

**CB 39****SISTEMA DE ECUACIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE****Danilo DÍAZ LEVICOY**

*Colegio Proyección Siglo XXI - Santa María 1412 - Chile*  
*dddiaz01@hotmail.com*

**Nivel Educativo:** Nivel Medio.**Palabras Clave:** Sistema de ecuaciones, resolución de problemas, propuesta, enseñanza, aprendizaje, Planes y Programas.**RESUMEN**

La resolución de problemas es considerada una parte fundamentales de la matemática, pues mediante estas situaciones los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de la matemática en diferentes contextos y situaciones, especialmente en el mundo que les rodea, es por lo que este artículo presenta una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de los Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante la resolución de problemas de contexto, con el objetivo de lograr que los estudiantes aprendan a trabajar los contenidos matemáticos con problemas y logrando que este se haga parte esencial de su proceso de enseñanza y aprendizaje.

**PROBLEMÁTICA**

A continuación se presentan algunas problemáticas que vive la educación matemática de nuestro país y que serán la base para abordar y crear problemas:

- Dificultades en la resolución de problemas, principalmente en la comprensión de los enunciados, y el paso del registro verbal al algebraico (Segura, 2004)
- Rechazo a la asignatura de matemática.
- Los estudiantes tienen un alto rechazo a la resolución de problemas, producto de la forma que lo han venido trabajando desde la enseñanza básica, con problemas alejados de su realidad y sin que ellos sean participe activo de la búsqueda de soluciones (Díaz, 2009)
- Alta dependencia en el profesor por parte de los estudiantes al desarrollar actividades (Díaz, Mundana & Vergara, 2009; Díaz, 2009)
- Falta de articulación entre los contenidos geométricos y algebraicos. (Díaz & Poblete, 1998; Aravena & Caamaño, 2007; Aravena, 2009; Díaz, Mundana & Vergara, 2009; Díaz, 2009)

**MARCO TEÓRICO****Sistemas de Ecuaciones en los Planes y Programas del Ministerio de Educación**

En los planes de estudio del Segundo año medio, dentro de la unidad Sistemas de Ecuaciones Lineales, se plantea el Objetivo Fundamental de Modelar situaciones o fenómenos cuyos

modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Y sobre los contenidos de Reconocimiento de sistemas de ecuaciones lineales como modelos que surgen de diversas situaciones o fenómenos y Resolución de problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en contextos variados, representación en el plano cartesiano usando un software gráfico y discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones (Mineduc, 2009).

## Ejercicios y Problemas

No es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema, pues el resolver un ejercicio es la aplicación de un algoritmo en forma mecánica, mientras que resolver un problema, significa dar una explicación coherente a un conjunto de datos relacionados dentro del contexto y que para determinar su solución generalmente no existe un mecanismo predeterminado.

Es de común acuerdo, que la resolución de problemas es una parte esencial de la formación matemática de los estudiantes, pues permite experimentar la potencia y utilidad de la matemática en diferentes situaciones de la vida cotidiana, y por otro lado permite el desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

Gaulín (2001) señala:

*“Polya dice: "Hacer Matemáticas es resolver problemas", y para dar una buena idea a los alumnos de lo que es hacer Matemáticas, hay que darles problemas para resolver, problemas. , no ejercicios..., ¡¡problemas!!, para buscar, reflexionar, buscar mucho, investigar...”*

## Modelo de Polya en la Resolución de Problemas

Polya (1957) hizo una formulación de cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

1. *Comprender el problema:* resume la información dada y que deseas determinar.
2. *Desarrollar un plan:* expresa la relación entre los datos y la incógnita a través de una ecuación o fórmula. Busca patrones.
3. *Llevar a cabo el plan:* resuelve la ecuación, evalúa la fórmula, identifica el término constante del patrón, según sea el caso.
4. *Revisar:* es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

## Clasificación Díaz & Poblete

La resolución de tipos de problemas los clasificamos según su naturaleza en rutinarios y no rutinarios, y según su contexto, en real realista, fantasista y puramente matemático (Díaz, Poblete, 1994)

### Problemas rutinarios

*Problemas de Contexto Real:* Un contexto es real si se puede efectuar en la realidad y compromete el accionar del estudiante en la misma.

