METÁFORAS Y ONTOSEMIÓTICA. EL CASO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES EN EL DISCURSO ESCOLAR

Vicenç Font, Jorge I. Acevedo, Marina Castells, Janete Bolite
Universitat de Barcelona — España
UNIBAN — Brasil
vfont@ub.edu
Campo de investigación: Gráficas y Funciones — Nivel: Superior

Resumen. *En la investigación que presentamos hemos intentado responder primero a las cinco preguntas siguientes: 1) ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones? 2) ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato? 3) ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas? 4) ¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos? 5) ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados? A continuación abordamos una reflexión teórica cuyo objetivo es situar la metáfora con relación a las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico.*

Palabras clave: Metáforas, gráficas, funciones, discurso.

Relevancia del problema de investigación

En Sriraman y English (2005) se hace un estudio global sobre las diferentes agendas de investigación en Educación Matemática. En este trabajo se considera que una de las principales cuestiones a considerar es la reciente aparición en el área de la “Embodied Cognition” y proponen como pregunta de investigación la siguiente cuestión: ¿Cuáles son las implicaciones de este punto de vista para la investigación en educación matemática y para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

La cuestión que proponen investigar Sriraman y English (2005) está tomada del forum sobre investigación del PME del 2005 de Melbourne, lo cual no resulta sorprendente, sobre todo si tenemos en cuenta que, con alguna variante, esta pregunta ha sido uno de los temas debatidos en muchos de los congresos que recientemente se han celebrado en nuestra área de investigación. Por ejemplo, en la CIEAEM 54 (celebrada en España, en julio de 2002) se plantearon, entre otras, las siguientes preguntas: 1) Si los conceptos abstractos son metafóricos, ¿cuáles son las metáforas usadas en la producción, sistematización y comunicación del pensamiento matemático? 2) Las nuevas tecnologías permiten la posibilidad de nuevas y diferentes experiencias. ¿Pueden éstas ayudar al desarrollo de poderosas metáforas que faciliten la construcción, organización y comunicación del pensamiento matemático?

Desde que Lakoff y Johnson pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido (Lakoff y Johnson, 1991), el papel del pensamiento metafórico en la formación de los conceptos matemáticos es un tema que cada vez tiene más relevancia para la investigación en didáctica de las matemáticas (Presmeg, 1992; English 1997; Lakoff y Núñez, 2000; Font y Acevedo, 2003; Bolite, Acevedo y Font, 2005, entre otros).

Objetivos y preguntas del proyecto de investigación

Esta investigación se enmarca en la pregunta de investigación que proponen Sriraman y English (2005) pero restringida a un cierto tipo de objeto matemático: las funciones, y, más en concreto, su representación gráfica. La investigación que presentamos tiene como *primer objetivo* intentar responder a las cinco preguntas siguientes: 1) ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones? 2) ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato? 3) ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas? 4) ¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos? 5) ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados?

La investigación en didáctica de las matemáticas ha permitido resaltar, por una parte, la importancia que tienen las metáforas en el proceso de instrucción y, por otra, han puesto de manifiesto que cualquier reflexión sobre las metáforas tiene que tener presente la gran complejidad de factores relacionados con ellas. Por tanto, si por una parte es cierto que estamos interesados de entrada en la metáfora, también es cierto que somos plenamente conscientes de que dicha reflexión obliga a considerar conjuntamente, como mínimo, cuatro de los aspectos más característicos de la actividad matemática y de la emergencia de sus objetos: la dualidad extensivo-intensivo (particular-general), la representación, la metáfora y la contextualización-descontextualización, los cuales son, en nuestra opinión, *instrumentos de conocimiento* que comparten un mismo aire de familia (en el sentido de que, de alguna manera, hacen intervenir la relación *A* es *B*).

