INTUICIÓN Y RAZÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". Buenos Aires — Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN — México
crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento lógico, Socioepistemología — Nivel: Superior

Resumen. *La construcción del conocimiento matemático se lleva sobre la base de dos modos de comprensión y expresión: la intuición y la razón. Ambos, aunque poseen naturaleza distinta, se complementan y resultan indispensables en la matemática y su enseñanza, combinándose en el proceso mediante el cual se describen los objetos matemáticos, sus relaciones y la manera en la que es posible operar o interactuar con ellos. La intuición por sí sola no da certeza para comprobar las afirmaciones matemáticas; la razón actúa controlando a la intuición espontánea. Si bien la intuición también juega un papel esencial en los razonamientos, es importante que los estudiantes comprendan que en algunas oportunidades puede distorsionar representaciones y conducir a errores. La fertilidad de la intuición depende de su refinamiento y relación con la razón y la experiencia.*

Palabras clave: intuición, socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural

Intuición y lógica en el aula

El conocimiento matemático se construye y se sustenta básicamente en dos modos de comprensión y expresión: la intuición y la razón. Estos modos de conocimiento, aunque de naturaleza distinta, son complementarios e indispensables en la matemática. El primero es creativo, subjetivo y directo, el segundo es analítico, objetivo y reflexivo. En la enseñanza de la matemática no se debe descartar ninguna forma de razonamiento: inductivo o deductivo. No se puede, ni se debe pretender, sin embargo, que los alumnos, sobre todo en los primeros niveles de la enseñanza, se muevan dentro de un marco axiomático riguroso y formal. Sin embargo, ya desde edades tempranas, es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, aunque sin exigencia de formalización. En ciertos niveles y momentos del aprendizaje, la forma de razonar puede tener tanto interés como los propios contenidos conceptuales.

La intuición, entendida como la captación primera de conceptos que permite comprender lo que nos rodea, surge desde la niñez y constituye el punto de partida en la investigación y el aprendizaje. Ante un problema matemático, debe despertarse el interés, basado en la aceptación de la incertidumbre inicial como parte del proceso de aprendizaje. La intuición, por momentos saltea escalones del razonamiento lógico. Es cierto que puede conducirnos por caminos falsos, por ello es necesario extremar el cuidado, pero debe aprovecharse la intuición para ayudar al aprendizaje. Debemos recordar que en los niveles básico y medio, no se están formando matemáticos, se está enseñando a usar la matemática y educando en la comprensión y el manejo del método de esta ciencia. Se está enseñando a pensar lógicamente. Hace falta educar a la intuición y al razonamiento (Crespo Crespo, 2005).

El término intuición ha sido utilizado a través de la historia de la humanidad con diversos significados y en diversos contextos. La *intuición sensible* ha sido caracterizada como una facultad prerracional; la *intuición pura o mística* se refirió a una aptitud suprarracional; la *intuición intelectual*, a una variedad de la razón. Para distintos filósofos, la intuición ha constituido una facultad mental que caracteriza un modo de razonamiento autónomo. Para los científicos, el conocimiento adquirido por medio de la intuición, ha sido considerado parcial e inexacto y debe ser sometido a posterior validación. Pero en ambos casos, la intuición es comprendida como una fuente de progreso que debe ser sometida a prueba. El tipo de prueba necesaria, depende de las características de la ciencia correspondiente.

La intuición en la historia de la matemática

Aristóteles sienta las bases de la utilización de la intuición en la ciencia, al afirmar que toda ciencia tiene punto de partida en ideas y verdades absolutas, evidentes e indiscutibles, posteriormente se llega a nuevas verdades por medio de la razón. La intuición es, entonces, la fuente primaria del conocimiento. Los postulados y nociones comunes, muestran su evidencia por medio de la intuición.

