LA ARGUMENTACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Cecilia Crespo Crespo, Patricia Lestón, Liliana Homilka
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA (México)
crccrespo@gmail.com, patricialeston@gmail.com, lhomilka@gmail.com

Resumen. La lógica y la matemática se encuentran relacionadas. A lo largo de la historia, en distintas culturas, diversos pensadores han defendido posturas diferentes acerca de dicha relación. La matemática es considerada en la actualidad como la ciencia deductiva por excelencia, ya que en ella se pueden obtener unos resultados a partir de otros mediante la aplicación de leyes lógicas. Sin embargo, en el aula, esto no ocurre. No sólo dentro de las demostraciones formales sino en las argumentaciones informales con las cuales los estudiantes justifican los resultados a los que llegan. Se ve a diario que los alumnos presentan serias dificultades al intentar realizar argumentaciones para justificar las resoluciones que realizan. En este trabajo, se considera a la matemática como una actividad cultural. Por lo cual, es indispensable que se ubique cada forma de argumentar en el escenario sociocultural en que se genera y se desarrolla.

Palabras clave: demostración, formalización

Abstract. Logic and mathematics are undeniably linked. All through history, in different cultures, many thinkers have stood up for diverse ideas about this link. Math is considered nowadays as the deductive science above all the rest, since results can be obtained from a set of previous results bay means of inference laws only. However, this does not happen inside the classroom. Not only when studying formal demonstrations, but whenever students are trying to justify their working. Every day we see students with serious difficulties at the time of having to argument in order to justify their solving proposals. In this paper, we consider Math as a cultural activity. Therefore, it is essential for us to set each type of argument within a sociocultural scenery where it was generated and developed.

Key words: demonstration, formalization

Introducción

La matemática es considerada en la actualidad como la ciencia deductiva por excelencia, ya que en ella se pueden obtener unos resultados a partir de otros mediante la aplicación de leyes lógicas. Sin embargo, en el aula, esto no ocurre. No sólo dentro de las demostraciones formales sino en las argumentaciones informales en los cuales justifican los resultados a los que llegan. Se ve a diario que los estudiantes presentan serias dificultades al intentar realizar argumentaciones para justificar las resoluciones que realizan.

En este trabajo, se considera a la matemática como una actividad cultural. Por lo cual, es indispensable que se ubique cada forma de argumentar en el escenario sociocultural en que se genera y se desarrolla. Esto permite no solo abordar y tratar el concepto desde diferentes aspectos y enfoques, sino que favorece la reflexión sobre su implementación en el aula.

En la formación del discurso matemático escolar influyen diversos factores (Castañeda, 2009, Castañeda, Rosas y Molina, 2010). En él se refleja una ideología a través de forma de presentar y tratar objetos matemáticos en el aula (qué debe estudiarse, cómo, en qué orden, etc.). El tratamiento de las formas de argumentar y la decisión de aceptarlas o no son ejemplos de este fenómeno. Nos centraremos en analizar diferentes resoluciones y argumentaciones que pueden surgir en el aula de los distintos niveles educativos (Crespo Crespo, 2007, 2010).

De qué se habla al referirse a las argumentaciones en el aula de matemática

Asociadas a la práctica social de la demostración en matemática, se encuentran las argumentaciones. Su presencia en el discurso matemático, sin embargo, trasciende a las demostraciones, dado que la argumentación es una forma discursiva que permite convencer a otro de la veracidad de una afirmación. Es importante comprender que no cualquier discurso es argumentación. Su existencia indica proceso lógico conectado sobre un objeto determinado sobre el cual se afirma algo. El texto generado permite comunicar ideas y puede incluir argumentos verbales, numéricos, datos, gráficos, entre otras representaciones y no excluye referencias no discursivas como expresiones visuales o gestuales.

