

## HACIA UNA RESIGNIFICACIÓN DE LAS DESIGUALDADES E INECUACIONES A PARTIR DE LAS PRÁCTICAS DEL PROFESOR

Mariangela Borello, Javier Lezama Andalón  
CICATA del IPN  
mborello@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com

México

**Resumen.** En este trabajo estuvimos investigando, desde el enfoque socioepistemológico, cómo viven la desigualdad y la inecuación en el actual discurso matemático escolar para poder detectar cuáles elementos pueden jugar un papel importante para su resignificación. Intentamos sacar a la luz aquellas prácticas que norman el uso de la desigualdad y, por consecuencia, de la inecuación, a saber: la práctica de comparar y la práctica de acotar. Con base en estas prácticas, estuvimos luego examinando el papel que juegan desigualdad e inecuación en las matemáticas puras y aplicadas. En fin, pudimos percatarnos de la necesidad de llevar a cabo un rediseño del discurso matemático escolar que, a través de actividades basadas en las prácticas de comparar y de acotar, regrese la desigualdad a la escuela devolviéndole su significado y vuelva a darle su justo lugar a la inecuación.

**Palabras clave:** desigualdad, inecuación, socioepistemología, práctica, profesor.

**Abstract.** In this study we were investigating, with a socioepistemologic focus, how inequality lives in the current mathematical school discourse, in order to detect which elements can play an important role for its re-meaning. We tried to bring to light those practices that govern the use of inequality, namely: practice to compare and practice to delimit. Based on these practices, we were examining the role of inequality in pure and applied mathematics. Finally, we realized the need to carry out a redesign of school mathematical discourse that, through practical activities based on comparing and delimiting, inequality can return to school institution, restoring its meaning and its right place.

**Key words:** inequality, socioepistemology, practice, teacher

### Introducción

#### La desigualdad en el marco de la socioepistemología

El enfoque teórico de nuestra investigación se sitúa en aquella parte de la matemática educativa que se conoce como *socioepistemología*.

En lo particular, nos acercaremos a dicho enfoque a través de varios trabajos entre los cuales están los publicados por Cantoral y Farfán (2002 citado en Arrieta, 2003; 2003), a fin de colocar el acercamiento socioepistemológico en el ámbito del discurso de la matemática educativa.

En particular, cabe observar que nuestro marco considera necesario

el dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. (Cantoral y Farfán, 2003, p.36).

A esta aproximación múltiple se le ha dado el nombre de *acercamiento socioepistemológico*.

Podemos entonces afirmar que el acercamiento socioepistemológico centra su atención en todo lo que permite la construcción del conocimiento matemático, lo que se puede llevar a cabo considerando aquellas cuatro componentes fundamentales que en la construcción del conocimiento se articulan.

En el contexto de la visión socioepistemológica un factor que tiene una relevancia particular, es el concepto de práctica, palabra detrás de la que “se esconde” el tema del significado que rige lo que los individuos –dentro de los grupos sociales a los que le pertenecen– hacen.

Estaremos por lo tanto considerando dos tipos de prácticas: la práctica social y la práctica de referencia.

Definimos la práctica social como el conjunto de aquellas influencias socioculturales que rodean y orillan los fenómenos de construcción de conocimiento matemático y que constituyen el motor principal del acto constructivo más que de reorganización de la obra matemática, meta y objetivo de la matemática educativa. Se trata de aquellas acciones llevadas a cabo por grupos sociales que se ubican en un cierto contexto histórico determinado por la predominancia de unas ideologías. Dichos grupos pueden estar formados por científicos, matemáticos, investigadores en matemática educativa, profesores, alumnos e instituciones y/o sujetos que utilizan la matemática como herramienta para el desarrollo de otras actividades (Covián, 2005).

Por otro lado, las prácticas de referencia se definen como las actividades que habitualmente se hacen en una situación específica que, en nuestro caso, serán actividades de carácter matemático como, por ejemplo, la producción de teoremas, lemas, definiciones y/o la construcción de ciertas estrategias de resolución (Montiel, 2005).

### **Un pequeño estado del arte**

Desde una atenta revisión bibliográfica hemos identificado dos aspectos particularmente importantes:

1. En el ámbito de la Matemática Educativa, no hemos podido encontrar investigaciones acerca de las desigualdades y las que se ocupan de las inecuaciones son pocas.
2. Entre esas pocas, hemos podido observar que todas tienen un corte de tipo cognitivo y/o didáctico, es decir, buscan entender qué es lo que obstaculiza el correcto aprendizaje de las inecuaciones y qué es lo que lo podría facilitar para intentar llevarlo al aula a fin de mejorar los procesos de enseñanza y el aprendizaje de los alumnos.