René Descartes entiende a la intuición como la *"concepción de un espíritu atento, tan claro y distinto que no se le quede duda alguna acerca de lo que entiende, o lo que es lo mismo, la concepción de un espíritu sano y atento, una concepción nacida a la luz de la sola razón y que es tanto más cierta cuanto más simple que la deducción misma"* (Descartes, citado por Bunge, 1965, 11). Sin embargo, para Descartes, el único modo de alcanzar el conocimiento es por medio de la intuición evidente y la demostración. La intuición es, como para Aristóteles, una operación racional. Descartes hizo explícito lo que se aceptaba implícitamente de cada actividad de razonamiento: que cada uno tiende a aceptar algunos argumentos como esencialmente ciertos mediante un criterio tácito de autoevidencia.

Por su parte, Baruch Spinoza, identifica como intuición, cierto tipo de inferencia rápida que puede hacerse mentalmente que identifica como conocimiento intuitivo y que generalmente se realiza con el auxilio de signos que representan los conceptos más complicados. Ni él, ni Gottfried Leibniz reconocieron que este tipo de conocimiento fuera suficiente para establecer nuevos principios de las ciencias.

Immanuel Kant, reconoce, además de la intuición sensible y el entendimiento, la intuición pura. La intuición sensible, está puesta de manifiesto a través de dos formas puras: espacio y tiempo, que actúan de principios de conocimiento a priori. La intuición pura, fuente de juicios sintéticos a priori presentes en geometría y aritmética, es una mezcla de razón y conciencia de la experiencia interna. El intuicionismo matemático se basa en ideas kantianas. El tiempo, como forma a priori de la intuición y, sostiene que los conceptos matemáticos son esencialmente construibles, entendiendo por construibles que exista un mecanismo finito para obtenerlos. Sólo acepta parte de la matemática clásica, descartando aquellos conceptos que no poseen esta propiedad. La única estrategia de demostración de existencia admisible es la construcción efectiva. Estas ideas fueron sustentadas por Leopold Krönecker y Henri Poincaré. Por su parte, Hermann Weyl sostuvo que afirmar la posibilidad de una construcción no significaba una prueba de la misma, ya que tal construcción podía ser irrealizable. De esta manera, por su parte, Luitzen Brouwer sostuvo que un teorema no expresa una verdad, sino el éxito de una construcción sistemática.

Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, al referirse a la intuición, afirman que sirve de guía en las demostraciones indicando cuál es el camino a seguir para alcanzar el rigor, pero sostienen que la intuición por sí misma es insuficiente y conduce a conclusiones erróneas (Rey Pastor & Puig Adam, 1948).

El ideal de la matemática actual ha sido la creación de una disciplina en la que los conceptos se relacionan de manera coherente a través de reglas formales explícitas. Entre las propiedades deseables para este sistema, podemos citar la certidumbre, coherencia, consistencia, independencia y necesidad. La intuición aporta bases evidentes, pero cabe preguntarse si todo conocimiento se construye sobre evidencias.

La intuición y evidencia

La intuición es subjetiva, depende de a qué esté habituado cada uno, el tipo de intuición que posee. La evidencia depende asimismo de la práctica y la familiaridad que se tenga con ciertos objetos y procesos. Por ejemplo, la transitividad en las relaciones de equivalencia era considerada por Descartes una intuición, pero para Piaget era adquirida por medio de la organización lógica del pensamiento. Piaget utiliza los términos intuición y pensamiento intuitivo frecuentemente, pero no profundiza en el entendimiento del mecanismo intuitivo.

Un ejemplo en el que se evidencian los obstáculos a los que puede conducir la intuición en la enseñanza se relaciona con el aprendizaje del concepto de infinito. Desde tiempos remotos, se asumió una de las nociones comunes enunciadas por Euclides: *"El todo es mayor que las partes".* Se trata indudablemente de un enunciado de fuerte contenido intuitivo, parece evidente lo afirmado. Sin embargo, Galileo identificó la existencia de una biyección entre los números naturales y sus cuadrados; se trata de un ejemplo en el que el todo tiene la misma cantidad que una de sus partes. Este problema se presentó al querer extender propiedades de conjuntos finitos a conjuntos infinitos, desde el punto de vista didáctico, se pone en evidencia un obstáculo epistemológico en el que la naturaleza de los conceptos involucrados es radicalmente distinta y la intuición no puede dar una respuesta.