La naturaleza de esta forma de comunicarse hace que no sea sencillo distinguir lo que es argumentación de aquello que no lo es. Las argumentaciones se ponen de manifiesto en el aula en la formulación de conjeturas por parte de los estudiantes y la defensa de éstas en la que pueden generarse discusiones que intenten llevar al convencimiento de los pares y docentes. También pueden surgir en procesos de colaboración entre compañeros y en la defensa de estrategias frente a situaciones problemáticas planteadas.

Algunas argumentaciones en aulas de nivel medio y superior

Un error común en la inducción completa

En la mayoría de los cursos elementales de álgebra de nivel superior, aparecen las demostraciones por inducción completa para demostrar propiedades de los números naturales. Se trata de una estrategia de argumentación deductiva presente en el discurso matemático escolar y su nombre se debe a que tiene cierta similitud con los procesos inductivos característicos de las ciencias experimentales. La aplicación usual de este método consiste en verificar para la propiedad que se desea demostrar primeramente el caso base, o sea que la propiedad es cumplida por el primer elemento de un conjunto, usualmente el cero, y luego partiendo de la suposición de que un número n la verifica (hipótesis inductiva), se prueba que también la cumple su siguiente o sucesor (tesis inductiva). A esta etapa del proceso, se la denomina paso inductivo. De esta manera y a partir de los dos pasos anteriores, se afirma que todos los elementos del conjunto considerado a partir del primero, verifican la propiedad.

Se presenta a continuación un ejemplo en el que por no comprender el significado de la inducción completa, un estudiante de ingeniería no responde adecuadamente a las preguntas realizadas y no puede tampoco identificar cuál ha sido su error, a pesar de comprender que algo en su desarrollo ha sido inadecuado. La demostración del caso base en una demostración por inducción completa, suele ser sencilla y en muchas oportunidades, trivial. Los estudiantes, se concentran normalmente en la realización del paso inductivo, ya que es el que les puede traer mayores dificultades y por lo tanto a veces descuidan el caso base y su significado e importancia.

En una evaluación de estudiantes de segundo año de la carrera de ingeniería informática de la materia Matemática Discreta, en la que se aborda el tema de inducción completa, se presentó el siguiente enunciado:

Considere la proposición p(n):

"$n^2 + 5n + 1$ es par"

a) Demuestre que si p(n) es Verdadera, entonces p(n+1) es Verdadera para todo n perteneciente a N y extraiga conclusiones

b) ¿Para qué valores de n es p(n) efectivamente verdadera? ¿Qué puede concluir?

La idea del problema era determinar si los estudiantes comprendían que la verificación del paso no garantiza la veracidad de una proposición e incluso mostrar que aún si el paso inductivo puede demostrarse, la propiedad puede no ser válida para ningún caso.

Uno de los estudiantes presentó la siguiente resolución:

a)

Hi) Supongo que vale $n^2+5n+1 = 2k \to$ par.

Ti) Probemos que $(n+1)^2+5(n+1)+1 = 2h$

Dem) $(n+1)^2+5(n+1)+1 =$

$n^2+2n+1+5n+5+1 =$

$(n^2+5n+1)+2n+1+5 =$

$2k + 2n+6 =$

$2k + 2n+2.3 =$

$2(\underbrace{k+n+3}_{h}) = 2h.$

∴ Por el Principio de Inducción Completa: "n^2+5n+1 es par"

b) $P(1) \Rightarrow 1 + 5.1 + 1 = 7 \rightarrow$ no

$P(2) \Rightarrow 4 + 5.2 + 1 = 15 \rightarrow$ no

$P(3) \Rightarrow 9 + 5.3 + 1 = 25 \rightarrow$ no

$\vdots$

$P(10) \Rightarrow 100 + 5.10 + 1 = 151 \rightarrow$ no.

$\vdots$

$P(100) \Rightarrow 10000 + 5.100 + 1 = 10101 \rightarrow$ no.

Encontré números que no cumplen la propiedad pero el paso inductivo lo demostré (no encuentro cuál es el error de la demostración de la parte a).