Partimos de la hipótesis de que muchas de las dificultades observadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con el hecho de que los objetos matemáticos institucionales presentan una complejidad de naturaleza intrínsecamente matemática, la cual está íntimamente relacionada con esta "familia de instrumentos de conocimiento". También partimos de la hipótesis de que dicha complejidad se puede describir en términos "ontosemióticos". Es decir, en términos de las entidades intervinientes y de las relaciones que se establecen entre ellas. Por tanto, y de acuerdo con este punto de vista, en esta investigación se pretende como *segundo objetivo* afrontar la complejidad que la investigación sobre las metáforas requiere mediante los constructos elaborados por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007).

De acuerdo con este segundo objetivo nos formulamos las siguientes preguntas (utilizando como contexto de reflexión las gráficas de las funciones): 6) ¿Cómo se relaciona la metáfora con las cinco dimensiones duales contempladas en el Enfoque Ontosemiótico. 7) ¿Cómo se relaciona la metáfora con los elementos constituyentes de los constructos Configuraciones Epistémicas/Cognitivas propuestos en dicho enfoque?

Si el primer objetivo nos lleva a considerar como primer marco teórico de referencia la "Embodied Cognition" de Lakoff y Núñez, el segundo nos lleva a considerar como segundo marco teórico de referencia el Enfoque Ontosemiótico.

Metodología

Las preguntas que nos hemos formulado en esta investigación se puedan clasificar en dos grupos: teóricas y empíricas. Para responder a las preguntas teóricas la metodología consistió, básicamente, en un análisis de fuentes documentales de tipo epistemológico, histórico, cognitivo, semiótico y didáctico, adoptando una posición propia sobre las diferentes fuentes. La metodología para responder a las preguntas de tipo "empírico" ha sido de tipo interpretativo y cualitativo. Los sujetos investigados han sido profesores de bachillerato del Estado español y algunos de sus alumnos. Se trata, por tanto, de un estudio de casos.

Los profesores participantes lo hicieron de manera voluntaria y consintieron de forma consciente la intromisión en sus tareas docentes (observación de sus clases, grabación en vídeo, análisis de materiales de trabajo, etc.). Los alumnos participaron a petición de su profesor. La elección de los profesores y de los alumnos que fueron grabados en vídeo no se realizó bajo ningún criterio estadístico, simplemente se tuvo en cuenta su disponibilidad a colaborar y a ser grabados.

Se realizaron tres tipos de grabaciones de video: 1) grabaciones en video de las clases de los profesores, 2) grabaciones en video de entrevistas a profesores y 3) grabaciones en video de entrevistas a alumnos. También se realizó una triangulación de datos y una triangulación de expertos.

Respuesta a la segunda pregunta de investigación

Por cuestiones de espacio en este trabajo nos limitaremos a responder, de manera parcial, a la segunda pregunta de investigación: ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato? Las metáforas observadas se pueden agrupar en las siguientes categorías: 1) Metáforas fosilizada, 2)

Metáforas orientacionales, 3) Metáforas ontológicas (contenedor, parte- todo y objetual), 4) Metáforas dinámicas. Movimiento ficticio, 5) Fusiones conceptuales (p.e. las antropomórficas o zoomórficas) y 6) Otras. A continuación, por cuestiones de espacio, comentaremos brevemente las metáforas fosilizadas, las orientacionales y las dinámicas.

Metáforas fosilizadas

Se trata de expresiones metafóricas que se corresponden con metáforas fosilizadas, en el sentido de que la institución matemática las considera como expresiones literales y no suele ser consciente de su origen metafórico. Es más, dichas expresiones no tiene expresiones alternativas si no se quiere utilizar un lenguaje "impreciso". Este origen metafórico se puede observar en la simbología utilizada (por ejemplo la flecha del símbolo de límite) y en la lectura de dicha simbología (por ejemplo, límite de $f(x)$ cuando x tiene a más infinito). Expresiones como, *"x tiende", "límite lateral por la izquierda", etc.* son consideradas literales, no obstante tienen origen metafórico.

