I. SITUACIÓN LEGAL-INSTITUCIONAL:

I.1. CONTEXTO ADMINISTRATIVO:

I.1.1. La Universidad en España:

El marco general en el que se sitúa esta memoria quiere tener en cuenta los cambios producidos en la Sociedad y en la Universidad españolas en los últimos años, cuya solución se aborda en el marco legal de la Ley de Reforma Universitaria de 25 de agosto de 1983, pero cuya realización tiene aún un largo camino por delante, para dar satisfacción a las necesidades crecientes de desarrollo científico-técnico derivadas de la incorporación de España a las sociedades industriales avanzadas.

La universidad de nuestros días es una institución al servicio del desarrollo social y económico de la sociedad a la que pertenece,*"el desarrollo científico, la formación profesional y la extensión de la cultura son las tres funciones básicas que de cara al siglo XXI debe cumplir esa vieja y hoy renovada institución social que es la Universidad española" (LRU, 1983).*

Concebimos, de acuerdo con nuestro marco legal, que la educación (todo el sistema educativo, del cual la educación superior es parte inseparable) es un servicio social y público de primera magnitud, cuya organización y finalidades deben responder a las necesidades actuales de la sociedad española, mediante el ejercicio de las funciones universitarias de docencia, investigación y difusión.

La institución universitaria debe adaptarse, en el ejercicio de sus funciones, a los retos que plantea una sociedad en la que se han producido fuertes cambios, como es el caso de la sociedad española. Entre los cambios destacables podemos señalar, siguiendo el informe del ICED de 1987, los cambios políticos, demográficos, económicos y los derivados de la integración de España en las Comunidades Europeas.

Entre los **cambios políticos**, derivados de la puesta en práctica e integración en los hábitos y costumbres sociales de la Constitución de 1977, destacan:

> *"una prensa libre y crítica; partidos políticos independientes y elecciones libres: la tutela efectiva de los derechos humanos y de un poder judicial independiente; la libertad de pensamiento, religión y expresión de todos los ciudadanos; la libertad de asociación incluyendo sindicatos independientes; la reintegración de importantes poderes políticos a los gobiernos regionales y, lo que es igualmente importante, la reafirmación constitucional de la autonomía de las Universidades y del derecho a la educación de todos y cada uno de los ciudadanos."* [1]

Entre los **cambios demográficos** que se han producido en las últimas décadas, y que han tenido y continuan teniendo repercusiones importantes sobre el sistema educativo español, podemos señalar los siguientes: primero, el cambio en la tasa de natalidad, que se produce en España con cierto retraso respecto de los paises europeos, con una tasa bruta de natalidad que alcanza su máximo en 1964, y va disminuyendo de forma progresivamente acelerada hasta llegar a reducirse casi a su mitad, con las consiguientes repercusiones en el aumento de inscripciones en educación superior, cuyo estancamiento aún no ha comenzado; en segundo lugar, la desigual distribución geográfica de la población española, que ha pasado a lo largo de este siglo de tener un 30% de población urbana al, aproximadamente, 80% actual; un tercer cambio importante ha sido la incorporación masiva de la mujer al mercado de trabajo, con el fuerte aumento del número de mujeres matriculadas en la Universidad, que ha pasado en los últimos quince años de un 37% a las condiciones de igualdad actuales con los varones, con tendencia a sobrepasarlos; un cuarto cambio ha sido la práctica desaparición de la emigración masiva de trabajadores españoles a otros paises en busca de empleo; finalmente, y como consecuencia del descenso de la tasa de natalidad y del aumento de las expectativas de vida, la población española está experimentando un progresivo envejecimiento.

[1] International Council for Educational Development (1987), en: La Reforma Universitaria Española. Evaluación e Informe. Consejo de Universidades. Ministerio de Educación y Ciencia.

También se han producido **cambios en la economía española**, que ha realizado modificaciones estructurales básicas durante las últimas décadas, transformándose en una economía recientemente industrializada y de servicios. En un plazo de tiempo relativamente corto, España ha pasado de la categoría de país en vías de desarrollo a la de país desarrollado. Aún así, hay tres problemas serios que la economía española debe controlar. Nos referimos a una baja tasa de crecimiento anual del Producto Nacional Bruto, a una tasa de inflacción superior a la de los paises de la OCDE y a una tasa persistente de paro y desempleo:

> *"Sería más correcto decir que España posee en el momento actual una economía dual, un sector que posee todos los rasgos o características de una economía moderna altamente desarrollada, mientras que en otro sector sigue conservando muchas características de los paises aún no desarrollados, incluyendo una pobreza generalizada y una agricultura de subsistencia, así como unos niveles educativos relativamente bajos."* [2]

Estos cambios afectan en particular a la Universidad puesto que , por un lado, han modificado el entorno operativo y ético del sistema educativo, colocando a las Universidades frente a nuevas oportunidades, desafíos y obligaciones importantes, entre los que la participación y la toma colegiada de decisiones, junto con la responsabilidad por el propio trabajo, la competitividad y eficacia en los resultados y un fuerte espíritu crítico, son algunos de los factores más destacables.

Los factores demográficos impulsan cambios en la planificación de la Universidad como servicio público. Dado que las Universidades se encuentran situadas en grandes centros urbanos hay que abordar el problema de facilitar la educación superior a las personas que viven a grandes distancias de esos centros. También hay que reorientar la tendencia de los estudiantes a concentrarse en determinados estudios, favoreciendo las carreras de ciclo corto y aquellas carreras técnicas que demanda el desarrollo de la sociedad. Igualmente, habrá que tener en cuenta que van a aumentar las demandas de

[2] ICED (1987). Op. c.

educación de adultos, incluyendo el nivel universitario. Por otra parte, la Universidad debe atender a la formación de especialistas y técnicos cualificados que cubran las necesidades derivadas de la economía española y de las áreas rurales relativamente atrasadas, así como a la preparación de los jóvenes para el trabajo por cuenta propia.

No cabe duda que ha sido la integración de España en la CEE la que ha permitido concretar algunos de los retos o desafíos más importantes a sus Universidades:

> *"El primero es el de añadir una fuerte dimensión internacional a sus planes de estudios, hasta ahora relativamente provincianos, como parte integral de la educación general de todos y cada uno de los estudiantes. El segundo reto o desafío es el de ofrecer una mejor orientación profesional y tipos más adecuados de conocimientos, habilidades y experiencias prácticas que permitan a los estudiantes adaptarse con mayor facilidad a unos mercados laborales en constante proceso de cambio. El reto o desafío planteado en las Universidades es el de aprovechar la importante oportunidad ofrecida por la pertenencia a la CEE para reforzar sus actividades de investigación científica y técnica."* [3]

Ante esta situación, en la que la Universidad debe trabajar con nuevos datos y gestionar los nuevos cambios, se le atribuyen las siguientes funciones:

> ***Artículo 1º.1.*** *El servicio público de la educación superior corresponde a la Universidad, que lo realiza mediante la docencia, el estudio y la investigación.*
>
> ***2.*** *Son funciones de la Universidad al servicio de la sociedad:*
>
> *a) La creación, desarrollo, transmisión y crítica de la ciencia, de la técnica y de la cultura.*
>
> *b) La preparación para el ejercicio de actividades profesionales que exijan la aplicación de conocimientos y*

[3] ICED (1987). Op. c.

métodos científicos o para la creación artística.
c) El apoyo científico y técnico al desarrollo cultural, social y económico, tanto nacional como de las Comunidades Autónomas.
d) La extensión de la cultura universitaria.[4]

Pero la LRU no es más que un instrumento de trabajo que el Gobierno propone al Parlamento, y que éste concede a las Universidades para posibilitar la organización, planificación, ejecución y control de su trabajo, entre cuyas características esenciales cuenta, en este caso, con que está basado en la capacidad y en la actuación de los participantes de la propia comunidad universitaria. La pregunta clave en todo caso es la siguiente:

> *"¿qué clase de sociedad desea ser España dentro de una o dos generaciones?. ¿Desea ser una economía industrial de nivel medio, que proporcione bienes y servicios intermedios a sociedades poco industriales y paises en vías de desarrollo, o aspira a convertirse en una "economía de información" postindustrial, en las que las tecnologías más avanzadas de comunicación desempeñen un papel básico? (...) Si España decide avanzar en esta dirección las implicaciones para todos los niveles educativos, pero especialmente para las Universidades, son realmente enormes. Significa que la propia educación debe llevar finalmente a cabo su propia revolución tecnológica y en el campo de los planes de estudio para seguir el ritmo marcado por los paises de su misma área."* [5]

Vemos que, con planteamientos diferentes, el debate sobre la misión de la Universidad realizado por Ortega sigue teniendo en cuenta las mismas dimensiones: la formación de profesionales altamente cualificados, la investigación científica,

---

[4] Ley Orgánica 11/1983, de 25 de Agosto, de Reforma Universitaria. BOE nº 209 (1-IX-83). Madrid.

[5] ICED (1987). Op. c.

proporcionar cultura general adecuada al científico y al humanista y lograr una presencia efectiva de la Universidad en la vida pública. Las cuestiones y problemas señalados por Ortega en su momento, igual que con anterioridad por Giner de los Rios y muchos otros, siguen aún abiertos y pendientes de solución, pero no cabe duda que en el momento actual se dan las condiciones económicas, sociales, culturales y científicas que pueden convertir a la Universidad en un factor real de progreso en nuestro país.

Un dato actual importante es la nueva autonomía de las Universidades, que permite controlar el propio presupuesto y los asuntos internos. Cada Universidad puede establecer sus necesidades y prioridades para realizar los gastos; puede trasladar a los profesores de centro y seleccionar sus propios profesores; puede establecer programas dirigidos a la obtención de títulos propios y organizar cursos especializados. El programa para el desarrollo de esta autonomía pasa por fijar objetivos claros y principios para la toma de decisiones en la mejora y modernización de la formación que proporciona cada universidad; dar satisfacción al complejo de necesidades sociales que comporta la igualdad de oportunidades educativas; conseguir una articulación efectiva con la enseñanza secundaria, ya que es parte del mismo sistema y se condicionan mútuamente; diseñar las necesidades de profesorado para el futuro, las necesarias reconversiones y las dimensiones de las plantillas, junto con los problemas aún no resueltos de movilidad, competencia y calidad del profesorado; conseguir un balance ajustado entre los costes, la financiación y la eficiencia del servicio; adaptar la estructura en tres ciclos de la educación universitaria a una mayor diversidad de oferta, ampliando la gama de opciones mediante un diseño adecuado del sistema de planes de estudios y titulaciones, dando respuesta a las necesidades más diversificadas cada vez de la sociedad y la economía españolas; establecer un sistema de prioridades nacionales en investigación, orientando los programas de doctorado a estos objetivos y promoviendo la difusión, crítica y evaluación de los trabajos realizados.