*Problema de Contexto Realista:* Un contexto es realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad.

*Problema de Contexto Fantasista:* Un contexto es fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad.

*Problema de Contexto Puramente Matemático:* Un contexto es puramente matemático si hace referencia exclusiva a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.

*Problemas no rutinarios:* Un problema es no rutinario cuando el alumno no tiene un procedimiento conocido para resolverlo.

## ACTIVIDADES TÍPICAS SOBRE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN EL SISTEMA EDUCACIONAL CHILENO

A continuación se expone un grupo de ejercicios que se presentan en la Web y que son trabajados por los alumnos.

**Ejemplo Web 1(www.sectormatematica.cl):**

### SISTEMAS DE ECUACIONES 2x2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} x + y = 6 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - y = 19 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 8(x - 2) - 3(y - 4) = 5(x - 1) \\ 5(x + 8) = 2(3y - 1) \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} \frac{11x}{7} + 2y = 22 \\ \frac{3x}{8} - 4y = \frac{21}{4} \end{cases}$$

### SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

$$1) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3y - 2x = 7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 5x - 6y = 17 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3y - 7x = -9 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3y + 2x = 8 \\ 5x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y + 2x = -1 \\ 3y + 4x = -7 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2y + 3x = -2 \\ 6y - 5x = 78 \end{cases}$$

**Ejemplo Web 2:*****Leer atentamente antes de proceder***

1) Resolver, en tu cuaderno, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por los métodos aprendidos (Igualación, Sustitución y Reducción)

a.-  $2x + y = 5$   
 $-2x + 3y = 7$

b.-  $2x + 3y = 23$   
 $5x - 6y = 17$

c.-  $3y - 7x = -9$   
 $5x + 2y = 23$

d.-  $6x + 8y = 20$   
 $5y + 3x = 8$

e.-  $3y + 2x = 8$   
 $5x + 2y = -2$

f.-  $y + 2x = -1$   
 $3y + 4x = -7$

g.-  $2y + 3x = -2$   
 $6y - 5x = 78$

h.-  $7y - 5x = 18$   
 $3x + 6y = 30$

Al hacer una revisión de las actividades que se sugieren para abordar los sistemas de ecuaciones, se detecta la existencia de una algoritmización de los procesos de enseñanza y aprendizaje, centrado en la aplicación de uno o varios métodos que permiten llegar a una solución.

Dentro de esta propuesta, creemos que es de vital importancia el trabajo con resolución problemas desde introducir del contenido, y no sólo para ser utilizados al final de la unidad como aplicación.

**PROPUESTA****1. OBJETIVOS DE LA UNIDAD**

- Conocer y aplicar diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones.
- Analizar existencia y pertinencia de las soluciones en sistemas de ecuaciones.
- Traducir problemas a sistemas de ecuaciones definiendo adecuadamente las incógnitas.
- Relacionar las expresiones gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones y sus soluciones (MINEDUC, 2004)

**2. CONOCIMIENTOS PREVIOS**

Bajo el contexto educacional chileno, es posible apreciar el sentido cronológico propuesto por los programas de estudio, donde previo a los Sistemas de Ecuaciones, los estudiantes deben manejar los contenidos de:

- Lenguaje Algebraico
- Reducción de términos semejantes
- Valorización de expresiones Algebraicas
- Resolución de Ecuaciones de primer grado (lineales y fraccionarias)
- Ecuación de la recta y su gráfica
- Entre otros

**3. EL PROBLEMA DE INTRODUCCIÓN**

Producto de la importancia del trabajo con la resolución de problemas, se ha pensado introducir este contenido con el siguiente problema:

*Para realizar los viajes, el vehículo utilizado como taxi básico debe contar con taxímetro. El taxímetro deberá señalar el costo de la carrera en cualquier momento de día y de noche, en forma claramente observable por el pasajero. El vehículo debe indicar en el parabrisas el valor de los primeros metros recorrido.*

