

UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LO LOGARÍTMICO: DE MULTIPLICAR SUMANDO A UNA PRIMITIVA

Marcela Ferrari Escolá

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
ferrari@mathacapulco.com

(México)

Resumen. En este reporte daremos un somero recorrido por los cuatro escenarios constituyentes de nuestra investigación alrededor de la construcción de los logaritmos entrelazados por la hipótesis epistemológica establecida luego de un estudio socioepistemológico dando evidencias de la riqueza argumentativa hallada en la interacción de quince estudiantes de sexto semestre de un bachillerato mexicano. En nuestra investigación consideramos que lo logarítmico emerge al facilitar cálculos y modelar, prácticas sociales subsidiarias de predecir, siendo caracterizada desde la covariación de dos progresiones una geométrica y la otra aritmética, a lo que hemos llamado covariación logarítmica.

Palabras clave: socioepistemología, prácticas sociales, covariación logarítmica

Abstract. In this report we will give a shallow tour on the four settings about the construction of the logarithms interwoven by the epistemology hypothesis established after a socioepistemology study giving evidences of the argumentative wealth found in the interaction of fifteen students of sixth semester of a Mexican baccalaureate. In our investigation we think that the logarithmic thing emerges on having facilitated calculations and having shaped, social subsidiary practices of predicting, being characterized from the covariación of two progressions the geometric one and another arithmetic, to what we have called covariación logarithmic.

Key words: socioepistemology, social practices, logarithmic covariation

El objetivo central de nuestra investigación ha sido dar evidencias que lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición, definición primigenia de “logaritmo” alejado del ambiente escolar y que emerge al ejercer la práctica de facilitar cálculos entremezclándose con la práctica de modelación, ambas prácticas sociales acuñadas al seno de la socioepistemología. Discutimos entonces, la posibilidad de establecer que la apropiación de la noción de “función” requiere una mirada global y extendible a toda función que varios investigadores sostienen manteniendo su mirada a los objetos alejándose de nuestra esencia, la epistemología de las prácticas. Esta hipótesis epistemológica toma forma al interrogarnos sobre qué argumentos permitieron a los logaritmos persistir en el desarrollo de la matemática erudita empapada de prácticas sociales y de referencia, así como qué factores han inhibido su apropiación escolar generando otro tipo de prácticas, buscando así evidencias de su fortaleza, luego de nuestro estudio socioepistemológico .

Escenarios de investigación

La investigación que reportamos se desarrolló en cuatro escenarios diferentes pero inevitablemente entrelazados, al tratarse de estudios sistémicos, donde lo situado y temporal juega un papel importante:

El primero, aquel donde indagamos sobre la dicotomía que se entabla en torno a la noción “función” entre los investigadores que abogan por una única respuesta, y los que preferimos estudiar características particulares de cada función, en nuestro caso la función logarítmica.

La importancia conferida a “función” desde el paradigma euleriano y las dificultades propias de una noción que admite varias concepciones y representaciones, se ve reflejada en el interés por su estudio de investigadores de la más diversa índole (Dubinsky y Harel, 1992; Carlson, Oehrtman y Thompson, 2008; Falcade, Laborde y Mariotti, 2007; entre muchos otros). Acercamientos que reflexionan globalmente sobre función, en búsqueda de lograr que los estudiantes desarrollen un pensamiento funcional aplicable a distintos modelos; respondiendo al paradigma vigente, el estudio de la construcción de un objeto matemático donde se considera que la apropiación de un universal conlleva al entendimiento de lo particular. Por otro lado, al analizar reportes de investigación sobre logaritmos observamos que pueden ser encasillados en dos vertientes desvinculadas: aquella con gran acento en *lo cognitivo* buscando desarrollar un razonamiento logarítmico desde el objeto matemático ya aceptado en el ámbito escolar (Berezovski y Zazkis, 2006; Abrate y Pochulu, 2007, etc.); y aquella con gran acento en *lo histórico* reduciéndose a comprender las ideas matemáticas en las que se desarrollaron los logaritmos sin ninguna intención de impactar en la educación (Burn, 2001; Gonzáles y Vargas, 2007, etc.).