Esta larga lista de cuestiones no es exhaustiva ya que el campo de trabajo de la Universidad es amplio y complejo, pero sí nos parece que marca alguna de las líneas prioritarias de reflexión y esfuerzo en la tarea actual de nuestra Universidad. Queda claro que la Universidad tiene que tomar parte activa ante los grandes desafíos de la sociedad de nuestro tiempo, entre los que los temas educativos ocupan un lugar destacado. En esta importante tarea constructiva encontrará también la mejor solución a sus propios problemas.

Las consideraciones anteriores delimitan los datos claves del papel que debe desempeñar la Universidad en la sociedad española actual. Aunque de forma resumida y abreviada, hemos querido plantear estas cuestiones generales al comienzo de esta memoria porque, no cabe duda, la mayor parte de los temas que aquí se planteen y desarrollen adquieren su pleno significado al analizar los condicionantes y orientaciones que hoy día presenta el marco social e institucional en el que tiene lugar nuestro trabajo.

I.1.2. Organización universitaria en Areas de Conocimiento y Departamentos:

Para desarrollar el doble *"objetivo docente e investigador, se potencia la estructura departamental de las Universidad españolas, lo que debe permitir no sólo la formación de equipos coherentes de investigación, sino también una notable flexibilización de los currícula que pueden ser ofertados, si bien se evita imponer reglamentariamente dicha estructura, facultando a las Universidades para que adapten progresivamente la actual organización facultativa a la nueva organización departamental; serán, pues, ellas mismas quienes decidirán, en última instancia, su propia composición por departamentos, así como el grado de implantación real de este principio de organización."* [6]

Uno de los objetivos básicos de la Ley de Reforma Universitaria es el de convertir unos Departamentos fuertes en los bloques organizativos básicos de las Universidades, cada uno de ellos especializado en un área de conocimiento determinada o varias, y capaces de satisfacer de modo eficaz y competente las necesidades de todas las Facultades afectadas por ese área. Por ello, en su parte dispositiva, la ley establece:

> *"**Artículo 8º.1.** Los Departamentos son los órganos básicos encargados de organizar y desarrollar la investigación y las enseñanzas propias de su respectiva área de conocimiento en una o varias Facultades, Escuelas Técnicas Superiores, Escuelas Universitarias y, en su caso, en*

[6] L.R.U. (1983). Op. c.

aquellos otros Centros que se hayan creado al amparo de lo previsto en la ley.

2. *Los Departamentos se constituirán por áreas de conocimiento científico, técnico o artístico, y agruparán a todos los docentes e investigadores cuyas especialidades se correspondan con tales áreas.*

3. *Asimismo, corresponde a los Departamentos la articulación y coordinación de las enseñanzas y de las actividades investigadoras de las Universidades.*

4. *La creación, modificación y supresión de Departamentos corresponderá a la Universidad respectiva conforme a sus estatutos y de*
acuerdo con las normas básicas aprobadas por el Gobierno a propuesta del Consejo de Universidades." [7]

Desarrollando el artículo anterior, los estatutos de la Universidad de Granada determinan:

*"**Artículo 10.** Los Departamentos se constituirán por una o varias áreas de conocimientos científicos, técnicos o artísticos en los términos previstos en estos Estatutos, y de acuerdo con las disposiciones legales correspondientes.*
Los Departamentos serán únicos por área o áreas de conocimiento y agrupan a todos los docentes e investigadores cuyas especialidades se corresponden con tales áreas. A estos efectos se consideran áreas las aprobadas por el Consejo de Universidades.
La denominación de los Departamentos será la del área de conocimiento correspondiente.
***Artículo 12.** La creación, modificación y supresión de Departamentos que habrá de efectuarse de acuerdo con la legislación general, corresponde a la Junta de Gobierno de la Universidad, cuyos acuerdos deberán ser remitidos al Claustro Universitario para su aprobación.*

[7] L.R.U. (1983). Op. c.

Artículo 16. *Son funciones del Departamento:*

a) Organizar y desarrollar la docencia de acuerdo con las exigencias de los distintos planes de estudio, que incluyan disciplinas propias del mismo, y con las directrices generales dictadas por las Facultades y Escuelas de la Universidad.

b) Organizar y desarrollar la investigación relativa al área o áreas de conocimiento de su competencia.

c) Organizar y desarrollar los estudios de Doctorado en el área o áreas de su competencia, así como coordinar la elaboración de Tesis Doctorales realizadas en su seno.

d) Promover la realización de trabajos de caracter científico, técnico o artístico, y el desarrollo de cursos de especialización.

e) Impulsar la renovación científica y pedagógica de sus miembros.

f) Fomentar las relaciones con otros Centros de la Universidad de Granada y cualesquiera otras Universidades y Centros españoles y extranjeros.

g) Participar en los órganos de Gobierno de la Universidad de Granada en los términos previstos en estos Estatutos.

h) Intervenir en la elaboración de los planes de estudio correspondientes a las Facultades y Escuelas en que imparten sus enseñanzas.

i) Cualesquiera otras funciones y tareas que específicamente le atribuyan estos Estatutos." [8]

En estos artículos se recogen las obligaciones básicas, el modo de organización

---

[8] Estatutos de la Universidad de Granada (1985).Decreto 162/1987 de 17 de Julio, BOJA nº 74 de 26 de Julio de 1985. Sevilla.

y las condiciones para la constitución de Departamentos e, igualmente, las funciones que les corresponden. Con ello se intenta dotar de un nuevo dinamismo a la estructura y funcionamiento de las Universidades, excesivamente centradas en los aspectos corporativos que se derivaban de la exclusiva organización anterior en Facultades, Escuelas Técnicas Superiores y Escuelas Universitarias.

Con esta nueva estructura se quiere promover que, desde la Universidad, se emprenda el análisis y la búsqueda de soluciones a diversos problemas sociales sumamente complejos (incluyendo los educativos) y efectuar avances significativos en los campos de la ciencia y la tecnología mediante un enfoque interdisciplinar. Se pretende evitar que la organización tradicional en especialidades académicas y profesionales, totalmente separadas unas de otras, se convierta en un obstáculo grave para el progreso intelectual, social, cultural y científico.

Los especialistas han sido los primeros en reconocer esta necesidad de combinar las disciplinas o materias tradicionales con el fin de crear nuevos campos científicos. Una opción ha consistido en diversificar el campo clásico de las disciplinas tradicionales en el nuevo catálogo de Areas de Conocimiento, más adaptado al desarrollo actual de las ciencias y más acorde con las necesidades sociales y problemas que se plantean.

En el momento actual, el Catálogo de Areas de Conocimiento, establecido por el Consejo de Universidades, comprende un total de 172 Areas de Conocimiento diferenciadas, mediante las que se organizan un total de 62 estudios universitarios distintos. [9]

Según los datos editados por el Consejo de Universidades, aparecidos en la Guía de Departamentos Universitarios[10] había en el total de las Universidades españolas 1651 Departamentos Universitarios.

---

[9] Anuario Estadística Universitaria (1990). Consejo de Universidades. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

[10] Guía de Departamentos Universitarios (1990). Consejo de Universidades. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Aunque algunos de estos datos están en proceso de cambio debido, entre otras cosas, a las modificaciones de los planes de estudio y a la aparición de nuevas titulaciones, son ilustrativos para indicar el grado de desarrollo que ha alcanzado la nueva estructura universitaria en estos últimos años.

El **Area de Conocimiento de Didáctica de la Matemática** viene establecida por el Real Decreto 1888/84 de 26 de Septiembre (BOE 26-X-84), por primera vez en nuestro país, y en la actualidad son 187 los Profesores numerarios adscritos en este Area en las Universidades españolas[11] . Estos profesores son funcionarios de las 27 Universidades públicas existentes en ese mismo año[12] . Su adscripción a Departamentos se ha hecho en función de las condiciones particulares de cada Universidad, que han dependido del número de profesores del Area en la Universidad y de su mayor o menor conexión con los profesores de otras areas de matemáticas o de didáctica. Se han producido, en términos generales, dos modelos distintos en la adscripción de los profesores del Area de Didáctica de la Matemática en los Departamentos Universitarios.

El **primer modelo** consiste en la incorporación a Departamentos de Matemáticas y en él encontramos tres variantes, que se producen por el tamaño de la Universidad, las titulaciones que imparten y la tradición previa de integración y colaboración de los profesores de Didáctica de la Matemática con sus compañeros de otras disciplinas. Así, encontramos Departamentos de Matemáticas, formados por profesores de prácticamente todas las áreas de conocimiento comprendidas bajo esta denominación: Algebra, Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa, Geometría, y Matemática Aplicada, incluyendo en algunos casos también a profesores de Economía Aplicada o de Ciencias de la Computación, según universidades. En este caso se encuentran las Universidades de Alcalá de Henares, Autónoma de Madrid, Cantabria, Islas Baleares, León, Oviedo, Navarra y Zaragoza.

---

[11] Anuario de Estadística Universitaria. (1990). Op. c.

[12] Guía de Departamentos Universitarios (1990). Op. c.

Una segunda variante, similar a la anterior, se produce en Universidades más jóvenes, que no incluyen estudios específicos de matemáticas puras, sino solamente los de matemáticas aplicadas, necesarios para carreras técnicas. En este caso tenemos igualmente Departamentos de Matemáticas que incluyen profesores de Didáctica de la Matemática y de Matemática Aplicada, en cuya situación están las Universidades de Castilla-La Mancha, Córdoba y Las Palmas. Similar a este caso es el de la Universidade de Alicante, en la que los Profesores de Didáctica se encuentran en el Departamento de Economía Aplicada. Una última variante de esta integración de los profesores de Didáctica en Departamentos, conjuntamente con profesores de otras áreas de Matemáticas, se presenta en La Laguna y Valladolid, cuyos profesores de Didáctica pertenecen al Departamento de Análisis Matemático .

El **segundo modelo** se produce cuando los profesores del area de Didáctica de la Matemática constituyen Departamento junto con profesores de otras areas de Didácticas especiales. Igualmente se producen aquí tres variantes. La variante más común es la constitución de un Departamento conjunto con los Profesores de Didáctica de las Ciencias Experimentales, situación que se produce en las Universidades Autónoma de Barcelona, Barcelona, Extremadura, País Vasco, Salamanca, Santiago y Sevilla; esta solución parece natural ya que se forma un Departamento general de Didáctica de las Ciencias.

