TRANSFORMACIONES BÁSICAS DE LAS FUNCIONES

Tulio Rafael Amaya De armas
Universidad de Sucre. I.E.Madre Amalia. Sincelejo, Sucre Colombia
tuama1@hotmail.com
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Medio

Resumen. *En el desarrollo de esta actividad se discute cómo se transforma una función, de la cual se conoce su representación gráfica y no su representación algebraica. La actividad consiste en un estudio de la gráfica de una función prototipo totalmente descontextualizada. Se propone la composición de funciones, operaciones entre gráficas y su relación con algunas formas analíticas asociadas al variar algunos de sus parámetros, para mirar el comportamiento global tanto de la función compuesta, como de la familia de funciones resultantes; que permita relacionar la representación gráfica de una función compuesta con las funciones que la componen y explorar patrones en las familias de éstas y así poder predecir el comportamiento de una función cualquiera bajo este tipo de transformaciones.*

Palabras clave: transformaciones básicas, gráficas de funciones, contexto gráfico, función prototipo

Un acercamiento inicial a la problematica

Este tipo de problemas, por lo poco común, se convierten en una verdadera provocación al intelecto humano, ya que reviste gran interés para cualquier docente que ose abordarlo, entre otras cosas porque "no es común abordar cualquier concepto, sobre todo de cálculo sin hacer uso de su representación algebraica" (Amaya, 2003, p. 62); representación que con mayor frecuencia es usada como punto de partida para la enseñanza de esta rama de la matemática, y útil en el estudio de temas como el de función. En relación con este último concepto, Dolores (2004) señala que:

> *Poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional que precisa de procesos temporalmente prolongados, a juzgar por sus tiempos didácticos habituales. Supone, del dominio de la matemática básica y de los procesos de pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con los estilos del pensamiento prevariacional, como el algebraico (p. 97).*

Lo planteado por Dolores, es básico para este tipo de trabajo dado que éste requiere de la habilidad de análisis visual de la representación gráfica de una función para su análisis tanto local como global, lo que puede permitir profundizar en el entendimiento de este concepto.

En el desarrollo de esta actividad se discute cómo se transforma una función prototipo, de la cual conocemos su representación gráfica y no su representación algebraica. Esta surge en el desarrollo de un curso ordinario de cálculo en el último grado de bachillerato, tratando de indagar acerca de la familiaridad de los estudiantes con las relaciones funcionales. Como resultado de esta indagación aparecieron cosas interesantes como por ejemplo, que para los estudiantes la función valor absoluto es sólo $f(x)=|x|$, que en una función prototipo en el análisis gráfico, al tomar el valor absoluto a la variable independiente, unos confunden los valores de la función con los valores de la variable y otros cambian la posición de los valores negativos, considerándolos todos en el semieje positivo de las X; no conciben ningún análisis ni operaciones entre funciones sino es a través de su representación algebraica, entre otros; obstáculos que fueron muy comunes entre los estudiantes del grupo.

Condiciones para el aprendizaje de las matemáticas

La relación entre epistemología y didáctica en la enseñanza de las matemáticas es uno de los platos fuertes cuando se hacen consideraciones relacionadas con este tema. Piaget (1984, c.p Cordero, 1997) con su teoría de la equilibración predominante presentó una teoría coherente de la evolución del conocimiento en el cual:

> *El conocimiento pasaría de un estado a otro de equilibrio a través de un desequilibrio de transición, en el curso del cual las relaciones consideradas por el sujeto en el estado anterior estarían en contradicción, ya sea por la consideración de relaciones nuevas o por la tentativa, nueva también de coordinarlas. Esta fase de conflicto sería superada durante una fase de reorganización y de coordinación que llevaría a un nuevo estado de equilibrio" (p. 62).*