Metáforas orientacionales

El uso de metáforas orientacionales se observa, por ejemplo, cuando el profesor utiliza el término "horizontal" en lugar de utilizar la expresión "paralela al eje de abscisas", "eje horizontal" en lugar de "eje de abscisas" y el término "eje vertical" en lugar de "eje de ordenadas".

Profesor: … en $x = 0$ presenta un mínimo y la derivada en $x = 0$ es 0, como cabía esperar, porque ahora esta tangente es horizontal,…….[Mientras dice esto, El profesor hace el gesto de poner la mano indicando la posición horizontal de la recta tangente en la gráfica de la pizarra]

La metáfora conceptual “paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical” utilizada por el profesor es una metáfora de tipo grounding[6] cuyo dominio de partida es el esquema de imagen “orientacional”.

En términos generales, se observa que el profesor explica a sus alumnos la representación gráfica de funciones mediante diferentes expresiones metafóricas que son casos individuales de la siguiente metáfora conceptual:

Metáfora orientacional:

“Paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical”

Dominio de partida **Esquema orientacional**	Dominio de llegada **Gráficas de funciones**
Punto de corte de los ejes vertical y horizontal	Origen de coordenadas
Eje Horizontal	Eje x
Eje Vertical	Eje y
Recta Horizontal	Paralela al eje x
Recta Vertical	Paralela al eje y
Arriba	Valores de $y > 0$
Subir	Función creciente
Abajo	Valores de $y < 0$
Bajar	Función decreciente
Derecha	Valores de $x > 0$
Izquierda	Valores de $x > 0$
Algo está a la izquierda de otra cosa que está a su derecha	$x_1 < x_2$
Algo está más abajo de otra cosa que está más arriba	$y_1 < y_2$

Tabla 1. Proyección metafórica del esquema orientacional

[6] En Lakoff y Núñez (2000) se distinguen dos tipos de metáforas conceptuales: 1) “Conectadas a tierra” (grounding): Son las que relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas. Por ejemplo: “Las clases son contenedores”, “los puntos son objetos”, “una función es una máquina”, etc. Estas metáforas sirven para organizar un dominio de llegada matemático (por ejemplo las clases) a partir de lo que sabemos sobre un dominio de partida que está fuera de ellas (lo que sabemos sobre los contenedores) y 2) De enlace (linking): Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, “los números reales son los puntos de una recta”, las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas”, etc. Las metáforas de enlace proyectan un campo de conocimientos matemáticos sobre otro distinto.

Metáforas dinámicas. Movimiento ficticio

El uso de metáforas que facilitan que los alumnos entiendan que "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino" se observa en párrafos como el siguiente:

Profesor:…. Si antes del cero es creciente, si después de cero es creciente, si antes del cero y después del cero es creciente tenemos un punto de inflexión. Si antes del cero es creciente y después del cero es decreciente, un máximo. Si antes del cero es decreciente y después de cero es creciente, un mínimo. [Acompaña este comentario con gestos sobre las gráficas dibujadas en la pizarra].

La metáfora "La gráfica es un camino" es una metáfora de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen "camino". Este esquema de imagen, en nuestra opinión es subsidiario del esquema orientacional egocéntrico. Se puede ilustrar por la figura siguiente:

