, L. A., Backhoff, E. y Larrazolo, R. (2004). *Curso-taller para la elaboración de exámenes criterios (módulo 3)*. Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo, Universidad Autónoma de Baja California. México.

Contreras, L. A. (1998). Metodología para desarrollar y validar un examen de español, de referencia criterial y referencia normativa orientado por el currículum, para la educación primaria en México. *Memorias del III Foro Nacional de Evaluación Educativa*. Veracruz. Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior.

Contreras, L. A. (2000). *Desarrollo y pilotaje de un examen de español para la educación primaria en Baja California*. Tesis de maestría sin publicar, obtenida en agosto 16, 2005 del sitio web de la U A B C: <http://eduweb.ens.uabc.mx/egresados/index.html>

Contreras, L. A., Encinas, J. A., De las Fuentes, M. y Rivera, R. E. (2005). Evaluación Colegiada del aprendizaje en la Universidad Autónoma de Baja California. Ponencia en *VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Hermosillo, Sonora. México. COMIE.

Duval, R. (2000). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático*. Obtenido en marzo 12, 2007, de:

<http://www.matedu.cinvestav.mc/e-librosydoc/pme-procee.pdf>

Encinas, J. A., Rivera, R. E. y De Las Fuentes, L. M. (2006). Construcción colegiada y Aplicación de un examen criterial alineado con el currículo para evaluar a gran escala un curso de cálculo diferencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 20, pp. 211-216) México: CLAME.

Hitt F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista educación Matemática*, 10 (1), 23-45.

Nitko, A. J. (1994). *A Model for Developing Curriculum-Driven Criterion-Referenced and Norm-Referenced National Examinations for Certification and Selection of Students*. Ponencia presentada en la Conferencia Internacional sobre Evaluación y Medición Educativas, de la Asociación para el Estudio de la Evaluación Educativa (ASSESA).

Popham, J. (1990). *Modern educational Measurement: a practitioner's perspective*. Englewood Cliffs, N.J., USA: Prentice-Hall.