La única excepción a todo esto está: en algunos planteamientos de Boero (1997, 1998) quien se pregunta acerca del origen y del fin de las técnicas que caracterizan el discurso de la escuela italiana acerca de las inecuaciones. En particular reconoce que un estudio de corte histórico acerca del origen de las inecuaciones en las matemáticas y en la enseñanza de las matemáticas, aportaría mucho a la investigación. Para ello Boero afirma la necesidad de salir de la matemática escolar para acercarse a la matemática de los matemáticos; en unas observaciones de corte epistemológico que llevan a cabo Boero y Bazzini (2004) en donde se observa la lejanía de la inecuación, así como actualmente se trabaja en el contexto escolar, respecto a su uso para los matemáticos profesionales. Sin embargo, dichas consideraciones sólo se utilizan como punto de partida para un estudio eminentemente cognitivo y didáctico.

Sin embargo, a pesar de la claridad con que se plantean las preguntas, la investigación regresa a un estudio de naturaleza eminentemente cognitiva y, en un segundo momento, didáctica.

Desde el punto de vista de nuestro marco teórico –la socioepistemología– pudimos aprovechar los análisis hechos por todos los investigadores que pudimos revisar, para poner en evidencia algunos aspectos alrededor de los cuales estuvimos desarrollando nuestra propia investigación. A saber:

#### Una técnica de resolución sin objeto de referencia

Todas las investigaciones que hemos podido examinar, hacen referencia exclusivamente a la inecuación, dejando totalmente a un lado el objeto matemático desigualdad.

De esta manera, las prácticas matemáticas que para su modelación necesitan una desigualdad, quedan totalmente en la sombra y el único objeto que aparece, es la inecuación: una técnica que permite expresar una desigualdad de una forma equivalente, pero más oportuna.

El discurso matemático escolar ha ido forjándose de tal manera que en él sólo se ha quedado la pura técnica de resolución (la inecuación) que sirve para resolver determinados problemas; pero nunca se hace énfasis en la naturaleza última de dichos problemas, lo que permitiría recuperar aquellas prácticas que en el fondo los constituyen y, al mismo tiempo, obligaría a poner de manifiesto el papel protagónico de la desigualdad.

La escuela con su discurso afirma que la inecuación –en cuanto técnica– es importante porque sirve para resolver problemas de dominio de funciones, pero: nunca pone de manifiesto que, al establecer el dominio de una función, se está manejando un problema de acotamiento en que se hace necesario manejar desigualdades; y no propicia que el estudiante reconozca la inecuación como un objeto matemático que modeliza situaciones en las que es necesario establecer cotas o comparaciones y, por lo tanto, establecer relaciones de desigualdad.

### Un objeto aislado en busca de compañía

La escuela, con su discurso, parece haber dejado a un lado aquellas prácticas que le otorgan un significado al objeto desigualdad y, por lo tanto, a la inecuación. Por esta razón la desigualdad ha dejado de tomarse en cuenta de forma explícita y el centro de atención se ha movido hacia la inecuación.

Sin embargo, la ausencia de la desigualdad no ha pasado desapercibida ya que la inecuación se ha reducido a una técnica “huérfana” y, por lo tanto ha ido buscando algún otro objeto con que pudiera “acompañarse”. De esta manera se ha ido estableciendo este vínculo “extraño” entre la inecuación y la ecuación: ambas son técnicas pero la fuerza que el discurso escolar ha conferido a la ecuación, le ha permitido alcanzar una grande relevancia, lo que ha propiciado que la inecuación viviera a su sombra.

### **Buscando resignificar la desigualdad**

Con base en nuestra investigación, hemos mostrado que en matemática se pueden detectar prácticas y construcciones conceptuales relacionadas con el comparar y el acotar, que constituyen objetos y herramientas matemáticas, cuales son las desigualdades y las inecuaciones, que permiten la constitución de otros objetos matemáticos. (Borello, 2010)

Sin embargo, con base en las pocas investigaciones de corte histórico que pudimos revisar (Bagni, 2005, 2008), podemos afirmar que, a lo largo de muchos siglos, no se percibió la necesidad de implementar técnicas para manipular expresiones que surgen del planteamiento de una desigualdad.

Así que podemos darnos cuenta que la desigualdad, junto con sus prácticas, siempre ha estado presente al seno de las matemáticas. Por lo contrario, de la inecuación así como hoy la conocemos, encontramos algunas huellas claras sólo a partir del siglo pasado.

Sin embargo, nuestras indagaciones muestran que la escuela ha enfatizado el papel de la inecuación, dejando a un lado la desigualdad y sus prácticas.