Desde nuestra investigación entonces, cuestionamos estas dicotomías y nos adherimos a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla; alejándonos así de la búsqueda de un único mecanismo para desarrollar un pensamiento funcional, donde estudios socioepistemológicos son una fuente rica de argumentos para rediseñar el discurso matemático escolar imperante. Retomamos entonces, la hipótesis epistemológica establecida: *lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición*, cercana a la definición primigenia de *logaritmo* alejado del ambiente escolar, y que nos incentivara a analizar ciertas investigaciones sobre covariación. Hallamos así, en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002) una interesante síntesis de investigaciones al respecto aunque seguimos las ideas de Confrey y Smith (1995) al considerar que, en la aproximación covariacional, una función es comprendida como la

yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales es generada independientemente a través de modelar datos.

El segundo, aquel donde analizamos el discurso matemático escolar en las voces de profesores y alumnos así como en textos escolares que presentan a los logaritmos en sus tres argumentos principales: como exponente, como función inversa y como la primitiva, de manera disjunta.

Desde nuestra perspectiva, el discurso matemático escolar involucra textos escolares así como a profesores y alumnos, generadores de ciertas prácticas escolares, que nos permiten caracterizar herramientas logarítmicas utilizadas en aulas mexicanas de nivel medio superior y superior. Para ello, realizamos el análisis de textos^[1] organizando la discusión desde: (a) *lenguaje algebraico* donde los acercamientos estudiados fundan su argumentación en “función” y, en general, es la definición la que inicia la presentación de los logaritmos; (b) *lenguaje gráfico*, donde observamos que lo ostensivo prevalece y donde una gráfica de la curva logarítmica emana de tres argumentos: de una *tabla numérica* que requiere la expresión analítica; de la *simetría* respecto a $y=x$; y del *área* bajo la curva; siendo, en la mayoría, argumentos finales; y (c) *uso* de los logaritmos que en libros de Álgebra y Cálculo juega un papel secundario cayendo, en general, en ejercicios análogos a los ya resueltos en sus páginas.

Por otro lado, generamos tres grupos de discusión con profesores^[2], donde observamos que coinciden con su poco acercamiento a los logaritmos y de los cuales no guardan buenos recuerdos; permitiéndonos apreciar la frecuente ausencia de espacios para discutirlos con los estudiantes debido, bajo su perspectiva, a la densidad de conceptos que deben impartir en cursos de álgebra. Se observa además que, en general, repiten los argumentos que sus maestros utilizaron recordando la falta de conexión con la realidad, o la cantidad de ejercicios que tenían que resolver, sin distanciar demasiado esas tareas a sus propios alumnos.

En los estudiantes^[3] en cambio, se observa el arraigo a nociones que escolarmente se han trabajado con mayor intensidad. Una herramienta muy utilizada es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, evidenciando que no se ha desarrollado un argumento funcional, quedando así en un acercamiento operatorio. Esto se reafirma al mirar las operaciones matemáticas que invocan ante algunas expresiones algebraicas, o al graficar pues prevalece la idea de que se requiere de una tabla para esbozar una función, resabio de los acercamientos propuestos en la mayoría de los textos utilizados en clase, así como la simetría geométrica para funciones inversas, siendo extendida en la mayoría de los alumnos al recíproco. Pareciera así, que la inercia escolar respecto a los argumentos presentes impacta en la introducción de los logaritmos en el lenguaje matemático que deben desarrollar los jóvenes. Se denota un arraigo a reproducir literalmente sentencias escolares o ausencia de una visión

crítica que evidencian un pensamiento funcional alejado de la posibilidad de reconocer funciones desde sus particularidades, mismas que anuncian su naturaleza (Ferrari y Farfán, 2008).

