EL CONCEPTO DE SIGNIFICADO EN LA RECONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Alberto Camacho Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II México
camachoalberto@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Superior

Resumen. *El escrito muestra cómo la introducción en la enseñanza de nuevos significados del conocimiento matemático, contribuyen en la reconstrucción de los propios conocimientos que se transmiten en el aula. Para ello planteo la incorporación del significado de «variabilidad» como una categoría de la «predicción» (Cantoral, 2001, 8), cuya práctica escolar, en el nivel de ingeniería, lleva a la reconstrucción o redefinición del concepto de función como una dependencia entre variables. El objetivo se mueve a través de cuatro ejes, que son: 1. La búsqueda de nuevos significados de la matemática que puedan ser llevados a la enseñanza, 2. La coherencia de estos últimos respecto de los conocimientos ya existentes, 3. El rediseño del discurso matemático, y 4. Los debates que propician la aceptación del rediseño.*

Palabras clave: variabilidad, significado, construcción del conocimiento

Introducción

Una de las formulaciones más comunicadas, y quizá poco comprendidas, a la que las instituciones educativas son hoy en día confrontadas, es dar sentido a las matemáticas, en tanto su enseñanza, por un lado, y su aprendizaje, por otro, (Chevallard, 2004). La preocupación no nos es ajena y se puede resumir en la siguiente pregunta: ¿Cómo hacer para que los conocimientos matemáticos que difundimos en el salón de clase, sean «conocimientos significativos»? Diversos acercamientos se colocan en el problema de llevar a los estudiantes a la construcción de conocimientos matemáticos haciendo uso de significados del conocimiento; de manera autónoma, casi autodidacta, como en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) francesa; a partir del conocimiento científico o de "referencia", como en la Teoría Antropológica de la Didáctica (TTD) (Chevallard, 1999); o bien colocando a los estudiantes en sólo procesos de construcción de conocimiento a través de las prácticas sociales que así lo permiten, tal como se plantea en la Socioepistemología (SE) (Cantoral & Farfán, 2004). Con todo, los resultados que se observan en estas aproximaciones no se traducen, todavía, en principios o métodos de enseñanza precisos de los contenidos matemáticos que se mueven bajo la perspectiva del conocimiento significativo.

Me parece que estas aproximaciones han dejado de lado una parte inherente al discurso cual es la “experiencia del profesor”, del lado de sus asignaturas, y sobre todo su interacción con los estudiantes, práctica en la cual los significados del conocimiento matemático son el eje central. En ocasiones nos basta con interactuar por vez primera con un grupo de tal o cual asignatura, durante dos o tres días, incluso una semana, para dar razón del nivel de conocimientos con que cuenta y con ello planear el curso, así como establecer el nivel de conocimientos que el propio grupo será capaz de alcanzar. Si atendemos con más detalle ese accionar de nuestra actividad, las más de las veces poco deliberado y además cotidiano, incluso puede ser imperceptible, volviéndose normativo, estaremos de acuerdo en que así violamos el “contrato” que tenemos con el plan de estudios y el propio libro de texto, en el sentido de enseñar a nuestros alumnos el conocimiento matemático en la forma que ahí es convenida. Ese conocimiento es actualmente llamado por los eruditos “conocimiento de referencia” y se entiende como aquel conocimiento deseable para ser enseñado, en tanto límite de otros “conocimientos asociados” al mismo. Al “bajar” o “subir” el nivel académico, la trasgresión nos obliga a un cambio en la forma del discurso matemático escolar (DME), haciendo interactuar esos conocimientos asociados para dejar en tal o cual nivel el proceso de enseñanza. En ambos casos, subir o bajar el nivel académico, los conocimientos asociados suelen ser significados conocidos, o bien nuevos significados producto de la investigación, que al ser llevados al salón de clase son colocados por el profesor a cierta «distancia» del conocimiento de referencia. A partir de este punto de vista los significados asociados aparecen en diferentes contextos, apuntaré dos de ellos: a) En los textos de matemáticas en uso, y b) En la historia, donde se verifica la construcción del conocimiento matemático.

Hablaré del primer caso, dejando el segundo para los siguientes apartados. En los libros de texto, los profesores tomamos como premisa que los conocimientos suelen ser organizados o estructurados en cierto orden secuencial para que los lectores les comprendan. No obstante es más común el caso contrario, es decir, que los significados no se encuentren lo suficientemente organizados, de manera que entre ellos no haya coherencia o un orden secuencial que lleve al aprendizaje. O bien ocurre que la organización en la que se han colocado no satisface la escala que el profesor desea dar a los conocimientos en la clase. A partir de esto último se hace necesaria su reorganización. Más ello puede ejercer que el profesor, o bien el investigador, incluya en el discurso nuevas formas asociadas al conocimiento de referencia. Seguiré esta última circunstancia.