Una segunda variante es la de un gran Departamento que incluya a la totalidad o la mayoría de las áreas didácticas, pedagógicas y psicológicas. En esta situación solamente está la Universidad de Cádiz con un macrodepartamento de Formación del Profesorado, en el que se encuentran los profesores de nuestra área. La Universidad de Málaga está a caballo entre las dos variantes presentadas ya que tiene un Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Ciencias Sociales y Experimentales. Caso aparte es también la Universidad de Murcia, en donde el Departamento es de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Sociales.

Finalmente, la tercera variante, que consiste en un Departamento de Didáctica de la Matemática, exclusivamente, sólo la encontramos en las Universidades Complutense, **Granada** y Valencia.

Está claro que todas estas situaciones se han producido en función de las relaciones internas y del número de profesores del Area de cada Universidad, en ejercicio legítimo de la autonomía correspondiente, también en función de la existencia o no del título de licenciado en matemáticas y de la vinculación mayor o menor entre las diferentes áreas de matemáticas. Igualmente, los trabajos e investigaciones desarrollados con anterioridad a la LRU han pesado en la constitución de Departamentos específicos de Didáctica. Esto mismo explica que sólo unos pocos de los Departamentos mencionados desarrollen una actividad docente e investigadora plena, con producción propia e influencia real en el desarrollo de la Didáctica de la Matemática como disciplina universitaria en nuestro país y con posibilidad de contacto y colaboración con centros de investigación y universidades extranjeros

En el cuadro aparece un resumen de las situaciones y universidades que se encuentran en cada caso. Parece claro que, con el proceso actual de división de las Universidades que superan un determinado tamaño, será más difícil conseguir Departamentos exclusivos en Didáctica de la Matemática, y cabe prever para el futuro inmediato que la Didáctica de la Matemática alcanzará un desarrollo completo en sólo unas pocas Universidades.

I. 1. 3. El Departamento de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Competencias y estructura. Funciones que desempeña:

El 25 de Noviembre de 1985 se celebra sesión extraordinaria para firmar el Acta que inicia el proceso de constitución del Departamento de Didáctica de la Matemática, según la normativa elaborada por el Rectorado de la Universidad de Granada, para dar cumplimiento a lo establecido en el Artículo 12 de los Estatutos de la Universidad. A este acto, presidido por el Vicerrector Dr. Fernández Palomares, se invita a los Directores de los Departamentos de Algebra, Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa, Geometría, Matemática Aplicada, Pedagogía y Psicología Evolutiva y ante ellos se hace una declaración explícita de cuales van a ser las líneas de trabajo que va a desarrollar el Departamento de Didáctica de la Matemática, de cuyas ideas principales hacemos un resumen:

> *"La mayor parte de vosotros sabéis por experiencia que la investigación en Matemáticas, en cualquiera de sus ramas, es una tarea especialmente costosa y delicada, que requiere esfuerzos intensos y continuados que no siempre se ven coronados por el éxito. También sabéis que la tradición científica en nuestro país ha sido muy pobre, prácticamente inexistente, y que el crear las bases de una investigación seria en Matemáticas - en todas sus ramas- es una tarea lenta y difícil, que va a requerir el trabajo continuo de toda nuestra generación y debe prolongarse en las próximas generaciones si queremos remontar definitivamente nuestro atraso e ignorancia en el conocimiento e investigación científicas.*
>
> *Por eso se ha observado con recelo todo lo relativo a la Didáctica, ya que ésta ha aparecido muchas veces como una variante de retórica, un modo de aparentar que se trabaja, un razonamiento estéril y pretencioso que quería hacernos pasar por auténtico conocimiento científico lo que sólo eran, en el mejor de los casos, buenas cualidades personales y sentido común.*

Creo que esta crítica ha tenido fundamento durante algún tiempo, a la vista de lo que se ha trabajado en el campo de la Didáctica en nuestro país. El juicio, aunque duro, responde a realidades y comportamientos concretos que hay que asumir, pero que no reflejan el fondo de la cuestión.

La pobreza de resultados en Didáctica de la Matemática en nuestro país es un índice más de nuestro atraso científico, quizás el que hoy más destaque dentro de la Matemática. Mientras que en el resto de las disciplinas hay equipos que vienen trabajando con seriedad y hay equipos concretos que publican en revistas internacionales de prestigio, participan en Simposios y Congresos fuera de nuestras fronteras y ofrecen una imagen digna de la investigación matemática española, sin embargo en Didáctica aún no ha ocurrido.

Discutir si la Didáctica de la Matemática es o no una disciplina científica queda totalmente fuera de lugar. No tiene sentido plantearse esta pregunta. La Educación es hoy día uno de los campos más fecundos de investigación a escala internacional; los problemas planteados en torno a la formación de los conceptos matemáticos, la adquisición y transmisión de los mismos; el diseño de estrategias, la elaboración de materiales y recursos; el cultivo de la creatividad, las distintas vías de elaborar y ejecutar un razonamiento, son solamente algunos de los campos más destacados dentro de la Didáctica.

En los paises de nuestra área geográfica y cultural hay Departamentos de Didáctica de la Matemática funcionando desde hace años; así ocurre en Estados Unidos, Reino Unido y Alemania; en otros paises una estructura administrativa similar a nuestros ICEs es la encargada de canalizar y desarrollar estas investigaciones (...) Sin embargo, nuestro nivel en este campo concreto es uno de los más bajos dentro de los paises culturalmente avanzados.

Por ello, la Didáctica hoy día no es - no va a ser - una coartada para nadie. Bien al contrario, a poco que nos descuidemos, va a ser uno de nuestros flancos más débiles. Porque no basta con tener ingenio y redactar bien, sino que habrá que trabajar duro e investigar en serio, para situarse en un nivel digno dentro de la comunidad internacional que trabaja en este campo.

Para ello hacen falta medios y ayudas. Medios en cuanto a fondos bibliográficos, revistas especializadas, profesores invitados, conferencias y congresos y, en general, todo tipo de material científico y pedagógico. Ayudas en forma de becas, ayudas para publicaciones, dirección de tesis y tesinas, desplazamientos a centros extrajeros, y un largo etcétera costoso pero imprescindible para llevar adelante cualquier proyecto de investigación. Creemos que este camino se puede recorrer.

El hecho de que se establezca la Didáctica de la Matemática como un Area de Conocimiento dentro del organigrama de la Universidad es un paso importante. Quiere decir que la Universidad va a poner al sercicio de este campo los mismos medios institucionales, las mismas ayudas económicas y administrativas y , en definitiva, el mismo aparato jurídico que pone para el resto de las disciplinas universitarias. Por ello nos parece importante este momento, no sólo para nosotros, sino también para toda la comunidad universitaria y, en especial, para los que trabajen en los campos de la Matemática y la Educación. Por esto mismo os hemos querido invitar a este acto en calidad de testigos.

La Universidad de Granada va a ser una de las primeras en poner en marcha este servicio en nuestro país, y esto nos compromete a todos. El grupo de veintitrés profesores, en cuyo nombre os hablo, lleva algún tiempo trabajando en este campo y va a continuar en esta área con seriedad y dedicación. Para ello os pedimos vuestro apoyo y *vuestro respeto. Os pedimos que nos ayudeis en la medida de vuestros conocimientos y que, al mismo tiempo, seais críticos y exigentes con el rendimiento de nuestro trabajo, que nos demandeis la altura y calidad que son exigibles a toda investigación, y que veais en la Didáctica un campo más del esfuerzo solidario que todos los profesionales de las matemáticas venimos haciendo por elevar el nivel científico y cultural de nuestro país, e integrarnos en la comunidad científica internacional.*

Este es el compromiso que asumimos hoy. Con la firma de este acta queremos dar comienzo a una etapa en la consideración de la Didáctica de la Matemática ya que debemos conseguir que sea realmente un Area de Conocimiento dentro de nuestra Universidad." [13]

Con esta larga cita queda explícito cuál era el punto de partida y también cuál era el programa de actuación con el que se constituyó el Departamento de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Algunos de los objetivos se han cubierto ya, otros están en vías de consecución, mientras que los más de ellos son actualmente vias de trabajo y estudio cuya realización hay que contemplar a largo plazo. Veamos cuál es la situación actual de nuestro Departamento y, cuando proceda, cuál era el punto de partida. En el momento de su constitución el Departamento estaba formado por 23 profesores, en las siguientes situaciones administrativas:

---

[13] Rico L. (1985). Discurso en la constitución del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, (Inédito).

En la actualidad la situación es la siguiente:

El Departamento está formado por *"todos los docentes e investigadores de la Universidad de Granada adscritos al Area de Didáctica de la Matemática, los alumnos que reciben sus enseñanzas, el Personal de Administración y Servicios y los Becarios de Investigación."* [14]

El Departamento consta de cinco Secciones Departamentales, que corresponden a las localidades de Almería, Ceuta, Granada, Jaén y Melilla.

Los órganos de Gobierno del Departamento se atienen a lo establecido por los Estatutos de la Universidad de Granada, Artículos 44, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70 y 71, y son de dos: tipos colegiados y personales. Los órganos personales son el Director del Departamento, el Secretario y los Directores de las Secciones Departamentales, cuyas funciones y competencias están establecidas por los Estatutos de la Universidad y el Reglamento de Régimen Interno del Departamento.

El Consejo de Departamento es el órgano superior de gobierno del mismo; está presidido por el Director e integrado por todos sus profesores e investigadores y una representación de los alumnos y del personal de administración y servicios. El Consejo de Departamento se reune, al menos, una vez por trimestre. La Junta de Dirección está integrada por el Director, Secretario, dos profesores y un alumno; asesora al Director y

---

[14] Reglamento de Régimen interno, Departamento Didáctica de la Matemática (1987). Aprobado en Sesión del Claustro Universitario de 20-XI-87, Boletín Informativo nº 25. Universidad de Granada.

prepara las reuniones del Consejo.

El Departamento de Didáctica de la Matemática tiene tres comisiones, Docencia, Económica e Investigación, que tramitan el funcionamiento cotidiano de las cuestiones correspondientes, estudian los temas específicos y preparan informes para el Consejo del Departamento.

El Departamento de Didáctica de la Matemática desarrolla docencia en las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB de Almería, Ceuta, Granada, Jaén y Melilla; en la Licenciatura de Matemáticas de la Facultad de Ciencias e imparte un Programa de Tercer Ciclo.

Las asignaturas de **Primer Ciclo** que se imparten corresponden a las distintas especialidades de la Diplomatura de E.G.B. y son:

* Matemáticas 1º, común a todas las Especialidades.
* Matemáticas 2º, Especialidad de Ciencias.
* Didáctica de las Matemáticas, Especialidad de Ciencias.
* Matemáticas 3º, Especialidad de Ciencias.
* Area Lógico-Matemática, Especialidad Preescolar.
* Didáctica de las Matemáticas Ciclos Inicial y Medio, todas las Especialidades.
* Didáctica de la Matemática II, optativa.
* Didáctica de la Geometría, optativa.
* Estadística y su Didáctica, optativa.
* Informática aplicada a la Educación, optativa.