En el siglo XX, a partir de los trabajos de David Hilbert, la evidencia no fue considerada necesaria para sentar los puntos de partida de la matemática. La intuición se tornó entonces un papel más secundario en la matemática.

No significa que la intuición sea necesariamente insegura o perjudicial, combina la experiencia, ofrece representaciones globales compactas de datos, ayuda a inferir de informaciones incompletas y confiere a la actividad mental posibilidad de continuidad y tiene gran importancia en el aula. No debe confundirse intuición con percepción. Una intuición excede lo que se percibe, va más allá de la información que se presenta de manera directa. La percepción no requiere intuición, pero de la percepción de casos, puede realizarse una generalización de una propiedad que sea aceptada por medio de la intuición. Por ejemplo, luego de percibir que varios cuerpos que se sueltan caen hacia abajo, puede enunciarse que "*Todo cuerpo que se suelte cae*" y esta generalización que es en realidad una inducción se realiza mediante la intuición.

Concepciones de la intuición

En la literatura contemporánea, existen diversas identificaciones de usos y apariciones de la intuición que la amplitud de fenómenos y actividades que se vinculan con la intuición.

a) *Identificación rápida de una cosa o acontecimiento:* Se refiere a la intuición sensible que unida a la percepción, memoria, experiencia e información del sujeto permite aprehender el objeto de manera rápida. Tiene un papel importante en el trabajo del científico, pero el conocimiento científico no consiste sólo en la percepción, sino en la elaboración. Por ejemplo, puede mencionarse la afirmación: "*La recta es la línea más corta entre dos puntos*". Se trata de una intuición sensible basada en percepción y experiencia, que permite concluir en esta aseveración, que es verdadera en la geometría euclidiana.

b) *Comprensión del significado de un conjunto de signos:* Se evidencia en la comprensión rápida de relaciones, como por ejemplo en cadenas deductivas, aunque escapen detalles y pasos. Depende de la experiencia previa y de la familiaridad con las estructuras correspondientes. Se relaciona con lo obvio. Un ejemplo de esta actividad de la intuición lo constituye la unicidad del cero. Este resultado resulta evidente y parece no necesitar prueba para los estudiantes del primer curso de álgebra.

c) *Capacidad de interpretación:* Se refiere no sólo a la asociación de fórmulas con sus significados, sino también a relacionar asuntos aparentemente inconexos. Por ejemplo, la potenciación se define inicialmente para bases y exponentes naturales no nulos. Posteriormente se extiende esta operación a diversos tipos de exponentes, como si la intuición fuera capaz de realizar esa extensión. Este proceso, debe ser comprendido lejos de la intuición y asumiendo que se trata de una convención de la comunidad matemática (Martínez, 2005).

d) *Capacidad de representación o intuición geométrica:* Se refiere a representar o imaginar objetos ausentes, de construir, imágenes o diagramas. La intuición geométrica espacial es importante en la enseñanza. La matemática se apoya en la intuición visual y geométrica, apoya su razonamiento en ellas, pero no puede ser reemplazada por ellas. Por ejemplo, podemos pensar en el concepto de punto como una “mancha” tan pequeña como se quiera. Esto nos lleva a tener un significado intuitivo y subjetivo que se corresponde con la representación que se realiza de un punto, pudiendo incluso manipular estos objetos y trabajar con ellos.

e) *Capacidad de forjar metáforas o habilidad para señalar identidades parciales entre objetos en distintos aspectos:* Se refiere a reconocer analogías, como por ejemplo entre la disyunción y la suma booleana. La metáfora es un recurso didáctico que ilustra.