*Un taxi tiene una caída de bandera de \$150 y \$ 70 por cada 200 metros. Otro tiene una caída de \$200 y \$60 por cada 200 metros. ¿Cuál de los taxis conviene para un viaje de 2 km?,*

*¿Cuál para una de 800 mt? En general, en qué caso y a partir de qué distancia, ¿un taxi es más conveniente que el otro?*

Al trabajar este problema, se busca que los estudiantes utilicen diferentes estrategias de solución, analizando su pertinencia y efectividad. Al finalizar, se presentan y caracterizan los diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones, seleccionando el que sea más cómodo para su trabajo.

#### 4. POSIBLES DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INTRODUCTORIO.

- No comprender correctamente el problema.
- Dificultades para definir las variables del sistema de ecuaciones y errores al traspasar del enunciado al sistema de ecuaciones (del registro verbal al algebraico).
- Problemas al graficar las rectas que intervienen en el problema, ya sea al reemplazar los valores de  $x$ , calcular  $y$  o al ubicar los puntos en el plano cartesiano.
- Que la solución encontrada no sea pertinente al contexto del problema.

Para solucionar estas posibles dificultades el docente debe considerar:

- Luego de la lectura comprensiva del enunciado, formular preguntas que permitan identificar correctamente los datos y elementos del problema, el contexto y lo que se solicita.
- Para encontrar las ecuaciones que modelan este problema y sus gráficas se discutirá con el grupo curso las posibles soluciones y se comprobará la gráfica con el uso del programa Graphmatica.
- Evaluar y reflexionar con el curso la pertinencia de la solución de acuerdo al contexto del problema.

#### 5. PROBLEMAS PARA TRABAJAR EN CLASES Y DE EVALUACIÓN

A continuación se presenta un grupo de problemas para ser utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales y que pueden ser adaptados según contenidos, objetivos y contextos.

##### **Problemas Realistas**

1. El Instituto Nacional de la Juventud desea realizar una campaña de Prevención del embarazo adolescente, para ello aplicó una encuesta a 45 jóvenes sexualmente activos que usan algún método anticonceptivo, la diferencia entre el doble de los jóvenes que usan pastillas anovulatorias y el triple de los que usan preservativos es de 5. ¿Cuántos jóvenes usan estos métodos?
2. En un grupo de jóvenes, la cantidad que se identifican entre Pokemones y Pelolais es 45. Dentro de este grupo la mitad de los Pokemones equivale a los dos quintos de los Pelolais. ¿Cuántos Pokemones y Pelolais hay en este grupo?

Estos problemas corresponden a situaciones que pueden suceder en la realidad. Para la creación de estos problemas se recurrió a la realidad inmediata de los estudiantes, como lo son las tribus urbanas con las que se identifican (Pokemones, Pelolais, Emos, etc), situaciones referentes a la educación sexual de los educandos y que en nuestro país es considerado un Objetivo Fundamental Transversal, además de contextos que hagan reflexionar a los alumnos sobre la importancia de la solidaridad.

### Problema Real

3. Crear un Sistema de Ecuaciones que represente las vocales y consonantes de tu nombre.
4. Crear un Sistema de Ecuaciones que represente la cantidad de hombres y mujeres presente hoy en la sala.
5. Crear un sistema de ecuaciones que represente la edad de un miembro de tu familia y la tuya. Pedir a tu compañero de banca que determine ambas edades.

Este grupo de problemas están basados en la realidad de cada uno de los estudiantes que están en la sala de clases y por ende cada respuesta va a ser diferentes, es así como el primer problema va a depender de la cantidad de letras que tenga cada nombre.