El Tercer escenario, aquel donde realizamos un trabajo epistemológico estableciendo que *facilitar cálculos y modelar*, son las prácticas sociales que propiciaron la conformación de los logaritmos, evidenciándose en las herramientas matemáticas que surgieron, modificando las prácticas y por ende a sí mismas; base de nuestro diseño de aprendizaje.

Luego de reflexionar sobre el desarrollo de herramientas que surgieron de la primera definición de los logaritmos en un mundo muy especial y desarrollado, donde las necesidades de generar mejores artefactos para facilitar cálculos se perciben aterrizadas en la navegación, o en la economía; observamos que en otras épocas y lugares, esta necesidad se percibe en la búsqueda de respuestas para fenómenos naturales como inundaciones o conquistas tal como en los babilónicos mediante las tablas para registro y cálculos así como en los egipcios donde multiplican duplicando y vinculando valores en dos columnas para evitar una suma reiterada; o en los incas, que generan el quipu y la yupana entre música y cantos, así como en la china, donde la proporcionalidad directa e inversa y el uso de progresiones así como calcular mediante el ábaco fueron argumentos centrales; cobrando sentido lo importante de lo situacional en la construcción del conocimiento.

Así, pese a la rapidez de la mirada que hemos realizado en un mundo imposible de abarcar, logramos entrever cómo *lo logarítmico* se va desarrollando a la mano de establecer formas de escribir matemáticamente, de mecanizar procesos laboriosos como el de multiplicar, de ordenar en columnas la relación entre ciertos valores, de reconocer ciertos crecimientos aunque no se haya percibido la covariación logarítmica que desde nuestra perspectiva está presente.

Por otro lado, rastreamos elementos desarrollados por la necesidad de describir ciertos fenómenos de la naturaleza como el movimiento; así como por aquellos argumentos intramatemáticos como el área bajo una hipérbola equilátera o una curva cuya subtangente sea constante, argumentos que se han entremezclado desde la antigüedad, confluyendo a lo que hoy llamamos *curva*, y más particularmente función, muy ligado a modelar. Para ambos no es extraño basar sus explicaciones en la covariación de progresiones, ya sean aritméticas o geométricas; eje de nuestra discusión hacia lo logarítmico.

Nos referimos entonces a dos prácticas: *facilitar cálculos* y por ende de la generación de herramientas de distinta índole; y *modelar*, donde estudiamos diversas aproximaciones, mismas que han desaparecido del discurso matemático escolar ante el rigor de la matemática y la

necesidad de sintetizar ideas o economizar construcciones; elementos que nos interesa reflejar en nuestros diseños en búsqueda de que emerja *lo logarítmico*. Se requiere entonces, que los logaritmos sean usados, formulados y teorizados para construirse y existir.

Del estudio socioepistemológico realizado como análisis preliminar de la Ingeniería didáctica desarrollada, se dedujo, como hipótesis epistemológica que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función. Adquiere mayor sentido, entonces, estudiar la argumentación que desarrollan los estudiantes al involucrarlos en un ambiente especial, diseñado desde los argumentos que dirigieron la evolución de los logaritmos, y así, dar evidencia sobre lo que ocurre en un salón de clase al incorporar en la discusión escolar esta hipótesis.

El *cuarto escenario*, aquel escolar, donde quince estudiantes de sexto semestre de bachillerato aceptan el desafío de acercarse a *lo logarítmico*; invitándolos a transitar por los tres momentos de los logaritmos: éstos como *transformación*, como *modelizadores* y como *objeto teórico*, regido por la covariación logarítmica (Ferrari, 2001).