En este contexto adquieren mucha relevancia las situaciones problemas que se le presentan a los alumnos con el propósito de transformar el estado de sus representaciones y sus procedimientos y “las relaciones entre los diferentes planos de representación y los procedimientos que se derivan de estos” (Cordero, 1997, p. 57). Aunque aquí se mira la relación sólo entre el plano gráfico y el del lenguaje materno, y el transito es sólo al interior del sistema gráfico, al realizar las transformaciones solamente al interior de este último, esto podría estar generando las dificultades en los estudiantes al no estar acostumbrados a que se les presenten situaciones en este sistema de representación. Sin embargo Albert (1997), establece que “esta es, una alternativa para provocar en nuestros estudiantes ciertos obstáculos y para ayudarlos a superar” (p. 20) ; quien además considera el cálculo como “un dominio donde la actividad matemática se apoya en gran medida en las competencias algebraicas, donde se necesita de una ruptura con una cierta cantidad de prácticas algebraicas para acceder a él” (p. 23), lo que puede resultar problemático “al estar acostumbrados a razonar en lo posible por equivalencias sucesivas e intentar pasar a razonamientos por condiciones suficientes, ya provoca cierta incomodidad en los estudiantes” (Amaya, 2004, p. 197), es decir, se acostumbra trabajar haciendo equivalencias en el transito por diferentes planos de representación, y en este tipo de trabajo se presentan las gráficas de las funciones y se estudian características y tendencias apoyados en un análisis sobre todo visual, donde se tiene en cuenta el comportamiento global de estas para hacer el transito al interior de este sistema de representación y cumplir con los requerimientos que se tengan.

Así, se plantea una ruptura cognitiva en relación con ciertas prácticas algebraicas a que estamos acostumbrados; y que en cierta medida han sido consideradas necesarias para el dominio de muchos conceptos relacionados con el cálculo; se escogió el sistema gráfico por ser uno de los menos usados como medio para presentarles la información a los estudiantes en las situaciones que a menudo presentamos y además, porque según, Duval

(1999) "no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación (...) y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (p. 25). El trabajo con situaciones, en un contexto gráfico, según Cordero (1997):

> *Tiene un estatus epistemológico y puede ser tratado como una categoría del conocimiento del cálculo. Y el sólo hecho de intentar resolver este tipo de problemas provoca una reflexión sobre los niveles de abstracción y sobre las bases del conocimiento del calculo (…) La dimensión epistemológica del comportamiento tendencial de las funciones, provee explicaciones sobre la naturaleza de este concepto en un contexto matemático. Lo que permite ver la función como una instrucción que organiza comportamientos, lo que permite estudiar familias de éstas y analizar el efecto de la variación en algunos de sus parámetros cuando se dejan los otros fijos o hacer un análisis al hacer una variación de varios de estos a la vez (p. 56, 58).*

Lo que lleva a pensar que aunque no se trabaja con situaciones problemas en el sentido de Brousseau, con estas se puede llegar a hacer un trabajo similar así el contexto netamente matemático obligue a hacer abstracciones mucho más fuertes, al tener menos elementos para relacionar y asignar sentido a los conceptos involucrados.

Algunas transformaciones básicas de las funciones

Al grupo de estudiantes se les planteó la siguiente situación: supóngase que de una función cualquiera se conoce su representación gráfica, pero no su representación algebraica; se les propuso realizar algunas transformaciones cuando variamos unos parámetros y dejamos fijos otros. Consideremos la función f(x), que se muestra en la figura 1, la que por razones de conveniencia llamaremos función de referencia.

1. **Realiza la gráfica de la función:** $|f(x)|$

Una transformación de esta función que conduzca a su valor absoluto, tiene que llevar a pensar que en la función valor absoluto, todos los valores son positivos, por lo que al aplicarle valor absoluto a nuestra función de referencia, se van a obtener sólo valores positivos en el rango de ésta; es como hacer una reflexión con un espejo colocado mirando hacía los valores negativos del eje Y (hacia abajo), mas el resto de la gráfica que queda por encima del eje X (que ya era positiva), o sea, que todos los valores del rango de la función van a quedar por encima del eje X, como se puede apreciar en la figura 2.