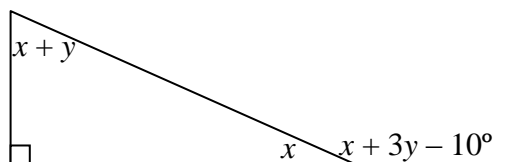
### Fantasiasta

6. En la aldea de los Pitufos, la cantidad de arbustos de Pitufresas Moradas, es el triple que las Pitufresas Negras. Si la quinta parte del total es 660 arbustos. ¿Cuántos arbustos de Pitufresas Moradas y Negras hay?
7. En el último mes, Pincky y Cerebro han tratado de conquistar el mundo 72 veces. Si la cantidad de ideas para conquistar el mundo de Cerebro fue el triple de las de Pincky ¿Cuál es la cantidad de ideas que ha aportado cada uno?

Estas situaciones problemas aunque son fruto de la imaginación, están ligadas a la realidad de los estudiantes, pues hace alusión a los dibujos animados que ven por la televisión y elementos de la tradición nacional.

### Puramente Matemático

8. Determina “x” e “y” en cada caso :



9. Un rectángulo tiene un perímetro de 392 metros. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 52 metros más de largo que de ancho.
10. La diferencia entre el triple de un número y la cuarta parte de otro es 13 y el doble del primer número más dos veces el segundo es 18.

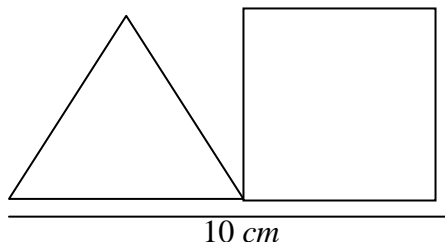
Sin duda que estos problemas son los que vemos más comúnmente en nuestras aulas y en los textos de estudio de nuestros alumnos (Bohle & Díaz, 2009) y por lo que no pueden ser excluidos de una propuesta sobre la enseñanza y aprendizaje de un tópico matemático.

### No rutinarios

11. Cree una situación problema, donde las soluciones sean 7 y 10
12. En el sistema 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + ky = s \end{cases}$$

- a. ¿Qué condiciones deben satisfacer “k” y “s” para que el sistema no tenga solución?
- b. ¿Qué condiciones deben satisfacer “k” y “s” para que el sistema tenga infinitas soluciones?
- c. ¿Qué condiciones deben satisfacer “k” y “s” para que el sistema tenga una solución?

13. En la Siguiete figura, se tiene un triángulo equilátero y un cuadrado de igual perímetro, ¿Cuánto mide el lado de cada figura?



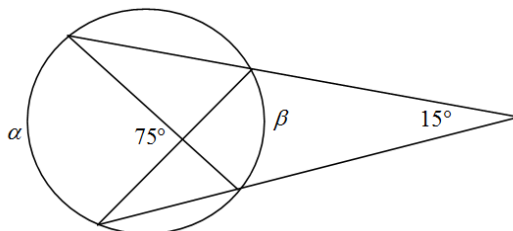
Como su nombre lo dice, No Rutinarios, este grupo de actividades generalmente no son incluidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que a los estudiantes se les plantean problemas que posean una única solución y en donde el desafío está en el traspasar del registro verbal al algebraico, sin exigir un desafío mayor.

El desarrollo las actividades planteadas anteriormente implican un mayor análisis de las situaciones y un conocimiento de calidad sobre el tópicoo matemático en cuestión, debe analizar la pertinencia de una solución y los posibles caminos a seguir para encontrarla.

**Otras Unidades**

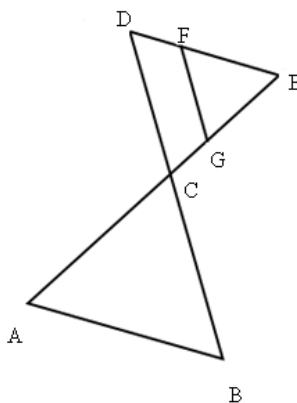
**La circunferencia**

Calcular los ángulos pedidos  $\alpha$  y  $\beta$ .



**Teorema de Thales**

En la figura que se muestra a continuación,  $(AB) \parallel (DE)$  y  $(CD) \parallel (FG)$ . Si  $AC = x + 4$ ,  $BC = x + 1$ ,  $CD = y + 3$ ,  $CG = x - 0,8$ ,  $GE = x + 2,4$ ,  $FG = x$ . Determinar el valor de las incógnitas usando Sistema de Ecuaciones



Con este tipo de actividades se busca que los alumnos apliquen constantemente los contenidos vistos con anterioridad y reconozcan la relación entre lo geométrico y algebraico.