Las asignaturas de **Segundo Ciclo** que se imparten son:

* Didáctica de la Matemática en el Bachillerato.
* Prácticas de Enseñanza en Institutos.

,ambas de 5º Curso de la Licenciatura de Matemáticas, especialidad de Metodología.

Las asignaturas de Tercer Ciclo que se imparten en el Programa de Doctorado son:

* Teoría de la Educación Matemática.
* Diseño, Desarrollo y Evaluación del Curriculo de Matemáticas.
* Seminario de Didáctica de la Matemática I y II.
* Diseño de Investigación en Educación Matemática.
* Métodos y Técnicas de observación, encuesta y medida en Educación Matemática.
* Ordenadores y Educación Matemática.
* Psicología y Educación Matemática.
* Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática: cuadro conceptual y métodos.
* Seminario de Análisis de Datos I y II.
* Agenda de Investigación en la Formación de Profesores de Matemáticas.
* Pensamiento Numérico.
* Formal and intuitive reasoning in Mathematics Education.
* Didáctica de la Probabilidad y la Estadística.
* Epistemología y Didáctica de la Geometría.
* La Investigación histórica en Educación Matemática.
* Epistemología y Didáctica del Algebra.

Más adelante, se comentará en detalle el Diseño y Objetivos del Programa de Doctorado.

En coordinación con el Departamento de didáctica de las Ciencias Experimentales, nuestro Departamento ha puesto en marcha un Curso de Formación Permanente denominado *“Master de Ingeniería en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales”*, dentro de los Programas del Fondo Social Europeo.

El Departamento de Didáctica de la Matemática desarrolla las siguientes líneas de Investigación:

* Diseño, Desarrollo y Evaluación del Currículo de M
* Pensamiento Numérico.
* Ordenadores y Educación Matemática.
* Didáctica de la Estadística y la Probabilidad.

que tienen concedidas ayudas y becas con cargo a los Planes Andaluz y Nacional de Investigación. El siguiente cuadro resume la organización y competencias del Departamento:

En los últimos años han impartido docencia en nuestro Departamento los siguientes Profesores visitantes:

* Prof. Dra. M. Artigue (U. París VII). (1988, 1989).
* Prof. Dr. A. Bell (U. Nothingham). (1989).
* Prof. Dr. G. Brousseau (U. Bourdeaux). (1987,1988,1990,1992).
* Prof. D. Y. Chevallard (U. Marsella). (1990, 1992).
* Prof. Dra. R. Douady (U. París VII). (1989, 1990).
* Prof. D. D. Fielker (Chelsea College. London). (1989).
* Prof. Dr. E. Fischbein (U. Tel Aviv). (1991).
* Prof. Dr. M. de Guzmán (U. Complutense). (1991).
* Prof. Dr. A. Hoffer (U. Boston). (1990).
* Prof. Dr. J. Kilpatrick (U. Georgia). (1989, 1991).
* Prof. Dr. S. Llinares (U. Sevilla). (1991).
* Prof. Dr. A. Rouchier (U. Orleans). (1989, 1991).
* Prof. Dr. H. Steiner (U. Bielefeld). (1992).
* Prof. Dr. G. Vergnaud (CRNS. París). (1991).

Igualmente, el Departamento ha promovido la firma de convenios con las Universidades de Bourdeaux (Francia), Valencia, Los Andes (Colombia) y la Universidad Nacional Autónoma de México.

Las visitas de los Profesores a centros de investigación y universidades extranjeras comienzan a hacerse frecuentes dentro del Programa Erasmus, así como la participación en Simposios, Encuentros y Congresos nacionales e internacionales.

La política de dotación de fondos bibliográficos ha continuado y va a continuar, hasta lograr disponer de los fondos de documentación necesarios para un centro de investigación, docencia y extensión universitaria en Educación Matemática como el que debe y quiere ser nuestro Departamento.

Más adelante se desarrollarán con mayor detalle otros resultados y proyectos del Departamento. Quede este apartado como un balance parcial de lo realizado por el

Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada durante sus siete años de existencia.

Quizás el logro más importante haya sido el convertir nuestro Departamento en uno de los motores de empuje para la innovación y el desarrollo de la docencia e investigación sobre Didáctica de la Matemática en nuestro país, en coordinación con nuestros compañeros de otras universidades, principalmente Autónoma de Barcelona, Valencia, Sevilla y Salamanca.

En resumen, nuestro Departamento desempeña las siguientes funciones:

1. Funciones docentes:

* Formación inicial del Profesorado de Educación Primaria, en las Escuelas del Profesorado de EGB del Distrito.
* Formación inicial de Profesorado de Educación Secundaria, en la Facultad de Ciencias.
* Formación Permanente de Profesorado de Educación Primaria y Secundaria, en los Programas del Fondo Social Europeo.
* Formación Permanente de Profesorado de Educación Primaria y Secundaria, en los cursos del ICE de la Universidad de Granada, Centros de Profesores de la Comunidad Autónoma Andaluza y Cursos especializados de la Consejería de Educación.

2. Funciones investigadoras:

* Programa de Tercer Ciclo para el Doctorado en Didáctica de la Matemática.
* Dirección y Realización de Memorias de Tercer Ciclo y Tesis Doctorales.
* Desarrollo de Proyectos de Investigación.
* Dirección a Becarios del Plan Nacional de Investigación.
* Presentación de Ponencias, Comunicaciones y Posters en Congresos.
* Publicación de memorias y resultados de investigación.
* Mantenimiento de biblioteca y hemeroteca especializadas en Didáctica de la Matemática.

* Constitución y mantenimiento de equipos de investigación interniveles.
* Visitas de trabajo a Centros de investigación extranjeros.

3. Extensión Universitaria:

* Publicación de libros y artículos de divulgación.
* Publicación de libros y manuales para escolares y profesores.
* Participación en cursos y conferencias.
* Participación en Consejos asesores y de redacción de revistas profesionales.
* Participación en Sociedades de Profesores de Matemáticas.
* Colaboración en la organización de Congresos y Jornadas sobre Educación Matemática.
* Mantenimiento de ludoteca matemática y materiales didácticos.
* Mantenimiento de un fondo de películas y vídeos sobre Educación Matemática.

4. Participación institucional:

El Profesorado de nuestro Departamento se encuentra comprometido en los diversos organos de Gobierno de nuestra Universidad. En el momento actual hay:

* 5 Profesores miembros del Claustro de la Universidad.
* 2 Profesores miembros de la Junta de Gobierno de la Universidad.
* 1 Profesora miembro de la Junta de Personal de la Universidad.
* 1 Profesor Director de la Escuela Universitaria de EGB de Jaén.
* 1 Profesor miembro del Equipo de Gobierno de la Universidad.
* 1 Profesor subdirector de la Escuela Universitaria de EGB de Almería.
* 1 Profesor secretario de la Escuela Universitaria de EGB de Granada.
* 1 Profesor secretario de la Escuela Universitaria de EGB de Melilla.

Además, todos los profesores numerarios son miembros de las respectivas Juntas de Centro y participan en el Gobierno de los mismos mediante su pertenencia a las Comisiones que existen en cada uno de ellos.

I.2. MARCO ACADÉMICO:

I.2.1. Plan de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada:

La presente Memoria es para concursar a una plaza de Catedrático de Universidad cuya competencia docente viene referida a las asignaturas del Area de Didáctica de la Matemática correspondientes al Plan de estudios vigente en la Licenciatura de Matemáticas. Por ello resulta pertinente hacer una presentación y análisis comentado tanto del plan como de sus especialidades y las asignaturas de nuestra área.

Conviene recordar que este Plan de estudios es muy anterior a la LRU y, por tanto, a la existencia institucional del Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática y del correspondiente Departamento. El Plan de estudios del Título de Licenciado en Ciencias Matemáticas se estructura en dos Ciclos, el primero de materias comunes y tres cursos de duración, cuya regulación aparece en el BOE de 17-XI-1973, según el cuadro que sigue; en el que se expresa la carga docente semanal:

Este Primer Ciclo es de formación común y se estructura sobre cuatro materias fundamentales: Análisis Matemático, Geometría, Algebra y Cálculo de Probabilidades y Estadística (donde las dos primeras tienen mayor peso), y otras tres materias complementarias: Topología, Física General y Cálculo Numérico.

El Segundo Ciclo se organiza en dos cursos y ofrece tres especialidades diferentes: Especialidad de Estadística e Investigación Operativa, Especialidad de Matemática Fundamental y Especialidad de Medodología. La regulación de este Segundo Ciclo y de sus especialidades aparece en el BOE de 15-VII-1977 y se resume en los siguientes cuadros:

En resumen, tenemos:

Se observa una oferta de dos opciones, una de carácter más teórico y otra de carácter más aplicado. Se produce un aumento en la opcionalidad de asignaturas, con la posibilidad de que un alumno puede elaborar su propio currículum; la relación entre las asignaturas que hay que elegir y la oferta que se hace es de 1 a 3.

En resumen tenemos:

Al igual que en la especialidad Estadística, la opcionalidad supone un 25%, tanto del número de asignaturas como del número de horas. La diferencia radica en que, en este caso, hay menos asignaturas y menos horas, por tanto hay menos tiempo lectivo en general, incluida la opcionalidad, que aparece solamente en Quinto Curso.

Observamos que no hay asignaturas optativas, ni tampoco aparecen opciones.

La estructura del Plan para la especialidad de Metodología es totalmente rígida, sin posibilidad de opción y con un número de asignaturas máximo. Más aún, se se compara con el Plan de Matemáticas Fundamentales se observa que todas las asignaturas obligatorias de esa especialidad son también obligatorias para Metodología, constituyendo el 62% de su horario. Se configura así la especialidad de Metodología, como una variante de Fundamentales, en la que su opcionalidad queda resuelta con un cupo fijo de asignaturas de orientación Didáctica. A diferencia de la Especialidad de Estadística e Investigación Operativa, que desarrolla plenamente sus materias ofertando distintas opciones y materias optativas, y en la que las materias básicas de matemáticas tienen sólo un papel subsidiario, en la Especialidad de Metodología no se ha seguido este criterio y el bloque de las asignaturas de especialidad resulta disperso y con poco peso.

Creemos que la época en que fue elaborado este Plan de Estudios, junto con la inexistencia otrora del Departamento de Didáctica de la Matemática, justifican en cierto modo las desigualdades observadas y esa falta de visión global sobre las materias y contenidos específicos que deben dominar los Profesores de Matemáticas durante el periodo de su formación.