f) *Imaginación creadora:* Permite inventar, generar nuevas ideas. Este proceso, generalmente es borrado al final de la teoría. No se presentan en ese momento las conjeturas previas al resultado obtenido. La imaginación creadora no puede existir si no se sustenta en conocimientos previos en los que ya actuó la razón. En oportunidades se hace referencia a la intuición como “corazonada científica”.

g) *Sentido común:* Se limita a etapas pasadas del conocimiento científico. Son numerosos los ejemplos en los que el sentido común engaña y permite llegar a resultados incorrectos. El sentido común no es estático, evoluciona enriqueciéndose con el estudio de la ciencia. La propiedad transitiva de la relación de igualdad, parece ser una revelación del sentido común, si bien Piaget opinó que no era innata, sino construida.

Estos ejemplos de la intuición muestran que es usual referirse como intuición a habilidades y usos muy diversos, lo que dificulta lograr una definición de la misma. “*La intuición es el cajón de sastre donde colocamos todos los mecanismos intelectuales que no sabemos analizar o nombrar con precisión, o no tenemos interés de hacerlo*” (Bunge, 1965, 88).

La intuición en el avance de las ciencias

Muchos matemáticos han sostenido y sostienen el rol fundamental de la intuición en el avance del razonamiento en esta ciencia, enfatizando que la validez de las afirmaciones matemáticas se sustenta en la evidencia y la intuición. La intuición no es una fuerza primaria de verdadera cognición, pero parece serlo porque ese es justamente el rol que desempeña: crear cierta apariencia de certidumbre (Fishbein, 1987). Entre esos ejemplos de matemáticos en los que la intuición jugó un papel primordial (Hadamard, 1947), podemos citar a Pierre Fermat, con el enunciado del teorema que tardó más de tres siglos en lograr ser demostrado. Otro ejemplo es Bertrand Riemann, que modificó la concepción de la distribución de los números primos, trabajó con funciones de imágenes reales y complejas, enunciando propiedades de las mismas sin demostración hasta nuestros días.

El progreso de las ciencias se ha apoyado en refinar, justificar y eliminar los elementos intuitivos que figuran en el desarrollo de las teorías previamente a su formalización. Como ejemplo, el surgimiento y formalización del análisis matemático, en cuyo nacimiento las ideas se sustentaron en la geometría y la visualización, puestas de manifiesto en el tratamiento de curvas y movimientos. En sus etapas posteriores, caracterizadas por la aritmetización, estos elementos se fueron abandonando hasta llegar a la estructura formal con la que hoy es presentada en las aulas de los cursos universitarios.

Cuando la intuición necesita de la razón

Existen ejemplos en los que la intuición lleva a dar respuestas incorrectas en nuestras aulas.

- √ Supongamos que a alguien le decimos que $a_1=1$, $a_2=1/2$, $a_3=1/4$, $a_4=1/8$ y le preguntamos cuánto valdrá la suma de los a_n, la mayoría asumirá que se trata de la sucesión $1/2^n$, y responderá que el resultado es 2. La intuición nos lleva a inferir cuál es la sucesión, por analogía a otras sucesiones vistas previamente.

√ Los estudiantes tienden a afirmar: "*El producto de dos números es mayor que cada uno de los factores*". Sin embargo al multiplicar 0,25x0,5 obtienen 0,125. Esta generalización proviene de extender propiedades de números naturales.

√ "*La división achica, la multiplicación agranda*". Como en el caso anterior, la intuición generaliza a partir de las propiedades de los números naturales.

√ Si pensamos que hay tanto números en el (0,1) como números reales, indudablemente la intuición nos llevará a afirmar que no es cierto. Pero George Cantor dio herramientas necesarias para comprobar la verdad de esta propiedad a pesar de que muestre que el todo puede tener el mismo cardinal que una de sus partes propias.