Marco teórico

En su origen, Cantoral & Farfán (1990) plantearon la «reconstrucción de los significados» como la posibilidad de "reorganizar el conocimiento matemático escolar". Para estos autores, la "reconstrucción de los significados» resulta indispensable debido a que la «fenomenología intrínseca", es decir, aquellos elementos que caracterizan las nociones en su génesis, así como los "constructos asociados", procesos heurísticos que llevan a edificar los distintos "estilos" de hacer matemáticas: *"están impregnados de la época cultural en la que se construyeron*" De ahí la necesidad de la reconstrucción, puesto que: *"no es posible su adaptación inmediata a nuestro contexto cultural"* (Cantoral, & Farfán, 1990, 26-27). Citan este proceso usando la palabra *"re-significar*". Re-significar es darle vida académica a un concepto que no la tiene, o no la ha tenido por ser desconocido, o bien encontrarse en desuso respecto del conocimiento de referencia. Una manera de re-significar el conocimiento matemático, es haciéndole interactuar en el salón de clase, más ello es solamente una primera condición.

Metodología

La elección de nuevo conocimiento para la enseñanza hace necesaria la reconstrucción del currículo. La reconstrucción, por sí misma, se sujeta a los acuerdos y desacuerdos entre los núcleos de investigadores, así como a los debates que propician su aceptación. Esta apreciación es marcada por cuatro niveles de búsqueda; en primer lugar, la elección del nuevo significado, en segundo, la cuestión de su coherencia respecto del conocimiento de referencia, tercero, la reconstrucción, y cuarto, la gestión para la aceptación del currículo. En el primero de estos, la elección del nuevo conocimiento conlleva necesariamente al reconocimiento de los significados asociados al conocimiento de referencia. Para el concepto de función, que plantearé más adelante, en Sánchez & Camacho (2007) se muestran por lo menos veinte significados asociados para su enseñanza en el nivel de ingeniería. No obstante, los autores de textos de cálculo diferencial, inician su propuesta a partir del concepto de función. En estos últimos, aparece dominante la definición del concepto en términos de una correspondencia entre variables "*que asocia a cada objeto x en un conjunto, denominado dominio, un solo valor* $f(x)$" (Purcel, 2000, 37).Con ello, podemos decir que el conocimiento de referencia, que llamaremos E_n está por encima de los conocimientos asociados $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$. Purcel sugiere iniciar la enseñanza con esa definición para con ello continuar e intentar dar significado al propio concepto, haciendo uso de los registros conocidos de fórmula, variable y tabla de valores. Es decir plantea un discurso que no necesariamente lleva el siguiente orden:

$$\underbrace{E_n}_{\text{Conocimiento de referencia}} \rightarrow \underbrace{E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow \ldots}_{\text{Conocimientos asociados}}$$

Para el caso que expondré, realicé un estudio epistemológico que involucra el análisis de obras elementales de los siglos XVIII y XIX, donde aparece la noción de «variabilidad». La asociación de este significado con los ya conocidos, así como con la definición de función, permite establecer una "base de significados" o bien la unión de múltiples significados asociados, con los cuales es posible mejorar los diseños de clase. En esta dirección, para M. Artigue el “análisis a priori” que se realiza para el diseño de una situación didáctica, en el contexto de la (TSD), es concebido como: *“un análisis del control de los significados del conocimiento”* (Artigue, 1992, 51). Los significados aparecen en las tres dimensiones de estudio del análisis preliminar en la (TSD) con lo cual el investigador tiene un primer control de los mismos. Un segundo control de los significados se tendrá durante el diseño de la situación. De esta manera, cuando hablo de reconstruir el conocimiento matemático, lo hago en el sentido de controlar a través suyo los significados que surgen del análisis preliminar, lo cual no es previsto por la (TSD) y si se destaca en la (SE). En esta dirección, la (RCM) es posible a partir de “encadenar” los significados contenidos en las bases, viéndoles como eslabones consecutivos uno del otro, de suerte que el significado del primero lleva a la comprensión del segundo, etc. El método consiste en describir los nuevos significados, apoyando su definición en la vecindad de los significados asociados y del propio conocimiento de referencia, pasando así de una concepción a otra, lo cual conlleva al transito de diferentes niveles de abstracción. Para el caso del ejemplo que menciono, la noción de variabilidad es encadenada por los significados asociados y el propio conocimiento de referencia, de la siguiente manera:

$$\underbrace{\underbrace{\text{Variable} \Rightarrow \text{Variación} \Rightarrow \underbrace{\text{Variabilidad}}_{\text{Nuevo significado}}}_{\text{Significados asociados}} \Rightarrow \underbrace{\text{Función}}_{\text{Conocimiento de referencia}}}_{\text{Base de saignificados}}$$