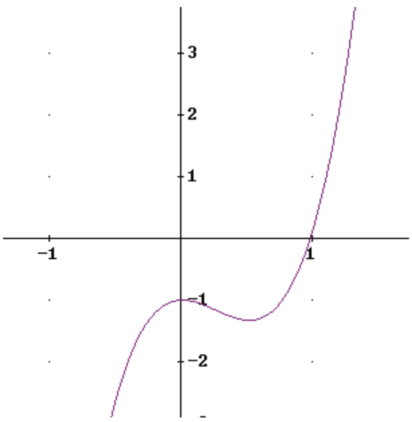

Figura 1. Función de referencia

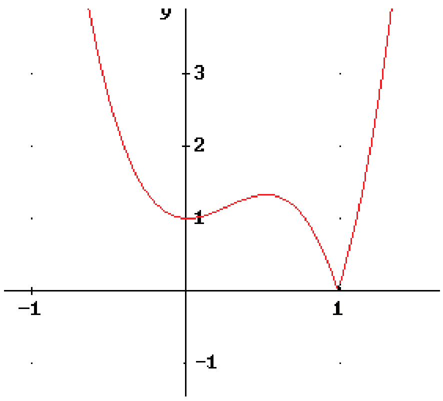

Figura 2.

A pesar de lo que pudiera esperarse a partir del análisis anterior, los estudiantes no conciben el valor absoluto de una función, y menos aún, la gráfica como representación de una función. Sin embargo algunos preguntaron ¿cuál es la función?, al indagar sobre la génesis de su pregunta, no fue difícil concluir que preguntaban por una representación algebraica de ésta. Unos pocos construyeron la gráfica de $|x|$, argumentando que esa es la función valor absoluto. Con los profesores de matemáticas en el intercambio con los compañeros de área, también se les compartió la misma actividad y realizaron la misma gráfica.

2. **Realizar la gráfica de** $f(|x|)$

El tomar el valor absoluto de los valores de la variable independiente "x" y luego encontrar los valores correspondientes de la función $f(|x|)$, requiere un nivel de abstracción mayor que en el caso anterior; Aquí tenemos que pensar en los resultados que se pueden obtener cuando todos los valores de la variable independiente son positivos, tanto los que están a la derecha como los que están a la izquierda del eje Y, entonces, la gráfica se obtiene al hacer una reflexión con un espejo, colocándolo sobre el eje Y, y mirando hacia los valores positivos del eje X, o sea, que los valores de la función van a ser imágenes de valores positivos de la variable independiente, independiente de la posición de los valores de esta, como se muestra en la figura 3.

Aquí no hubo muchas respuestas por parte de los estudiantes, pero un grupo defendió el hecho que al tomarse el valor absoluto de x, todos los valores de esta eran positivos, lo que debía llevar a una gráfica como la de la figura 4.

Cuando se compartió la solución ante el grupo, encontraron una justificación en la orientación de los valores negativos de x, que al aplicárseles el valor absoluto no cambian de posición, sólo funcionan como positivos como valores de la variable independiente, pero esto no los cambia de posición en el plano cartesiano.

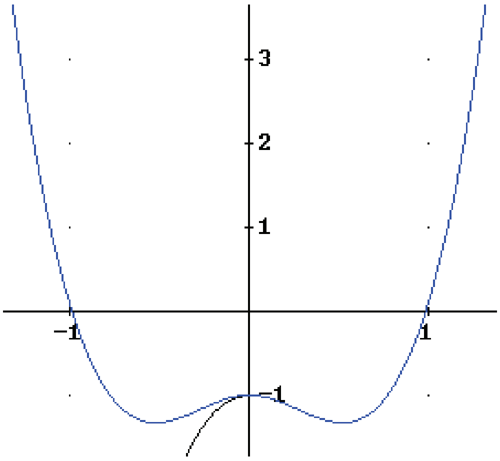

Figura 3.

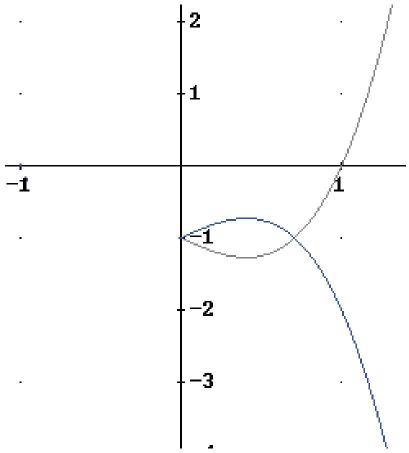

Figura 4.