El esquema de argumentación por inducción completa está validado matemáticamente. Este hecho hace que ante un error cometido se dificulte en los estudiantes la posibilidad de dar explicaciones que los ayuden a convencer a otros de que la argumentación es correcta. En esta respuesta, puede verse que el estudiante no tiene dificultades en la demostración del paso inductivo y a partir de él, afirma que la propiedad es verdadera. Sin embargo, al comenzar sus intentos de verificación de la propiedad para distintos casos, ve que no se cumple, saltea números y busca para otros números. Afirma en ese momento que encontró números para los que no se verifica la propiedad. El estudiante, sin embargo, no es capaz de identificar que el problema es que no ha verificado el caso base y que por lo tanto la demostración del paso inductivo no garantiza el cumplimiento de la propiedad para todos los números naturales, e incluso en este caso no se verifica para ningún número natural la propiedad. No se está aplicando correctamente la estrategia de demostración por inducción completa, el caso base es fundamental para garantizar el cumplimiento de la propiedad en un conjunto bien ordenado.

La no consideración exhaustiva de casos

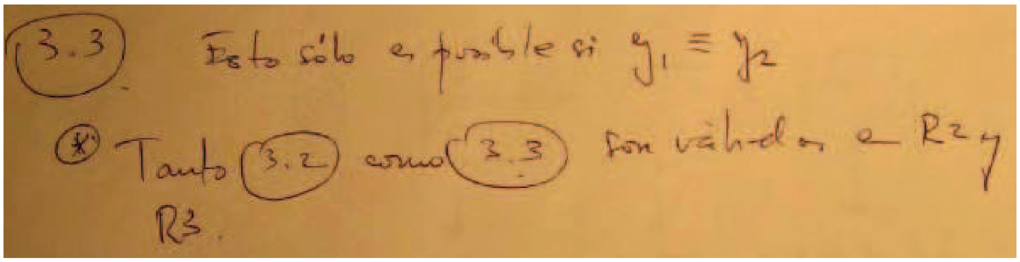
Se presenta un problema que se ha trabajado con estudiantes del ultimo año del profesorado de matemáticas; en las respuestas que dieron sobre el mismo, se evidencian dificultades de diferente naturaleza que presentan al momento de elaborar un discurso que muestre los procedimientos realizados y las respectivas explicaciones acerca de los mismos.

El problema es:

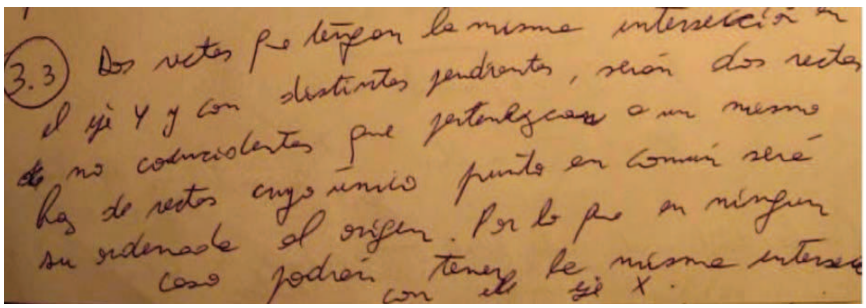
Resuelve el siguiente problema y justifica los procedimientos y conceptos utilizados

Si dos rectas tienen la misma intersección en el eje y, pero diferentes pendientes, ¿En qué casos se puede tener la misma intersección en el eje x? Explica.