Para concluir queremos señalar que, con ligeras variantes, la especialidad de

Metodología existe en el Plan de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas, y se imparte, en las Universidades Autónoma de Barcelona, Complutense de Madrid, y la Laguna. En todas estas Universidades hay una asignatura que se denomina Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, aunque sólo en la Universidad de la Laguna es impartida por profesores del Area de Didáctica de la Matemática.

I.2.2. Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática:

Como ya hemos señalado al describir las competencias del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada nuestra docencia no se agota en el Segundo Ciclo sino que se amplía con un Programa de Tercer Ciclo. Por su carácter pionero en nuestro país y por su innegable interés para el desarrollo del Area de Conocimiento, nos parece importante hacer una presentación y comentarios a este Programa.

En el Real Decreto que regula el Tercer Ciclo de Estudios Universitarios, encontramos:

> *"El Tercer Ciclo, y como demuestra la experiencia comparada, constituye condición esencial para el progreso científico y, por ello, para el progreso social y económico de una comunidad por cuanto de la profundidad de sus contenidos y la seriedad en su planteamiento depende la formación de los investigadores.*
>
> *Por lo demás, el Doctorado tiene una consecuencia adicional de extremada importancia: en él se inicia la formación del Profesorado Universitario. Si se toma en consideración que en la Universidad, docencia e investigación son dimensiones inescindibles, se comprende la importancia que el aprendizaje de ciencias y técnicas especializadas presenta para el Profesorado y, por tanto, para el futuro de los estudiantes universitarios y de la Universidad misma.*
>
> *Por ello, la Ley de Reforma Universitaria considera el Tercer Ciclo decisivo para promover la calidad de la enseñanza y para potenciar la investigación. Cualquier reforma universitaria debe considerarlo no como el apéndice burocrático de los dos primeros, sino como un periodo clave en el que tiene lugar la articulación entre docencia e investigación, y se forman tanto los investigadores como los futuros*

docentes universitarios. No en vano su superación permite acceder al título de mayor relieve académico.
A estos efectos, la Ley de Reforma Universitaria se plantea cuatro grandes objetivos en el campo de los estudios de postgrado:

** Disponer de un marco adecuado para la consecución y transmisión de los avances científicos;*
** Formar a los nuevos investigadores y preparar equipos de investigación que puedan afrontar con éxito el reto que suponen las nuevas ciencias, técnicas y metodologías;*
** Impulsar la formación de nuevo profesorado;*
** Perfeccionar el desarrollo Profesional, científico y artístico de los titulados superiores."*[15]

Queda claro, desde estos supuestos y consideraciones, que el desarrollo de un Area de Conocimiento pasa, necesariamente, por el mantenimiento continuado de un Programa de Tercer Ciclo mediante el que se realicen y logren los anteriores objetivos. Pero en nuestro caso concreto se da un interés añadido: la necesaria promoción de la mayor parte del Profesorado del Departamento, que no tiene el título de Doctor. Durante toda su carrera profesional los docentes del Area de Didáctica de la matemática han visto bloqueadas sus legítimas aspiraciones de lograr el grado académico máximo mediante la realización de un trabajo de investigación en el Area. Hasta el momento, la única oportunidad ha consistido en abandonar transitoriamente su trabajo profesional y sus propios intereses como investigadores (al menos con caracter prioritario) e integrarse en equipos de investigadores de otras disciplinas. La mayor parte de los que han seguido esta opción han concluido una Tesis Doctoral en una de las disciplinas matemáticas que, si bien les ha permitido mejorar la profundidad y calidad de sus conocimientos en Algebra, Análisis, Estadística o Geometría, no cabe duda que también ha supuesto una interrupción en el estudio e investigación dentro de la propia área.

Más recientemente, una mayor flexibilidad en la normativa ha permitido realizar

[15] Real Decreto 185/1985 de 23 de Enero, regulador del Tecer Ciclo de Estudios Universitarios. BOE nº 41 de 16 de Febrero de 1985. Madrid.

Tesis Doctorales cuyo contenido es de Didáctica de la Matemática, en Departamentos de Pedagogía, Psicología o Didáctica General. Podemos señalar esta etapa como de transición, y aunque el contenido de los trabajos y parte de la metodología resultan más próximos a la Didáctica de la Matemática, también es cierto que cada disciplina tiene sus propios intereses e imprime su propia lógica, con las consiguientes desviaciones de los propios objetos de estudio y los trabajos complementarios que se deben realizar para alcanzar un grado aceptable de compromiso con los profesionales del Area en la que, formalmente, se realiza la tesis.

Todos estos motivos, junto con las oportunidades que ofrecía el nuevo marco legal, llevaron en el año 1987 al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada a plantearse como objetivo prioritario el establecimiento de un Programa de Tercer Ciclo en el Area.

Un primer problema a resolver era la carencia de Profesorado propio para impartir la docencia. Con este fin se emprendieron dos medidas: adscripción provisional de la Profa. Dra. C. Batanero, del Area de Estadística e Investigación Oparativa, al Departamento de Didáctica de la Matemática, en virtud del Artículo 15 de los Estatutos de la Universidad de Granada; y la firma de un Convenio de colaboración con la Universidad de Bourdeaux I (Francia), mediante el cual se regulaba la participación de los Profesores M. Artigue, G. Brousseau, Y. Chevallard, R. Douady y A. Rouchier en los Cursos del Programa.

De este modo se pudo dar cumplimiento a lo establecido en el Decreto que regula el Tercer Ciclo:

> *"**Artículo 3º.** Contenido de los Programas de Doctorado:*
> *1. Los Programas de Doctorado deberan comprender:*
> *a) Cursos o Seminarios relacionados con la metodología y formación en técnicas de investigación.*
> *b) Cursos o Seminarios sobre los contenidos fundamentales de los campos científico, técnico o artístico a los que esté dedicado el Programa de Doctorado Correspondiente.*
> *c) Cursos o Seminarios relacionados con campos afines al del Programa y que sean de interés para el proyecto de tésis doctoral del*

doctorando."[16]

El ***Programa de Doctorado*** diseñado, aprobado por el Consejo de Departamento en enero de 1988, y por la Comisión de Doctorado de la Universidad en mayo de 1988, comprende cursos de las tres clases previstas, mencionadas anteriormente; en concreto:

a) Dos cursos de caracter metodológico y formación en técnicas de investigación.
b) Ocho cursos y dos seminarios sobre contenidos fundamentales del Area Didáctica de la Matemática.
c) Cinco cursos sobre campos afines al Programa.

Los cursos completos que abarcó el Primer Programa de Doctorado fueron los siguientes:

Curso 1988-89

- Variables críticas en la Educación Matemática.
- Diseño de investigaciones educativas.
- Los ordenadores en el curriculum de matemáticas.
- Didáctica de la probabilidad y de la estadística en la enseñanza obligatoria.
- Epistémologie et didactique de l'analyse. Cadre conceptuel et méthodes (I).
- Epistémologie et didactique des décimaux et des réeles (I).
- Epistémologie et didactique de: l'informatique, du volume, de la fonction lineaire. Cadre conceptuel (I).
- Didactique et épistémologie experimentale des rationnels. Concepts fondamentaux. Méthodologie (I).
- Lógica e Historia de la Matemática.
- Procesos cognitivos.
- Teoría de semigrupos. Rudimentos y técnicas.

[16] Real Decreto 185/1985. c.

Curso 1989-90

- Métodos cuantitativos en Educación Matemática.
- Pensamiento numérico.
- Integración de la Informática en la enseñanza obligatoria.
- Epistémologie et didactique de l'Analyse. Cadre conceptuel et méthodes (II).
- Epistémologie et didactique de l'Algebre. Cadre conceptuel et méthodes (I).
- Epistémologie et didactique des décimaux et des réeles (II).
- Epistémologie et didactique de: l'informatique, du volume, de la fonction lineaire. Cadre conceptuel (II).
- Didactique et épistémologie experimentale des rationnels. Concepts fondamentaux. Méthodologie (II).
- Epistémologie et didactique de l'Algebre. Cadre conceptuel et méthodes (II).
- Resolución de Problemas.

El número de créditos asignado a los cursos impartidos por los profesores franceses fue de uno y los restantes oscilaron entre 3 y 4.

El alumno inscrito en los estudios de doctorado deberá obtener en el plazo de dos años un total de 32 créditos mediante la aprobación de cursos y seminarios incluidos en el programa, de los cuales sólo dos tienen carácter obligatorio, así como con créditos obtenidos por la realización de un trabajo de investigación, hasta un máximo de 9 créditos.

Los alumnos han de presentar en el Departamento, antes de terminar el Programa, un proyecto de tesis doctoral avalado por el que vaya a ser su director o directores. La tesis deberá terminarse en el plazo de cinco años desde la fecha de inicio de los estudios, ampliables por otros dos años a juicio de la Comisión de Doctorado.

Para ser admitido como alumno de tercer ciclo en este programa el Consejo de Departamento estableció como condiciones: estar en posesión de la Licenciatura en ciencias (Sección de Matemáticas), así como conocimiento de inglés y/o francés a nivel de traducción.

El número de plazas disponibles en esta convocatoria estuvo limitado. En el caso de que el número de aspirantes hubiese sido superior al número de plazas disponibles, el Departamento hubiese seleccionado a los aspirantes en función de los méritos enumerados en el Artículo 7 de las Normas Reguladoras de los Estudios de Tercer Ciclo de la Universidad de Granada, que son los siguientes:

a) Expediente académico del aspirante.
b) Calificaciones obtenidas durante la licenciatura en las asignaturas relacionadas con el Programa.
c) Trabajos y seminarios realizados.
d) Cualesquiera otros méritos que pueda alegar el aspirante relacionados con el Programa de Doctorado.

El Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática quedó incluido dentro del organigrama organizativo de los estudios de Doctorado de la Universidad de Granada en la Subcomisión Asesora 4, que comprende los tipos de Doctorado en Física, Geología, Ingeniería de Caminos, Informática, Matemáticas y Química. Forma parte de la mencionada Subcomisión el Coordinador del Programa.

Concluido el Programa del primer bienio el Consejo de Departamento aprobó un nuevo Programa para el cuatrienio 90-94, cuya relación de Cursos aparece en la descripción de asignaturas que se ha hecho en el apartado I.1.3 de esta memoria.

Durante el primer bienio se matricularon 16 alumnos en el Programa, de los que 12 han recibido ya el reconocimiento de suficiencia para el desarrollo de tareas de investigación, y cuyas Tesis Doctorales se encuentran en estado de progreso. En el bienio en curso 90-92 hay matriculados 14 alumnos, seleccionados entre 21 solicitantes.