3. Realizar la gráfica de f (x) + a

La función f **(x) + a** sugiere una familia de funciones; si **a** es un número positivo la gráfica de f(x) se corre **a** unidades hacía arriba y si **a** es un número negativo, la gráfica de f(x) se corre **a** unidades hacia abajo. En la figura 5 se pueden apreciar algunas gráficas para algunos valores de **a**.

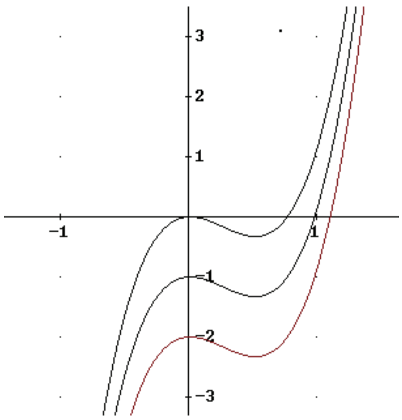

Figura 5.

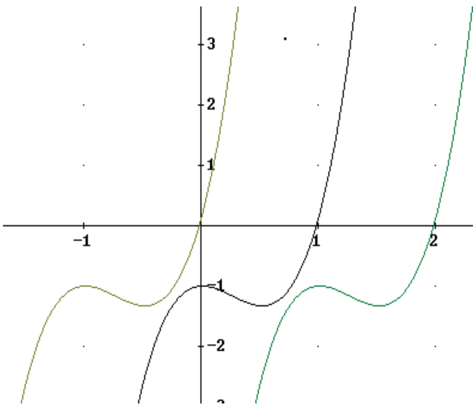

Figura 6.

En las respuestas que nos compartieron los estudiantes, no encontramos mayores dificultades, solo en un comienzo se confundieron, pero luego de varios intentos incoherentes, realizaron algunas gráficas. La mayor dificultad estuvo relacionada con el hecho de tener que asignarles arbitrariamente los valores a **a,** ahí vacilaron un rato preguntando cuales eran los valores de **a;** luego que alguno dijo que se podían tomar valores arbitrarios, los demás se siguieron por éste.

4. **Realizar la gráfica de** $f(x+a)$

La función f **(x + a)** también sugiere una familia de funciones; si **a** es un número positivo la gráfica de f(x) se corre **a** unidades hacía la izquierda y si **a** es un número negativo, la gráfica de f(x) se corre **a** unidades hacia la derecha. O si se quiere mirar desde otro punto de vista, si **a** es un número positivo, los ejes coordenados se corren **a** unidades hacía la derecha y si **a** es un número negativo, los ejes se corren **a** unidades hacia la izquierda, esto es, se corre el origen **a** unidades a la izquierda o a la derecha, dependiendo de si el signo de **a** es negativo o positivo. En la figura 6 se pueden apreciar algunas gráficas para algunos valores de **a**.

En el análisis realizado por los estudiantes, comenzaron asignándoles rápidamente los valores de **a,** e igual que en las gráficas anteriores consideraron, cuando le asignaron valores positivos a **a**, la gráfica la movieron para la derecha y cuando le asignaron valores negativos, movieron la gráfica hacia la izquierda. Cuando se les compartió la respuesta no admitieron que eso podía ser así y como ya se sentían con cierta autoridad para opinar sobre el tema, hubo que mostrarles un ejemplo utilizando el computador con el programa Derive. La situación con los profesores no cambió, la sesión de trabajo con estos se terminó en la sala de sistemas.

Referencias bibliográficas

Albert, A. (1997). *Introducción a la epistemología*. En Serie Antologías (pp. 1-28). México: Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados de IPN.

Amaya, T. (2003). Transformaciones básicas de las funciones: una experiencia de aula. P. R (presidente), *Memorias del quinto encuentro colombiano de matemática educativa*. (pp.62-63). Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

Amaya, T. (2004). Un estudio del cambio y la variación a través de su representación gráfica*. R. F (presidente), Memorias de la décimo octava reunión latinoamericana de matemática educativa.* (pp. 197). Tuxtla: Universidad Autónoma de Chiapas.

Cordero, F. (1997). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. México: *Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa*, 1 (1), 56-74.

Dolores., C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato, México: *Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa, 7*(003), 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Vega, M. Trad.). Cali, Colombia: Universidad del valle: grupo de educación matemática. (Trabajo original publicado en 1995).