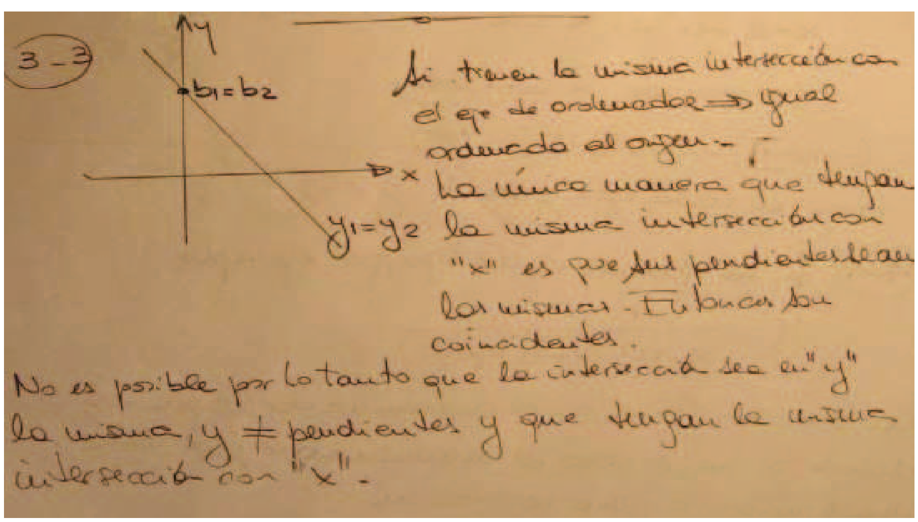
A continuación se presentan las respuestas dadas por cuatro estudiantes:



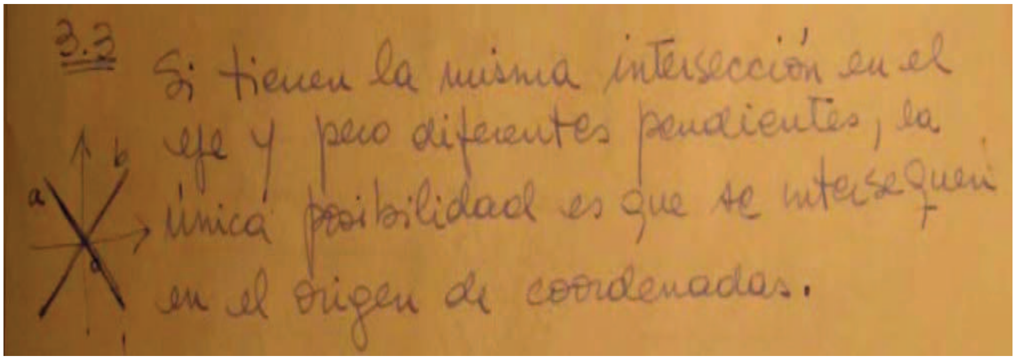
En este caso, el estudiante A no considera los datos del problema, ya que al ser coincidentes, no se cumple con la condición que las pendientes sean distintas.



El estudiante B, centra su respuesta en el haz de rectas que pasan por la ordenada al origen; sin considerar el caso en que la ordenada al origen sea a su vez la raíz de las rectas.



El estudiante C para resolver el problema se apoya en una figura de análisis que lo lleva a proponer una argumentación en contra de las condiciones del problema.



El estudiante D basa su explicación a partir del ejemplo gráfico y contemplando solo las rectas prototípicas de pendientes 1 y -1; sin considerar las otras rectas que pertenecen al mismo haz de recta, en el que los coeficientes pueden ser cualquier número real.

Conclusiones

Los ejemplos presentados muestran las dificultades que tienen los estudiantes al intentar elaborar un discurso para explicar y justificar las resoluciones que realizan en las clases de matemática.

Se requiere trabajar sistemáticamente, con la finalidad de que los alumnos sientan la necesidad de construir un discurso en el que se manifieste un proceso lógico encadenado sobre un objeto matemático específico sobre el cual se afirma algo.

Los docentes debemos reflexionar acerca de cómo y por qué construyen una opinión fundada a partir de datos presentes en una situación dada. Los errores no son sino manifestaciones de las maneras en que están comprendiendo los procesos y resultados a los que llegan y la evidencia que proponen no puede perderse en el salón de clase si pretende resignificarse el discurso matemático escolar.

Referencias bibliográficas

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379 - 1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castañeda, A. Rosas, A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en los libros de texto. *Premisa*, 12(44), 3-18

Crespo Crespo, C. (2005).El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. *La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Crespo Crespo, C. (2010). Los diálogos entre estudiantes en el aula de matemática. Su riqueza para el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23. (en prensa). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. En *Épsilon*, 26, 15-30.