Abordar la problemática que mencionáramos al inicio de este escrito desde una visión particular, distanciándose un poco del espíritu de la mayoría de los trabajos alrededor de función que se encuentran en nuestra comunidad, requería un marco teórico robusto, aquel que nos cobijara y diera elementos pertinentes para atenderla. Desarrollamos entonces esta investigación bajo la socioepistemología, es decir, aquello que se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y su difusión cultural. Aquello que se preocupa por la epistemología, pero no desde el desarrollo del conocimiento, sino desde la evidencia de las prácticas sociales inherentes al mismo. Adopta así, una visión sistémica donde se entremezclan las prácticas escolares propias de la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

Utilizamos entonces, la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como metodología base ya que permite y propone encarar un fenómeno didáctico desde una perspectiva de carácter netamente sistémico. Adoptamos su estructura, es decir, sus fases, pero bajo la concepción de organizar nuestra propia investigación bajo la óptica socioepistemológica. Esto nos lleva a

articular las fases desde el estudio de las prácticas sociales y de referencia que sustentan el diseño de las actividades de aprendizaje, así como incorporar algunos métodos particulares en cada fase, tales como análisis de textos (originales y escolares); grupo de discusión, y otros métodos utilizados por la psicología social, particularmente, la representación social.

En nuestra búsqueda de evidenciar que la construcción de lo logarítmico descansaba en nuestra hipótesis epistemológica, invitamos a quince estudiantes de sexto semestre de bachillerato a participar en un curso diseñado desde los tres momentos de los logaritmos. Trabajamos 15 sesiones videograbadas (dos por semana, de hora y media), donde los estudiantes formaron grupos de tres y se les solicitó entregar su reporte de clase, así como organizar sus conclusiones en cada cierre de momento para lograr consenso general. Los desafiamos entonces a trabajar con las actividades creadas respetando las ideas originales de los logaritmos, donde nos interesaba observar las herramientas y argumentos que emergieran así como su evolución y redes de significados y modelos que se fueran consolidando (Ferrari y Farfán, 2010).

Principales conclusiones de la investigación

Discutimos entonces en este trabajo que, “saber función es necesario y suficiente para conocer cualquier función específica” argumento que sostienen aquellos cuya unidad de análisis se centra en generalidades, en tanto que nosotros partimos de particularidades. En aquellos que no consideran importante revisar los orígenes de las nociones y las prácticas sociales adosadas a ellas pues el discurso imperante ya ha sido consensuado y generado significados sociales aceptados por una comunidad erudita, en tanto que nosotros partimos de analizar la esencia de su origen y cómo ha llegado a lo escolar. Nos reconocemos así, en la comunidad de los socioepistemólogos, donde la necesidad de percibir y estudiar las prácticas sociales indisociables de las herramientas generadas en su seno, del uso de éstas últimas que propician la evolución de las primeras, de reconocer que la construcción del conocimiento matemático es situado, temporal y culturalmente determinado; son elementos básicos para estudiar un fenómeno producido en un aula de matemáticas. Espacio donde establecemos que los usos y significados sociales desarrollados no son imperturbables, sino renovables, pues lo que permanece es la esencia de discursos establecidos muchas veces fuera de ámbitos escolares y donde es necesario provocar la emergencia de una red de significados propia, construida desde los consensos logrados con sus pares para disminuir luego la distancia con los significados institucionalizados socialmente, donde el papel del profesor resurge.

Creemos haber sensibilizado a los estudiantes hacia la covariación logarítmica donde el trabajo en grupo, la libertad de expresarse en búsqueda de un discurso común, dio frutos.

Regresarnos a los argumentos originales que propiciaron la constitución de los logaritmos nos permite organizar un discurso institucionalizado a transmitir escolarmente desde otros supuestos que lo resquebrajan y lo rearmen desde la covariación logarítmica como eje integrador. Lejos de repetir la historia, sino rescatar esencias, lejos de establecer “el camino” sino sólo proponer uno, lejos de dar soluciones a los estudiantes sino de problematizarlos, lejos de enseñar los logaritmos sino aprender con ellos, es que evidenciamos sus fortalezas y fragilidades.