Nos hemos preguntado el por qué de dicha situación y para contestar esta pregunta, hemos ido considerando vario aspectos, a saber:

- la matemática: a través de un atento análisis de varios textos no escolares y de algunas entrevistas con profesionales de la matemática que desarrollan su labor en el ámbito de la investigación;
- el *curriculum* y los libros de texto: a través de un análisis de los currícula y de los textos en uso en las principales instituciones educativas de México.

- los profesores: a través de la aplicación de una secuencia de preguntas que los entrevistados tenían que resolver, comentar y comentar entre ellos.

A través de un excursus en la matemática, hemos podido conocer algo acerca de la epistemología de la desigualdad. Vimos cómo la desigualdad se considera un objeto importante ya que permite llevar a cabo ciertas prácticas –como lo son las actividades de comparar y de acotar– las que son instrumentos imprescindibles para hacer matemáticas: establecer propiedades y definiciones, demostrar teoremas, etc. En este contexto, la inecuación juega el papel de instrumento ya que se trata de una técnica que permite manipular desigualdades.

Desde el examen de los *curricula* y de algunos libros de texto pudimos ver algunos rasgos del discurso de la escuela que ha dejado a un lado aquellas prácticas de referencia, como lo son las prácticas de comparar y de acotar, que puedan otorgarle significado a los objetos matemáticos que se manipulan. Desde aquí, pudimos darnos cuenta de cómo la desigualdad haya quedado rezagada y de cómo, en su lugar, la inecuación –es decir, una técnica– haya tomado un papel protagónico.

Finalmente pudimos ver cómo lo que la escuela comunica a través del *curriculum* y de los libros de texto, ha ido influyendo en las actividades de los profesores, hasta determinar una nueva epistemología en la que se observa el predominio de las técnicas y la ausencia de elementos clave cuales son las prácticas de ordenamiento (comparar) y de acotamiento.

Con raíz en nuestros estudios, nos parece por lo tanto de poder afirmar que son dos los elementos que han propiciado el desplazamiento de la inecuación sobre la desigualdad.

A saber:

- En el siglo pasado se le dio un gran impulso a la matemática aplicada pues en aquellos años nacían la investigación de operaciones y la programación lineal. En estos contextos la desigualdad juega un papel muy importante a pesar de que, como nos recuerda Bagni (2008), en su quehacer, por lo general, los matemáticos expresaban los problemas por medio de ecuaciones por resolver y luego, por medio de desigualdades, fijaban las condiciones para las soluciones de dichas ecuaciones. Además, en la historia y en la práctica didáctica, muy frecuentemente se reconducía la resolución de una inecuación a la resolución de la ecuación asociada pues, en el contexto social y cultural, la “solución concreta” siempre había sido considerada como mucho más importante de un abstracto “campo de posibilidades” (Bagni, 2008).

Esta postura propició que muchos problemas de desigualdad que pertenecen al ámbito de las matemáticas aplicadas, se resuelvan como problemas de igualdad utilizando

ecuaciones, para, en un segundo momento interpretar su solución en el contexto de la desigualdad creando situaciones que podemos definir como “falsos problemas”.

- Desde aproximadamente la mitad del siglo XIX, el Cálculo y el Análisis Matemático empezaron a tomar la forma que hoy en día conocemos. Cauchy en los años ‘20 del siglo XIX publicó sus famosos tratados –*Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Le Calcul infinitésimal* (1823), *Leçons sur les applications de calcul infinitésimal. La géométrie* (1826–1828)– en los que fue sistematizando todos los grandes descubrimientos de sus predecesores alrededor de los conceptos de límites y de continuidad, utilizando un formalismo muy riguroso.

La desigualdad es un concepto imprescindible para trabajar la versión rigurosa de límite ya que se sitúa al nivel de la misma definición de dicho objeto matemático. Además, en este contexto se precisa poder operar con desigualdades y se hace por lo tanto necesario poseer técnicas que permitan resolver inecuaciones.

Siempre en el mismo contexto del cálculo, así como se fue estructurando en las prácticas didácticas, la inecuación resultó ser una herramienta imprescindible para la determinación del dominio de una función y del signo de una función (en particular acostumbramos determinar el signo de la función derivada para conocer la monotonía de la función primitiva).

En este contexto la escuela se ha ido preocupando de proveer a sus estudiantes las herramientas técnicas que algún día les habrían permitido acceder al estudio del Cálculo.

Esta elección se fue consolidando a lo largo de las décadas y, a pesar de las diferencias propias de las tradiciones americana y europea, podemos afirmar que el resultado ha sido el mismo: la inecuación ha quedado aislada, alejada de la desigualdad y reducida a unas cuantas técnicas operacionales a las que la escuela les da mucho o poco espacio en el *currículum*.