La instauración del Programa de Doctorado con el énfasis necesario puesto en la investigación; el diseño, desarrollo, discusión, ejecución, redacción, presentación y defensa de los trabajos de investigación realizados hasta el momento; la preparación de las Memorias de Licenciatura y Proyectos de Tesis; el intercambio de información con los

Profesores invitados y la asistencia a Congresos y reuniones de investigadores, han supuesto un cambio radical en las prioridades de trabajo y la dinámica del Departamento. Podemos afirmar que la mayor parte y lo mejor de nuestras energías se encuentran absorbidas por la necesidad de concluir en un plazo razonable un grupo de Tesis Doctorales de calidad, homologables en la comunidad internacional de investigadores y que consoliden las líneas de investigación del Departamento.

I.2.3. Situación Académica de la Didáctica de la Matemática en otros paises:

La preocupación por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas fuera de nuestras fronteras y su institucionalización académica no son recientes. Sin necesidad de buscar antecedentes históricos muy lejanos, podemos señalar la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del XX, cuando ya se han consolidado las disciplinas matemáticas dentro de la Universidad, como el comienzo de un estudio sistemático sobre los problemas que se derivan de la educación matemática. Las primeras aproximaciones se hacen con participación universitaria.

Así, en el Reino Unido se funda en 1871 la *"Association for the Improvement on Geometrical Teaching (A. I. G.T.)"* a la que pertenecían maestros y en la que colaboraban Profesores Universitarios, que pretendía considerar otro enfoque para la Geometría distinto del de Euclides; con el tiempo la A.I.G.T. se interesó por otras ramas de las

Matemáticas y cambió su nombre a “The Mathematical Association”. En 1894 publican el primer número de “Mathematical Gazzete” una revista que contenía artículos para mejorar la enseñanza de las Matemáticas; esta revista se continúa públicando hasta nuestros días.[17]

Siguiendo el ejemplo de la A.I.G.T. aparecen asociaciones profesionales en otros paises; en los Estados Unidos de América hay que señalar el N.C.T.M. (*“National Council of Teachers of Mathematics”*), fundado en 1928; su publicación periódica *“The Mathematics Teacher”*, continúa hasta la fecha. Además, E.H. Moore, destacado matemático, aboga por una reforma, D. E. Smith pregona el establecimiento de una disciplina de educación matemática y Halsted escribe un tratado de geometría elemental basada no en los Elementos de Euclides sino en los Grundlagen der Geometrie de Hilbert. En 1922, Thorndike publica su *“Psycologie of Arithmetic”*, en la que desarrolla los instrumentos de la teoría conductista para el aprendizaje de las matemáticas.

En Italia, a finales del siglo pasado, la enseñanza de las Matemáticas había decaido al pasar a formar parte de las materias consideradas de segundo orden. Ante este estado de cosas, en 1895, los profesores de Matemáticas reaccionaron creando la asociación “Mathesis”, con el propósito de defender la enseñanza de las Matemáticas; a comienzos de siglo, gracias a la intervención de esta asociación se transformaron los programas en Italia. A esta transformación ayudaron también las opiniones de tres grandes matemáticos, Volterra, Enriques y Castelnuovo, en el sentido de que se debería reflexionar sobre qué fines de la enseñanza de las Matemáticas debían proponerse para formar las nuevas generaciones, en contraposición a las directrices ministeriales, según las cuales las Matemáticas no deben considerarse en sí como conocimiento aplicable a la vida, sino como un medio cultural intelectual, como un gimnasia del pensamiento.

Podemos señalar que, a comienzos de siglo, se produce una considerable expansión de los sistemas educativos en la mayor parte de los paises europeos y en USA, con la consiguiente complejificación derivada del diseño y gestión en relación con la comunicación, desarrollo, adquisición y valoración de conocimiento matemático para

[17] Howson G. (1984). Seventy five years of the International Commision on Mathematical Instruction. Educational Studies in Mathematics. Vol. 15, págg. 75-93.

grandes masas escolares. La aparición de nuevas tecnologías, y el consiguiente planteamiento de innovaciones educativas son otros factores considerables en esta época para la creciente importancia de la educación matemática. Pero es el esfuerzo de algunos profesores universitarios, comprometidos a fondo con la reforma de la enseñanza de las matemáticas, el que lleva a un trabajo sistemático en este campo. Por su carácter destacado, y la influencia posterior que han ejercido, hay que nombrar a los profesores Klein (Alemania) y Perry (Reino Unido). Junto con otros profesores universitarios fundan en 1908 la Comissión Internationale de L'Enseignement Mathématique que desarrolla un activa labor hasta la I Guerra Mundial, (I.C.M.I. en sus siglas actuales). Ya desde sus comienzos, se plantean una serie de cuestiones, que van a orientar el trabajo de la Didáctica de la Matemática y, lo que es más interesante, van señalando la necesidad de un trabajo sólido y sistemático, desde la institución universitaria, para la resolución de estas cuestiones.

En la primera conferencia del ICMI, Roma en 1908, D. E. Smith planteó las siguientes cuestiones:

> * *"¿Cuáles han sido los resultados de los intentos de romper la barrera que separan temas de álgebra y geometría, o de enseñar ambas simultáneamente?. ¿Se han preparado recomendaciones en esta materia?".*
> * *"¿Qué posición se debe tomar en la enseñanza Secundaria sobre la naturaleza de las aplicaciones y la relación entre matemática pura y aplicada?".*
> * *"Cómo deben ser los cursos en la escuela secundaria para aquellos que no quieren ingresar en la Universidad?, ¿y para los que sí quieren ingresar?".*

Los temas de interés continuan en las siguientes reuniones:

- En Milán (1911): Matemáticas que se deben enseñar a los estudiantes de Ciencias Físicas y Naturales. Lugar del rigor en la enseñanza de las Matemáticas. Integración de las diferentes ramas de las Matemáticas en la enseñanza secundaria.

- En Cambridge (1912): La preparación matemática de los físicos en la Universidad, intuición y experimentación en la enseñanza de las Matemáticas en el secundario.

- En París (1914): Los resultados obtenidos en la introducción del cálculo diferencial e integral en el secundario superior. La preparación matemática de los ingenieros en los diferentes países.

De este modo se va tomando conciencia de la necesidad de un tratamiento específico para los problemas didácticos.

La Universidad alemana fue pionera no sólo en la adaptación del contenido a la formación del profesorado y en los estudios específicos sobre educación matemática, con cursos impartidos en varias universidades, sino también con la consecución del Primer Doctorado en Educación Matemática, realizado en Göttingen en 1911 por Rudolf Schimmack, bajo la dirección de F. Klein[18] .

Desde sus comienzos, podemos señalar dos disciplinas que han tenido una considerable influencia en la educación matemática. La primera es la de las propias matemáticas; desde que la educación matemática comienza a desarrollarse en la universidad tiende a interesar a profesores cuyo campo de trabajo estaba en las matemáticas y que se consideran a sí mismos como matemáticos. Estos educadores matemáticos dirigen estudios históricos y filosóficos, informes y algún tipo de investigación empírico. La segunda influencia importante sobre educación matemática es la de la psicología. Desde el desarrollo de la psicología como disciplina y su implicación creciente en la educación, la matemática tomó importancia en los estudios e investigaciones sobre aprendizaje, seguramente debido a su papel destacado en el currículo escolar.

El periodo entre las dos guerras mundiales es de consolidación en educación matemática, y es en esta época cuando comienzan los primeros estudios experimentales sobre aprendizaje de conceptos y destrezas, muy en relación con equipos universitarios de

---

[18] Kilpatrick J. (1991). A History of Research in Mathematics Education, en D.A. Grows (Ed.). Handbook of Research on mathematics teaching and learning. MacMillan. New York.

investigadores en psicología. La consolidación de la Psicología cognitiva como paradigma fundamental, debido al trabajo continuo de distintos investigadores, entre los que cabe destacar a Piaget y Bruner, tuvo una influencia innegable sobre la educación matemática. La recesión económica hizo poco viables las políticas de expansión educativa e innovación en este período; sin embargo, es en las universidades europeas y americanas donde se mantiene el esfuerzo e interés por nuestro campo de trabajo.

A finales de la década de los cincuenta comienzan a surgir proyectos de reforma curricular en varios paises y en los más avanzados la Universidad asume definitiva y sistemáticamente la Educación Matemática como una disciplina cuyas competencias organiza y desarrolla. El interés por los problemas de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en esta época fue tan amplio, con tantas y tan variadas ayudas y recibió impulsos institucionales de las autoridades políticas y administrativas tan señalados, que llevó a la comunidad académica universitaria a diseñar y desarrollar amplios proyectos de investigación, que comprometieron a un número considerable de profesores e investigadores procedentes de diversas disciplinas y que permitieron consolidar equipos amplios y competitivos en muchas universidades importantes. De este modo, la educación matemática comenzó a ser una disciplina universitaria en un número considerable de paises, dedicada a satisfacer las necesidades de una mayor profesionalización en la enseñanza y se inició el desarrollo de diversas materias en los curriculos y programas que ofrecen estas instituciones. Más adelante, dentro de esta Memoria, se desarrollará con más extensión la actividad en este periodo.

La evolución en los últimos años ha sido muy rápida y el grado de desarrollo y complejidad alcanzados, creciente. La situación actual es de consolidación e institucionalización como disciplina universitaria y campo de investigación.

Veamos algunos ejemplos, que nos permiten resumir el momento actual, obtenidos por el Prof. Díaz mediante una encuesta remitida a diversas universidades de Canadá, Reino Unido y USA en octubre del 85, solicitando información relativa a la formación de profesores de matemáticas, y que versaba sobre los siguientes apartados:

- Nivel de los estudios.
- Requisitos exigidos para iniciar los estudios.

- Número de años y/o créditos necesarios para el grado correspondiente.
- Contenidos matemáticos impartidos.
- Contenidos de Didáctica de las Matemáticas.
- Formación de tipo profesional y prácticas de enseñanza.
- Características de la investigación, cuando se exige defensa de una tesis.

De entre los datos obtenidos en este trabajo, y a título de ejemplo, destacamos los relativos a los Certificados de Profesores de la Universidad de Boston (USA) y el Diploma de Educación Matemática de la Universidad de Leeds.

*"**1.- Universidad de Boston:***

El programa para Profesores de Matemáticas, Grado 1-6 incluye un total de 140 créditos, distribuidos del siguiente modo:

A) Cursos por un total de 44 créditos exigidos para ingreso en la School, sobre Humanidades, Ciencias Sociales y Ciencias, impartidos por el College of Liberal Arts.

B) Cursos, impartidos por el College of Liberal Arts (Matemáticas), que suponen un total de 36 créditos, y comprenden: Cálculo (8 créditos), Estadística (4), Informática (4), Algebra Lineal (4), Introducción a la Teoría de Números (4), Introducción a la Geometría Moderna (4), Matemáicas optativas (8 créditos).