En este caso se hace interactuar el nuevo conocimiento encontrado con los significados ya existentes, de manera que el primero “*tape los huecos*” que existían entre cada uno de ellos. Creándose así una red o cadena de argumentos de un mismo conocimiento que se consolidan en un modelo didáctico, toda vez que reconstrucción del conocimiento aludido, (RCM). Con esta idea se irrumpe con nuevo conocimiento en la dirección del conocimiento de referencia, transformándole, toda vez que, en la práctica educativa, se intentarán transformar, también, los conocimientos de los estudiantes. La recursividad que pongo en evidencia es semejante al siguiente encadenamiento, más diferente de aquella que se propone en los libros de texto: $E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_k \to \ldots \to E_n$, donde E_0 es el conocimiento o significado con el que se inicia una enseñanza, para el ejemplo que expondré este representa la noción de «variable», E_1 la "transformación" del conocimiento inicial, o sea la "variación". Siendo E_k el «nuevo significado», es decir la «variabilidad», vista como una transformación de la noción de variación, continuando así hasta llegar a la última de las transformaciones, que supondremos E_n, o bien como ya mencioné conocimiento de referencia. Así, las diversas modificaciones $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k \ldots$, se asumen como los diferentes significados que va adquiriendo el conocimiento inicial E_0 a lo largo de la enseñanza, o bien aprendizaje, para así llegar al conocimiento de referencia, E_n.

La noción de variabilidad

Puesto que la noción de variabilidad no ha sido, sencillamente, utilizada en los modelos de enseñanza actual, es que enseguida examinamos su origen a partir de una breve exploración histórica. En México, en el año de 1873, el ingeniero Francisco Díaz Covarrubias suponía en su libro de texto de "Análisis Trascendente", al estilo de Newton, que: "Toda curva puede verse originada por el movimiento de un punto (…)" Al punto que describe la curva dio el nombre de "generador". Esto último le permitió inferir que los diferentes cambios de dirección del punto generador son diversos entre las curvas, teniéndose todas ellas por propiedad común la "variabilidad". En esa reflexión, Díaz Covarrubias estableció la curvatura de las curvas en un modelo del todo geométrico tomándole como: "*la representación de la variabilidad de las direcciones*" (Díaz Covarrubias, 1873, 21). O bien los diferentes «cambios» del punto generador sobre la curva. Destacando que esos cambios se producen al imaginar la curvatura como un proceso que se produce al pasar de un estado rectilíneo a otro curvilíneo, o bien de la constante a la variable.

En tal sentido la variabilidad asume dos posibilidades: la primera es que puede concebirse en un estado de “constancia” del todo rectilíneo y, la segunda, más compleja, cual es la continuidad de la curva. De estas ideas arrogaremos enseguida.

La reconstrucción del conocimiento

El siguiente es un modelo didáctico del concepto de función basado en argumentos de simulaciones geométricas y algebraicas que amplían sus significados asociados ya conocidos. Se prevé que al final del modelo se siga con los argumentos asociados a la función, de gráfica, tabla de valores, etc. En cuanto a la utilidad de los significados vistos como objetos matemáticos, he recurrido a aquellos de “variable”, “variación” y “funciones algebraicas elementales”, incluyendo la noción de “intervalo”. Otros significados asociados útiles, fueron el uso de representaciones gráficas y fórmulas comunes. Como ya apunté, el conocimiento de referencia es el concepto de función, conocido a partir de la dependencia entre variables. La reconstrucción, obviamente, va dirigida a profesores y estudiantes interesados en el cálculo diferencial, que forma parte del campo del pensamiento variacional.

Iniciare dando una definición de variable en los siguientes términos: “*Una variable x es una cantidad medible que aumenta o disminuye”*. La cualidad principal de las variables es que representan el movimiento de los fenómenos físicos y geométricos que se estudian a través del cálculo diferencial. No obstante, las variables adoptan el movimiento desde diferentes contextos de la matemática, como son el aritmético, geométrico, algebraico y variacional.