La elección de las fichas logarítmicas como variable didáctica, en la primera etapa del curso, que implicaba trabajar en dos mundos distintos el de multiplicar y el de sumar interrelacionados, permitió que anclara en ellos el argumento que “*si reconocemos una progresión geométrica y una aritmética entonces estamos hablando de una curva logarítmica*”; esencia de lo logarítmico, no lo discreto que evidencia la sentencia mencionada, sino su naturaleza, el isomorfismo de mundos donde ambas operaciones funcionan, pero que al reconocerlas covariacionalmente nos lleva a definir los logaritmos.

Regresar a la geometría para generar una visión de continuidad en una función que se discutiera inicialmente como algo discreto, de arreglos numéricos especiales y naturales, abrió la posibilidad de generar otros argumentos y fortalecer el acercamiento a lo logarítmico, alejándolos del discurso gráfico tradicional de la escuela. Los introducíamos así, en otro escenario, provocando el uso de una red de modelos: el geométrico como disparador de la discusión, el numérico regresándolos a un ambiente similar de las fichas, y el algebraico que se evidenciara el más frágil y alejado del acervo matemático de estos estudiantes. Los inducíamos también, a que emergiera en sus discusiones y consensos el uso del argumento central de los logaritmos justamente para reconocerlos, para construir nuevos argumentos que los describan, acercándolos a una mirada más integral de esta función. Decidimos además, confrontar funciones polinomiales con trascendentes, escogiendo para esto una función cuadrática y la logarítmica en el segundo momento y una función constante, una función lineal y una función racional en el tercer momento para que del estudio del área bajo las mismas percibieran la naturaleza de cada una y reconocieran sus primitivas.

Arribábamos así con los estudiantes, al fin de un recorrido por los tres momentos epistemológicamente establecidos donde los logaritmos como *transformación*, como *modelizadores* y como *objeto teórico* estuvieron presentes regidos por las prácticas sociales de facilitar cálculos y modelar (Ferrari, 2008).

Notas

1. Los textos analizados fueron los que constituyen el acervo de la biblioteca de las escuelas de apoyo a la investigación Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) y Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG).
2. Los profesores entrevistados mediante la metodología “grupo de discusión” fueron quince estudiantes de maestría en Matemática Educativa en la UAEH; ocho estudiantes de la maestría en la Universidad Autónoma de Chiapas y 47 participantes de un taller impartido en la Universidad Autónoma de Nayarit.
3. Los estudiantes fueron participantes de un curso de ecuaciones diferenciales de la UAEH, de segundo semestre formándose como ingenieros industriales; otros de cuarto semestre del área de Matemática Educativa del curso Matemática escolar I, de la Unidad Académica de Matemáticas de UAG, con los cuales se les entrevistó a partir de reactivos preparados como breves exámenes para luego conversar con los que evidenciaron ideas interesantes.

Referencias bibliográficas

- Abrate, R. y Pochulu, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. *Revista Iberoamericana de Educación matemática* 10, 77-94. Obtenida en octubre de 2007 en <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=27#indice>.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Berezovski, T. y Zazkis, R. (2006). Logarithms: Snapshots from Two Tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehliková. *Proceedings of 30th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2. (pp. 145-152). Obtenida en octubre de 2007 en http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/29/8c/0d.pdf
- Burn, R. (2001). Alphonse A. de Sarasa and Logaritmos. *Historia Mathematica* 28, 1-17.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education* 23(5), 352-378.
- Carlson, M. P., Oehrtman, M. y Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students’ understanding of functions. En M. P. Carlson y C.

- Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 150-166). USA: MAA Bookstore.
- Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86.
- Dubinsky, E. y Harel, G. (1992) (Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, Washington, DC, USA: MAA Notes 25.
- Falcade, R., Laborde, C. y Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics* 66, 317.
- Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis no publicada de maestría. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN), México.
- Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: De multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis no publicada de doctorado. Cinvestav-IPN, México.
- Ferrari, M. y Farfán, RM. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(3), 309-354.
- Ferrari, M. y Farfán, RM. (2010). Una Socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(Número Especial), 53-68.
- González, M. y Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemáticas, Enseñanza Universitaria* XV(2), 129-144.