C) Cursos, por un total de 60 créditos, impartidos en la School of Education, entre los que se incluyen:

- Métodos de instrucción elemental (12 créditos).
- Métodos de enseñanza de las matemáticas, grados 1-6 (4 créditos).
- Prácticas de enseñanza (12 créditos).

Los restantes créditos, hasta el total de 140, corresponden a cursos sobre Fundamentos de Educación y Psicología.

El programa para Profesores de Matemáticas nivel 5-9 es similar al anterior, pero incluye cambios relativos a las Prácticas y Métodos de enseñanza e instrucción, que en este caso se refieren al nivel correspondiente.

Teniendo en cuenta que una asignatura de 3 a 4 créditos equivale a una de nuestras asignaturas cuatrimestrales, la duración prevista de los estudios es de 4 años.

2.- University of Leeds:

Otra universidad que otorga un Diploma de Educación Matemática para profesores de niños en edades comprendidas entre 8 y 13 años es la University of Leeds (School of Education) del Reino Unido. Para su ingreso se requiere una experiencia previa de al menos tres años y su finalidad es actualizar los conocimientos, tanto en Matemáticas como en Didáctica. El curso dura dos años académicos, a tiempo parcial (una tarde cada semana) y se divide en tres partes:

PARTE I.- El propósito de esta parte es presentar un visión integrada de los estudios educacionales como base para un trabajo más detallado en la enseñanza de las matemáticas. Se realiza un estudio del alumno y la naturaleza del aprendizaje. Asímismo, se estudia el contexto nacional de la educación.

PARTE II.- Esta es la parte principal del curso, versando sobre aspectos como los siguientes:

-Desarrollo del conocimiento y destrezas matemáticas del alumno.
-Estudio de la formación de las ideas matemáticas en los niños,

incluyendo la de los conceptos numéricos y espaciales.
-Uso de distintos métodos y recursos en las clases.
PARTE III.- El alumno debe seguir dos o tres cursos breves. El contenido de estos cursos se basa parcialmente en los propios intereses de los estudiantes y surgen durante las Partes I y II." [19]

Estos dos ejemplos, son una muestra de la situación actual en Formación de Profesorado en las universidades europeas y americanas implicadas en programas de Educación.

De gran interés resulta también conocer la situación relativa a Programas de Doctorado y estudios de postgrado. En el informe *"Formación de Investigadores en Educación Matemática: una Encuesta Internacional"*, presentado por H. Steiner y colaboradores, encontramos algunos datos interesantes sobre programas de formación de investigadores en el campo de la Didáctica de la Matemática a nivel internacional; los datos se han obtenido mediante la preparación de una encuesta que ha sido contestado por 35 universidades de todo el mundo. El cuestionario consta de 27 preguntas, agrupadas en los siguientes apartados:

Un primer bloque de identificación del programa: Universidad, país, departamento y/o centro que lo imparte y titulación otorgada. Esta identificación ha sido seguida de una serie de cuestiones sobre las características generales: si se requiere la realización de cursos específicos, duración, tiempo necesario para completarlos, fecha de inicio y número de estudiantes graduados hasta la fecha. El segundo aspecto estudiado ha sido el profesorado a cargo del programa: preparación académica (grado y área de estudio) situación académica y número de profesores así como de profesores visitantes.

A continuación se ha intentado identificar el perfil del alumno que acude a estos cursos de formación : cuál es su formación inicial y número de años de estudios universitarios exigidos para iniciar el programa. Se pregunta también si es precisa la

---

[19] Díaz, J. (1988). La Formación de Profesores de Matemáticas y la investigación en el Area de Didáctica de la Matemática en otros paises. Revista Educación Nº 2. Universidad de Granada.

experiencia docente previa, y el porcentaje de alumnos que alcanzan la graduación.

El cuarto aspecto es la composición del programa. Se han dividido los posibles cursos, según su contenido, en: metodológicos, específicos de educación matemática, de contenido matemático, pedagógicos, psicológicos y otros temas.

Finalmente se hacen preguntas acerca de la investigación llevada a cabo en el programa; si es o no necesaria la realización de una tesis o memoria de investigación y otros trabajos complementarios; se pregunta por las líneas específicas de investigación del departamento y las tesis realizadas en los últimos cinco años. Se termina pidiendo cualquier otra información que se considere oportuna.

Algunos datos de este estudio quedan resumidos en las siguientes tablas:

“Los cursos de educación matemática comprenden todos los aspectos específicos de estudio del currículo matemático. En algunos casos, incluso hay la posibilidad de elección de tópicos específicos según nivel escolar.

También se incluyen cursos sobre resolución de problemas en matemáticas, el contexto cultural en la educación matemática, fundamentos de la educación matemática. Tambíen existen en este grupo, especialmente en el caso de los programas de doctorado, cursos relacionados con agendas específicas de investigación, como pueden ser: epistemología y didáctica del algebra, del análisis, didáctica de la probabilidad y estadística, pensamiento numérico.

En lo que concierne a la matemática es frecuente en los cursos de maestría que el alumno complete su formación con un número importante de cursos de contenidos matemáticos (Algebra, Estadística, etc.) no cursados con anterioridad. Además, se ofrecen cursos complementarios, como desarrollos recientes en matemáticas,

modelización matemática, fenomenología, etc.
Entre los cursos de carácter pedagógico, se hallan cursos sobre métodos específicos de enseñanza, análisis de la práctica de enseñanza, técnicas de medición en educación, teoría curricular, historia de la educación, evaluación y diagnóstico, estrategias de gestión del aula, educación especial, etc. La mayor parte de cursos psicológicos tratan del desarrollo de conceptos matemáticos en el niño, aprendizaje y cognición, psicología y educación matemática, etc.
Otros cursos impartidos son los relacionados con historia de la matemática, filosofía de la matemática, interdisciplinariedad, informática y educación matemática, historia de la educación matemática, etc." [20] .

Observamos un desarrollo similar en los Programas de Doctorado y Master de las Universidades que han proporcionado contestación a este cuestionario. Se pone de manifiesto que la situación académica de la Didáctica de la Matemática se está consolidando sobre dos ejes fundamentales: formación de profesorado e investigación sobre educación matemática; este asentamiento como disciplina universitaria se está realizando sobre unas bases similares de organización, tipo de formación que se transmite, características de los alumnos que siguen estos estudios, metas que se quieren conseguir y controles y titulaciones.

[20] Steiner H. (1991). Formación de Investigadores en Educación Matemática: una Encuesta Internacional. V. Theory of Mathematical Education conference. Proceedings.

I.3. CONTEXTO SOCIAL:

I.3.1. Sistema Educativo Español. Posición de las Matemáticas en el Sistema Escolar:

El Sistema Educativo Español se encuentra implicado en un proceso de innovación y cambio debido, por un lado, a la necesidad de adaptarse en su estructura y funcionamiento a las transformaciones políticas, sociales, económicas y culturales que se han producido en nuestro país en los últimos veinte años y, por otro, homologarse en el terreno de la educación con el resto de los paises de las Comunidades Europeas.

Así, en el Preámbulo de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo de 3 de Octubre de 1990, leemos:

> *" La Constitución ha atribuido a todos los españoles el derecho a la educación. Ha garantizado las libertades de enseñanza de cátedra y de creación de Centros, así como el derecho a recibir formación religiosa y moral de acuerdo con las propias convicciones. Ha reconocido la participación de padres, profesores y alumnos en el control y gestión de los centros sostenidos con fondos públicos. La Constitución ha encomendado a los poderes públicos que promuevan las condiciones y remuevan los obstáculos para que el derecho a la educación sea disfrutado en condiciones de libertad e igualdad, ha establecido el carácter obligatorio y gratuito de la educación básica y ha redistribuido territorialmente el ejercicio de la competencia en esta materia. Todos estos ejes, así como la capacidad de responder a las aspiraciones educativas de la sociedad han de conformar el nuevo sistema educativo. La progresiva integración de nuestra sociedad en el marco comunitario nos sitúa ante un horizonte de competitividad, movilidad y libre circulación, en una dimensión formativa, que requiere que nuestros estudios y titulaciones se atengan a referencias compartidas y sean homologables en el ámbito de la Comunidad Europea, a fin de no comprometer las posibilidades de nuestros ciudadanos actuales y*

futuros.
El dominio, en fin, del acelerado cambio de los conocimientos y de los procesos culturales y productivos, requiere una formación básica más prolongada, más versátil, capaz de adaptarse a nuevas situaciones mediante un proceso de educación permanente, capaz de responder a las necesidades específicas de cada ciudadano con el objeto de que pueda alcanzar el máximo desarrollo posible." [21]

La LOGSE da forma jurídica a las propuestas de cambio y se convierte en un instrumento esencial de la reforma. Para la articulación de este proyecto de actuación individual y social se plantea varios objetivos sobre los cuales establece un marco legal para la toma de decisiones.

En primer lugar, establece la ampliación de la educación básica hasta los 16 años, haciendo coincidir el final de la escolarización con la edad mínima legal de incorporación al trabajo; esta ampliación se realiza con condiciones de gratuidad y obligatoriedad.

En segundo lugar, realiza una reordenación del Sistema Educativo, estableciendo una serie de etapas así como las finalidades, organización, elementos curriculares, evaluación, promoción y titulación que se derivan en cada caso, las enseñanzas mínimas y la titulación requerida para ser profesor en cada etapa.

Las etapas establecidas son las siguientes:

* **Educación Infantil**, de 0 a 6 años, organizada en dos Ciclos.
* **Educación Primaria**, desde los 6 a los 12 años, organizada en tres Ciclos.
* **Educación Secundaria Obligatoria**, desde los 12 a los 16 años, organizada en dos Ciclos.
* **Educación Secundaria Postobligatoria**, que se divide en un Bachillerato de dos cursos y con cuatro modalidades opcionales, y una Formación Profesional de Grado Medio.

[21] Ley Orgánica 1/1990 de 3 de Octubre, de ordenación General del Sistema Educativo. B.O.E. de 4-X-90. Madrid.

El Sistema Educativo se culmina con la Formación Profesional de grado superior y, por otra parte, con los estudios universitarios, que no se regulan mediante esta ley.

La ley también contempla la regulación de las Enseñanzas de Régimen Especial, que comprende dos grandes ramas: las enseñanzas artísticas y las enseñanzas de idiomas.

Además de dedicar un título a la reforma en profundidad de la formación profesional, se establece toda una normativa para la promoción de la calidad de la enseñanza y la regulación de las actividades pertinentes. Se atribuye al Gobierno la fijación de las enseñanzas mínimas, que constituyen los aspectos básicos del currículo. Las diferentes Administraciones educativas, respetando tales enseñanzas mínimas, establecerán el currículo de los distintos niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del Sistema Educativo.