Plantearé enseguida algunos ejemplos para mejor entender cada caso, sólo te pido que des oportunidad a tu imaginación para concebirles.

EJEMPLO 1 Imagina enseguida un triángulo rectángulo en el cual nos permitiremos dejar fija, y además conocida, una de las distancias, el cateto adyacente *a*, $a \geq 0$, (*a* es un número real positivo) y moviéndose el otro, el opuesto, el cual designamos como *y*, según se aprecia en la figura 1.

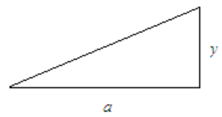

Figura 1

Desarrolla las actividades que enseguida se piden:

a) Realiza sobre el triángulo, a mano y con lápiz, una descripción geométrica de la distancia variable *y,* considerando que aumenta con el movimiento.

b) En esta simulación ¿qué otra distancia se puede considerar variable? asígnale una literal como por ejemplo *z*.

c) ¿Cuáles ángulos del triángulo permanecen constantes y cuáles se pueden considerar variables, asigna literales mayúsculas como *A* y *B* a los ángulos que cambian?

EJEMPLO 2 Imagina ahora el mismo problema geométrico anterior, sólo que debes considerar que sobre la variable *y* se mueve un cohete que ha sido lanzado desde la superficie de la tierra, o sea desde la base del triángulo, y hay una persona observando el lanzamiento a una distancia *a* de su inicio, como se aprecia en las figuras 3 y 4. ¿Qué cambia respecto del ejemplo 1? Es obvio que no cambia nada, solamente el contexto del problema. La imagen de la figura 2 es una "variación" o "instantánea" del movimiento del cohete, tal como se expone en la figura 3. Una instantánea es como una fotografía tomada en determinado momento de una de las diversas "variaciones" del suceso, estas se aprecian con más detalle en la imagen de la figura 3. Lo interesante de la última figura, es que deja ver cómo las diversas posiciones o variaciones, permanecen simultáneamente constantes para cada una de las posiciones interme-dias de la simulación, verifica con más detalle qué magnitudes cambian y cuáles no lo hacen.

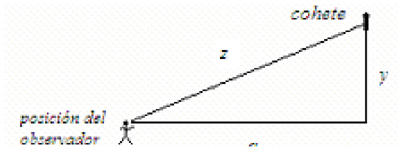

Figura 2

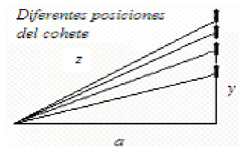

Figura 3

A partir de lo anterior definiremos la noción de variación de la siguiente manera: "Una variación es el cambio de posición o estado de una cantidad". En el ejemplo 2 cambiaron de magnitud, o bien de posición, las variables en movimiento: las longitudes *y* y *z*, el área del triángulo, etc. No obstante, lo valioso del reconocimiento geométrico que podemos hacer de las variaciones, es que más adelante, dentro del curso de cálculo diferencial, nos permitirán el "estudio analítico" del propio movimiento, es decir no nos conformaremos solamente con "ver" cómo varían las magnitudes, sino que podremos hacer un análisis de ellas.

Otra forma en la que suele representarse la idea de variable se da en un lenguaje simbólico como el que proveen el álgebra y la geometría. Por ejemplo la fórmula: $A = \frac{a}{2} y$, representa el área del triángulo rectángulo fijo del ejemplo 2, anterior, en el cual *a* e *y* pueden ser constantes. Sin embargo, puesto que declaramos inicialmente a *y* como variable, la fórmula indica la presencia de por lo menos otra variable más como puede ser el área *A.* De manera que tanto *A* como *y*, están en mutua relación, debido a que para un valor dado de la variable *y* podemos determinar un valor del área *A.* Se acostumbra llamar a la variable *A* "variable dependiente" (pues depende de *y*) escribiéndole como $A(y)$, mientras que a *y* se le llama la "variable independiente". Geométricamente la expresión: $A(y) = \frac{a}{2} y$, es representada por el sinnúmero de variaciones, tal como se muestran en la figura 3. La cantidad de variaciones que se pueden establecer a partir de la expresión $A(y) = \frac{a}{2} y$ es llamada «variabilidad». Expresaremos este concepto de la siguiente manera: *"La variabilidad es el conjunto de todas las variaciones del movimiento de un fenómeno, contenida en la expresión* $A(y)=\frac{a}{2}y$*, que en general se escribe como:* $f(x)$*".*

Como puedes ver, la expresión $A(y)=\frac{a}{2}y$ indica con más claridad la dependencia entre las dos cantidades, toda vez que representa totalmente la variabilidad producida por el fenómeno. Dicha expresión es llamada "función". En el caso de la fórmula $A=\frac{a}{2}y$, esta modela el caso particular de una de las variaciones producidas por el fenómeno, toda vez que permite considerar al movimiento en un estado fijo o de "constancia".