√ También parece intuitivo, al menos inicialmente, el significado del cero, sin embargo, se trata de un objeto matemático cuya construcción involucra concepciones filosóficas, epistemológicas y cognitivas muy complejas.

Estos son ejemplos en los que la intuición juega una mala pasada, produciéndose un conflicto entre lo que se responde intuitivamente y lo que la matemática muestra. Algunos estudiantes ante estos hechos, afirman que la matemática es difícil, contradictoria, y pueden perder su interés por ella al pensar que no podrán superar estos obstáculos.

La socioepistemología ante la razón y la intuición

En una visión socioepistemológica, podríamos pensar que la comunidad científica matemática, como sociedad, tiene entre sus atribuciones cuidar las formas de validación del conocimiento de esta ciencia, determinando su legitimidad para esa sociedad. La ***actividad humana*** correspondiente sería hacer matemática (investigar y enseñarla), su ***práctica de referencia***, la validación de resultados. Consideraramos, a la demostración como una ***práctica social*** de la comunidad matemática que se lleva a cabo para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. La demostración es, entonces, una práctica social característica de la comunidad matemática (Crespo Crespo, 2007). Esta práctica social, es distinta de una comunidad a otra, se ha modificado y evolucionado de una cultura a otra; la normativa no es la misma para distintas comunidades matemáticas. Esto es claramente comprensible desde la socioepistemología, ya que en cada ***escenario sociocultural***, refleja las características de éste, pero su finalidad básica ha sido la legitimación del saber matemático, aunque no es esta su única función. Sabemos en el ejercicio de prácticas sociales, los actores construyen sus conocimientos como ***herramienta*** para su intervención. Esa herramienta sería el lenguaje lógico. Pero, ¿cuál es el conocimiento matemático que se construye por medio de esta práctica social? En las actividades humanas de investigar y enseñar matemática, en la práctica social de demostrar, ¿qué hace que se demuestre como se demuestra? Es la argumentación, la que se construye en el escenario sociocultural y que se manifiesta en la práctica social de la demostración. La argumentación matemática, se refleja en la práctica social de la demostración. La presencia de comunidades matemáticas en escenarios distintos, hace comprender la existencia de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación. Esto también permite comprender la posibilidad de aceptar como válidas unas y no otras según características básicas de los escenarios en los que ocurren.

La intuición por sí sola no da certeza para comprobar afirmaciones matemáticas. La caracterizan dos propiedades fundamentales: inmediatez y certidumbre. La primera se une a la evidencia intrínseca y la segunda no se relaciona con la certidumbre como forma convencional, sino como un significado práctico de la misma (Fischbein, 1987). La razón actúa controlando a la intuición espontánea. La intuición también juega un papel esencial en los razonamientos, pero es importante comprender que en algunas oportunidades puede distorsionar representaciones y conducir a errores. En la intuición tiene gran influencia la subjetividad. Algo puede ser intuitivamente comprendido por alguien y no por otro. Depende de la experiencia, de conocimientos previos, pero también de cualidades personales. Pueden discutirse razonamientos, pero no intuiciones, compartirse resultados, pero no evidencias. No puede hablarse de la intuición como una práctica social, ya que no es posible compartirla y que no existe normativa en ella. La argumentación se construye para convencer al otro de que lo que decimos es cierto, para demostrarle que lo que afirmamos es verdad. La intuición en matemática, combina la intuición sensible y la razón evidenciada a través de la intuición intelectual, y participa de ambas. La fertilidad de la intuición depende de su refinamiento y relación con la razón y la experiencia.

Referencias bibliográficas

Bunge, M. (1965). *Intuición y ciencia.* Buenos Aires: EUDEBA.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada, CICATA, IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado sin publicar. CICATA-IPN, México.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: Reidel.

Hadamard, J. (1944). Psicología de la invención en el campo matemático. Buenos Aires: Espasa Calpe.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(2), 195-218.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1948). *Metodología de la Matemática Elemental*. Buenos Aires: Ibero-Americana.