## 6. EVALUACIÓN

La evaluación será Formativa a través de la observación directa, es decir, el docente observará el procedimiento de los estudiantes y entregará las indicaciones que permitan ir guiado al estudiante en su proceso de aprendizaje. Además, se evaluará Sanativamente la presentación de la solución y método utilizado para resolver los problemas.

## CONSIDERACIONES FINALES

- Con esta humilde propuesta, queremos aportar a los profesores de matemática actividades centradas en la resolución de problemas, que tradicionalmente no han sido abordadas en la educación secundaria chilena, así como los problemas que tienen más de una solución o que no existe porque está fuera de contexto;
- Problemas que integren lo geométrico y lo algebraico, además de permitir una continuidad de los contenidos vistos durante los años de educación secundaria.
- La resolución de problemas aporta significativamente al desarrollo del pensamiento matemático, logrando que los sistemas educativos entreguen a la sociedad personas matemáticamente competentes.

## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

**ARAVENA, M.** (2009). Resolución de problemas y modelización matemática en la formación inicial de profesores. Acta IV Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Puerto Montt, Chile.

**ARAVENA, M.; CAAMAÑO, C.** (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca- Chile. Revista Estudios Pedagógicos. N° 33, pp 7 – 25.

**BOHLE, A., DÍAZ, D.** (2009) Análisis de los problemas presentes en los textos escolares chilenos de tercer año de enseñanza secundaria en el tema más sobre triángulos rectángulos. Acta II Congreso Nacional de Estudiantes de Pedagogía en Matemática, pp 66-68, Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile.

**CONTRERAS, J., del PINO, C.** (2007). Resolución de problemas y contextos matemáticos. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 12, páginas 27 – 36.

**DÍAZ, D.** (2008). Sistema de ecuaciones: Una experiencia con resolución de problemas. Acta I Congreso Nacional de Estudiantes de Pedagogía en Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

**DÍAZ, D.** (2009). “El problema, depende del problema...”. Acta VI Taller de Capacitación 2009: “Métodos de Enseñanza de la Matemática”, Universidad San Sebastián de Talcahuano y Colegio Alemán Concepción, Talcahuano, Chile.



**DÍAZ, D., MUNDANA, F., VERGARA, J.** (2009). Propuesta para la enseñanza del Teorema de Thales mediante resolución de problemas. Revista PERSPECTIVAS EducaciónALES., pp 283-297.

**DÍAZ, V.** (1994). Una Evaluación de la Resolución de Tipos de Problemas en Cálculo Diferencial. Tesis de Magíster. Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación. Chile.

**DÍAZ, V., POBLETE, A.** (1994). Evaluación de los aprendizajes matemáticos en la enseñanza secundaria en el marco de la reforma educacional. Proyecto de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT. Fondecyt 1990558.

**DÍAZ, V., POBLETE, A.** (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos. ¿Una habilidad inhabilitante? Revista Épsilon. Número Monográfico. 42, 409-423.

**GAULÍN, C.** (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. Revista SIGMA. N° 19, pp. 51-63.

**MINEDUC** (2004). Matemática, Programa de Estudio Segundo Año Medio. Segunda Edición, Santiago. Chile.

**MINEDUC** (2009). Propuesta Ajuste Curricular. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios: Matemática. Documento aprobado por el Consejo Superior de Educación.

**POLYA, G.** (1957). How to Solve it. N.J.: Princeton University Press. USA.

**PÓLYA, G.** (1990). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

**RAMÍREZ, G., CHAVARRÍA, J., BARAHONA, C., MORA, M.** (2009). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso. Revista digital Matemática, Educación e Internet ([www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/](http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)). Vol. 10, N° 1.

**SEGURA, S.** (2004). Sistemas de ecuaciones Lineales: Una Secuencia Didáctica. RELIME Vol 7, N°1, pp49 – 78.