Conclusiones

La variabilidad debe ser observada desde dos puntos de vista; primero, en el cuerpo de la socioepistemología, la variabilidad se refiere a una "práctica social" que llevó a Díaz Covarrubias a la construcción de conocimiento matemático escolar, plasmado en su libro de texto; segundo, la noción de variabilidad articula la parte de análisis que es propio de los cursos de matemáticas en el nivel de ingeniería, que a su vez es sujeta a los cursos de física en ese nivel (Cantoral, 2001, 8). Dicho de otra manera, la variabilidad hace posible la predicción a través de conectarle con las nociones elementales del cálculo, como son aquellas de función y variable. Visto así, el discurso favorece la caracterización geométrica y algebraica que hacen más accesible en la enseñanza el paso al modelo analítico, en el cual la variabilidad se desprende de la función incrementada. Véase el siguiente modelo:

$$\underbrace{x:\text{Variable},\quad x+\Delta x:\text{Variación}}_{\text{Elementos del cálculo}},\ \underbrace{f(x+\Delta x)}_{\textit{Variabilidad}}=\underbrace{f(x)+f'(x)\Delta x+B(\Delta x)^2+\ldots}_{\text{Predicción}}$$

De esto último podemos suponer que la base de significados, propuesta anteriormente como: $E_0\rightarrow E_1\rightarrow E_2\rightarrow\ldots\rightarrow E_k\rightarrow\ldots\rightarrow E_n$, origina un primer paso en la cuestión de la coherencia del nuevo significado E_k, respecto del resto de los conocimientos colocados en la cadena. En el emplazamiento anterior, E_k es "potencialmente" útil para el entendimiento de E_n y da mayor significado a E_1, o sea la noción de variación, lo cual habla del compromiso de incorporarle en la base de significados. En este sentido, me he esforzado por conservar en el encadenamiento aquello que Chevallard (2004) ha llamado, un "principio de simetría" entre los significados ya conocidos: $E_1, E_2, ..., E_n$, y el nuevo conocimiento involucrado, E_k. La simetría entre los significados contiguos a E_k, en este caso representado por la noción de variabilidad, como son aquellos de variación y el propio concepto de función, se preserva por la coherencia y unificación que adquiere el propio discurso. Como un todo, la construcción de la base de significados: $E_0 \to E_1 \to E_2 \to ... \to E_k \to ... \to E_n$ se reduce a ser una "síntesis" del conocimiento (Camacho, 2007), debido a que unifica a E_k. En tal sentido cada elemento debe, además, considerarse potencialmente conocimiento de referencia. En su conjunto, los elemen-tos $E_0, E_1, E_2, ... E_k, ... E_n$, que integran la base, establecen un discurso que se consolida en (RCM).

Referencias bibliográficas

Artigue, M (1992). Didactic engineering. En: Régine Douady and Alain Mercier *Research in Didactique of Mathematics*. Selected Papers.

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Revista de EDUCACIÓN MATEMÁTICA*., Vol. 18, Núm. 1, pp. 133-160. México: Santillana Editores

Camacho, A. (2007). Sistemas Sintéticos. Síntesis de Conocimiento en los Manuales para la Enseñanza. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 471-492). México DF: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R. M. (1990). Elementos Metodológicos para la reconstrucción de una Didáctica del Análisis en el nivel superior. Primer Simposio Internacional sobre

Investigación en Educación Matemática. *Cuadernos de Investigación. 4*(13), 2ª parte, 19-26. PNFAPM – SEP, México*.*

Cantoral, R., Farfán, R. M (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes des nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 24, Núm. 2.3, 137.

Díaz Covarrubias, F. (1873). *Elementos de análisis trascendente o cálculo infinitesimal*. 1ª edición,. México: F. R Castañeda y L. G Rodríguez, Impresores

Chevallard, Y. (1999) L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.

Chevallard, Y (2004) La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *3e Université d'été Animath, Saint-Flour* (Cantal), 22-27 août. IUFM d'Aix-Marseille & UMR ADEF.

Purcel, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2000). *Cálculo*. México: Pearson Educación