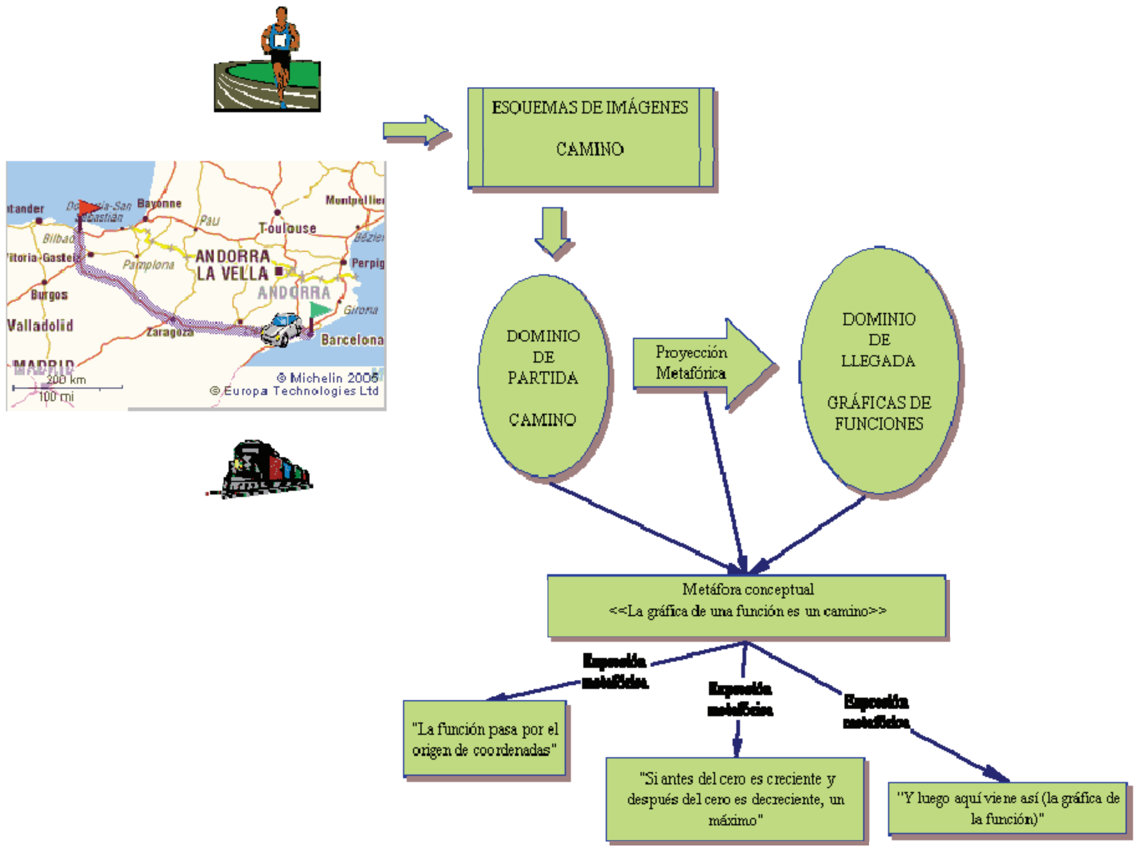

Figura 1. Proyección metafórica del esquema "camino"

Metáfora dinámica: "La gráfica es un camino"

Dominio de partida **Esquema del camino**	Dominio de llegada **Gráficas de funciones**
Camino	Gráfica
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen de la gráfica (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Tabla 2. Proyección metafórica del esquema camino

Una variante de esta metáfora conceptual es "La gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones". La diferencia con la anterior es que, en este caso, el camino no está dado previamente, sino que es la traza que resulta del movimiento del punto. Esta última se pone en funcionamiento cuando se traza la gráfica de una función, mientras que en la primera la gráfica ya está dada previamente.

Consideraciones finales

En esta investigación hemos aportado, por una parte, datos empíricos que permiten un mejor conocimiento del uso de las metáforas en el proceso de instrucción de las gráficas de funciones en el bachillerato y su efecto en la comprensión de los alumnos. Por otra parte, hemos contribuido al desarrollo de la teoría sobre las metáforas, gracias a la visión ontológica semiótica que sobre ellas permite el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. También hemos contribuido al desarrollo del Enfoque Ontosemiótico ya que nuestra investigación permite el "encaje" de la metáfora en el actual desarrollo de dicho enfoque.

Referencias bibliográficas

Bolite Frant, J., Acevedo, J. y Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41-54.

English, L.D. (ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, N. J.: Erlbaum.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21, 3, 405-418.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 23 (6), 595-610.

Sriraman, B. y English, L. D. (2005) Theories of Mathematics Education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)* 37(6), 450-456.