Sin embargo, esta situación ha propiciado que la inecuación se asocie impropiaamente a la ecuación. Un poco a causa de los “falsos problemas” que se proponen sin una reflexión adecuada, y un poco por el fenómeno del “fantasma de la ecuación” del que nos hablan Bazzini y Tsamir (2002). Es por ello que, muy frecuentemente, la inecuación se maneja como una técnica operacional que se manipula como aquel objeto formalmente parecido que es la ecuación. A este propósito resulta interesante observar cómo todo esto demuestre la falta de una reflexión seria acerca del papel que juegan los objetos matemáticos igualdad y desigualdad, lo que se deriva de la ausencia de prácticas que puedan otorgarles un sentido a dichos objetos.

Como hemos visto, la desigualdad ha perdido contenido desde el punto de vista epistemológico, porque aquellas prácticas que le dan sentido –acotación y comparación– han ido desapareciendo para deslizarse a lo que solamente es una técnica. De tal manera el contenido epistemológico propio del objeto desigualdad desaparece para dar lugar a otra epistemología que es la operacional, propia del objeto matemático inecuación. En esta nueva epistemología se evidencia una tendencia a prescindir de cualquier asunto de orden, que es lo que permite establecer una desigualdad sobre un conjunto.

Una consecuencia de esta situación que ha ido afectando considerablemente la posibilidad que los estudiantes aprendan a resolver correctamente las inecuaciones (estamos hablando del plano de lo cognitivo), consiste en el consolidarse de una tradición que ve la inecuación como una “hermana” de la ecuación: un objeto parecido a la ecuación que se resuelve “casi” de la misma manera.

De tal manera, todos los elementos que hemos estado paulatinamente investigando nos indican los elementos clave para poder pensar en una resignificación de los objetos matemáticos desigualdad e inecuación.

Antes que nada será necesario devolverle a la inecuación su relación con la desigualdad y a la desigualdad las prácticas que le confieren el estatus de objeto necesario al seno de las matemáticas.

Por supuesto, lo que estamos proponiendo no es algo banal ya que pide llevar al aula dichas prácticas. Se tratará por lo tanto de ir construyendo actividades que permitan al estudiante manejar situaciones de desigualdad las que, a su vez, necesitarán de herramientas aptas al manejo de dichas desigualdades, es decir, las inecuaciones.

Este trabajo –que constituirá la próxima etapa de nuestra investigación– pide una seria reflexión acerca del *currículum* tanto de álgebra como de cálculo. Esto porque será necesario ver a cuáles actividades en el ámbito del cálculo subyace una situación de desigualdad que necesita del uso de la inecuación y buscar aquellas prácticas que le otorgan un significado. Sucesivamente se podrá finalmente regresar al álgebra donde se deberá de llevar a cabo el proceso de resignificación de la inecuación y de la desigualdad.

Todo esto nos obligará a romper con aquel elemento propio del discurso matemático escolar que acostumbra reducir todo al aspecto técnico dejando a un lado las prácticas que dichas técnicas han producido.

Este trabajo deberá de desarrollarse considerando la dialéctica que inevitablemente se produce entre inecuación y ecuación, para llevarla al plano de la igualdad y de la desigualdad.

De esta manera los alumnos manejarán al mismo tiempo situaciones de igualdad y de desigualdad e irán construyendo modelos diferentes para que puedan ser ellos mismos a darse cuenta de necesitar diferentes técnicas para resolverlos.

### Referencias bibliográficas

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV, México, D.F., México.
- Bagni, G.T. (2005). Equazioni e disequazioni. Riferimenti storici e proprietà internazionali. En *La matematica e la sua didattica*, 3, 285-296.
- Bagni, G.T. (2008). Equazioni e disequazioni dalla storia alla didattica della matematica. En Bazzini, L. (Ed.), *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra*, VI, (SFIDA 21, 22, 23, 24, 25) (pp. 53-64). Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino, Torino, Italia.
- Bazzini, L. y Tsamir, P. (2002). Teaching implications deriving from a comparative study on the instruction of algebraic inequalities. En *Proceedings of CIEAEM* 54. Vilanova y la Gertrúe, España.
- Boero, P. (1997). Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifs. En J. Philippe y M. Laurel (Eds.), *Actes de Séminaires-SFIDA X* (pp. 3-7). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.
- Boero, P. (1998). Inéquations: pour une recherche pluridisciplinaire. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Séminaires-SFIDA XI* (pp. 47-51). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.
- Boero, P. y Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. En *Proceedings of PME28*. (Vol. I). (pp. 139-143). Bergen, Noriega.
- Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Cicata, IPN, México, D.F., México.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6 (1), 27-40.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV, México, D.F., México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN, México, D.F., México.