Como objetivos explícitos a los que se debe orientar la educación se señalan:

* Proporcionar una formación plena para conformar la propia identidad; construir una concepción de la realidad que integre el conocimiento y la valoración ética y moral de la misma;
* Adquirir el respeto a los derechos y libertades fundamentales, hábitos de convivencia democrática y respeto mútuo; integrar las dimensiones individual y comunitaria;
* Adquirir hábitos intelectuales y técnicas de trabajo, así como de conocimientos científicos, técnicos, humanísticos, históricos y estéticos.
* Capacitar para el ejercicio de actividades profesionales.
* Preparar para la participación activa en la vidad social y cultural.

Tanto la Educación Primaria como la Educación Secundaria Obligatoria, que comprenden conjuntamente el periodo de enseñanza general obligatoria, se organizan por áreas de conocimiento, entre las que aparece el **área de Matemáticas** como materia que conforma el currículo durante todo este periodo.

Se establecen cuatro modalidades de bachillerato, cuyas denominaciones son:

- Artes.

- Ciencias de la Naturaleza y de la Salud.

- Humanidades y Ciencias Sociales.

- Tecnología.

En las tres últimas modalidades las matemáticas aparecen dentro de las materias propias, organizadas en dos cursos: obligatorio el primero y opcional el segundo; también aparece una asignatura optativa en el Bachillerato de Artes denominada Matemáticas de la Forma.

Así, la materia de matemáticas continúa desempeñando un papel fundamental en el periodo de la formación obligatoria, ya que se mantiene dentro de los conocimientos básicos que forman parte del currículo en dicho periodo. Tanto en el documento Diseño Curricular Base, Educación Primaria (MEC, 1989) como en el documento Diseño Curricular Base, Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 1989), las matemáticas aparecen entre las disciplinas generales, cuyo desarrollo corresponde realizar a lo largo de todos los cursos. Estos documentos desglosan los principios generales de la ley y entran en el detalle del desarrollo curricular de las diversas materias.

Ambos documentos dedican un capítulo al Curriculo de Matemáticas en el periodo correspondiente, cuya estructura es muy similar y que se articula del siguiente modo:

1. Consideraciones generales sobre las matemáticas escolares.
2. Matemáticas en Primaria/ Secundaria:
    i) Consideraciones generales.
    ii) Objetivos generales.
    iii) Bloques de contenidos, con su desarrollo.
    iv) Orientaciones didácticas y para la evaluación.

Es importante destacar que el primer apartado es común a ambos documentos, lo cual pone de manifiesto que los fines generales de la formación matemática son los mismos durante toda la enseñanza obligatoria, y que esta formación ha sido pensada como un todo continuo, por encima de las divisiones administrativas que conlleva la organización en dos etapas. Este planteamiento nos parece una modificación sustancial respecto de planes anteriores ya que obliga a diseñar conjuntamente los curriculos de Matemáticas de Primaria y Secundaria, considerándolos como partes de un mismo plan y no como etapas con objetivos distintos, e incluso con intereses contrapuestos.

Este apartado, denominado *"Consideraciones generales de las matemáticas escolares"* , tiene una extensión de 7 páginas y, a lo largo del mismo, se desarrollan las ideas claves de cuáles son las funciones y finalidades de las matemáticas escolares. El documento comienza reconociendo el papel destacado de las matemáticas en el curriculo de la Educación Obligatoria; establece que pueden plantearse diferentes alternativas en el enfoque para las matemáticas escolares y destaca el papel que desempeñan en el desarrollo de los alumnos. A partir de ahí, la filosofía del documento se va explicitando en los siguientes puntos:

1. Las matemáticas evolucionan continuamente, y están relacionadas con otros conocimientos. Esto implica que no convenga presentarlas como un producto cerrado y el que los problemas de otras áreas proporcionen terreno para nuevos conocimientos matemáticos. Las matemáticas modelizan la realidad y validan los modelos.
2. En la construcción de las matemáticas se emplea el razonamiento empírico-deductivo. La deducción formal aparece en una fase posterior.
3. Siguiendo el Informe Cockroft (1984), establece que las matemáticas son un poderoso instrumento de comunicación, conciso y sin ambigüedades. Analiza el papel de las notaciones simbólicas y sostiene que la formalización es sólo el producto final de un largo proceso.
4. Plantea claramente la distinción entre cómo se presentan las matemáticas y cómo se transmiten y adquieren. Se afirma que la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad sobre los objetos.
5. Se enfatiza el caracter constructivo del conocimiento matemático: "el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas en y a partir de la actividad sobre los objetos". Por ello, hay que tener en cuenta el nivel de los alumnos.
6. Se considera que las matemáticas tienen una estructura interna, que relaciona y organiza sus diferentes partes. Realiza un análisis más cuidadoso distinguiendo una componente vertical, que fundamenta unos conceptos en otros, lo que impone una

secuencia temporal determinada en el aprendizaje que hace que algunos aspectos sean obligatorios para poder tratar otros; al destacar la relación entre sus diferentes partes señala procedimientos generales de uso variado y que se pueden emplear en diferentes campos; finalmente, recuerda la dualidad con la que permite contemplar la realidad, exponiendo diversos ejemplos de esta dicotomía: discreto versus continuo, finito versus infinito.

7. Establece la finalidad formativa del conocimiento matemático; habla de competencias cognitivas para planificar el aprendizaje e insiste en que el desarrollo de las capacidades cognitivas que proporcionan las matemáticas, también se puede transferir a otros dominios. Concluye destacando la bondad general del aprendizaje de las matemáticas por la virtualidad de aplicación a otros dominios.
8. Se desarrollan detalladamente las finalidades utilitarias del conocimiento matemático, destacando entre ellas el que se puedan emplear como herramienta para el trabajo en otras áreas, que satisfagan las necesidades del sistema escolar, que sirvan para cubrir las necesidades matemáticas de la vida adulta y que permitan atender las necesidades derivadas de las nuevas tecnologías; en cada uno de los casos se dan ejemplos del interés de la enseñanza de las matemáticas para atender las diversas finalidades utilitarias.
9. Hay una reflexión interesante sobre la complementariedad entre las finalidades formativas y las utilitarias en el desarrollo del currículo de matemáticas; se pretende que en el periodo de la enseñanza obligatoria no haya supeditación de unas a otras, sino que, al contrario, unas apoyen y complementen a las otras.
10. Finalmente, se insiste que en los nuevos programas habrá que dar un peso considerable a la enseñanza y aprendizaje de conceptos y procedimientos de tipo general, aplicables a una gran variedad de situaciones.

En el segundo apartado del documento que venimos comentando, en las Consideraciones Generales, es de destacar la afirmación: *"la contribución que hacen las Matemáticas son decisivas para alcanzar los Objetivos Generales de la Educación Obligatoria"*.

Manteniendo una tradición secular de nuestro sistema escolar, las matemáticas ocupan un lugar preferente en la adquisición de *"capacidades cognitivas o intelectuales; motrices;*

afectivas; de relación interpersonal; y de actuación o inserción social" [22] *Más explícitamente: "podemos decir que la importancia educativa que le atribuimos viene de entender que la Matemática, en sentido amplio, es sinónimo de capacidad para conocer por cuanto la consideramos como un instrumento del pensamiento que permite aprender y comprender lo real, bajo los aspectos cuantitativos y cualitativos, y su capacidad para comunicar ésto a los demás".*[23]

[22] Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria, 1989, MEC. Madrid.

[23] Diseño Curricular de Matemáticas. E. Secundaria 12-16 (1989). Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía. Sevilla.

I.3.2. Educación Matemática. Principales problemas que plantea:

Ya se han mencionado las transformaciones de la sociedad española en los últimos veinte años, y su relación con las funciones que debe desempeñar la Universidad. Pero estas transformaciones afectan a todo el Sistema Educativo.

> *"Durante los años sesenta y setenta el rasgo dominante de los sistemas de enseñanza de la CEE ha sido la expansión cuantitativa en sus diferentes aspectos: aumento de los gastos públicos y privados dedicados a la educación, prolongación sistemática de la duración de la enseñanza obligatoria, cuasi-generalización de la escuela única o integrada hasta los 14-16 años, símbolo de la democratización y el igualitarismo, retraso en la edad media de acceder a la formación profesional, reclutamiento masivo de profesorado joven, y desarrollo y relativo éxito de las teorías económicas de la educación centradas en el capital humano, es decir, en el potencial de la enseñanza como factor clave del desarrollo.*
>
> *En el caso concreto de España la expansión educativa en todas esas dimensiones ha tenido lugar con algún retraso. El año 1975 es el más indicado para marcar el punto de partida de la expansión del sistema educativo español, comparable con el de la mayoría de los paises de la CEE.*
>
> *La expansión del sistema educativo español desde 1975 se ha reflejado en tres ámbitos: la ampliación del número de alumnos, el aumento paralelo del profesorado y el crecimiento del gasto educativo.*
>
> *La ampliación del alumnado ha sido espectacular. En 1989 casi la cuarta parte de los españoles está matriculado en centros de enseñanza reglada.*
>
> *La ampliación del profesorado ha sido aún más rápida. La enseñanza se ha convertido en la primera empresa del país; en estos momentos más de uno de cada cien españoles consagra su vida a la enseñanza. El Profesorado ha crecido en los últimos años a un ritmo del 3 por 100, aproximadamente; sin embargo, la expansión del profesorado no ha*

conseguido ajustarse a la demanda real de profesores especializados" [24]

Es dentro de este marco en el que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas profundizan y desarrollan su dimensión educativa, planteándose nuevas metas y prioridades que desbordan el papel clásico atribuido a esta disciplina, y por esto toma cada vez mayor fuerza una nueva visión de las matemáticas en el sistema escolar, que denominamos Educación Matemática.

Esta nueva visión pasa por una crítica de las funciones que, hasta el momento, han desempeñado las matemáticas en el Sistema Educativo:

> *"La Matemática ha venido ostentando un papel selectivo, independiente de la voluntad y el esfuerzo de los profesores, ya que los objetivos y conocimientos considerados básicos no siempre son conseguidos por la generalidad de los alumnos. Habitualmente se atribuye dicho fracaso tanto al carácter de la matemática misma, como ciencia prestigiosa, exacta y llena de abstracciones, como al talante y caracteres de los sujetos que han de aprenderla (incapacidad para aprender, falta de interés y rigor en el estudio, etc.). Dar un nuevo enfoque al aprendizaje matemático e insertarlo en un planteamiento educativo general, pasa por una redefinición de este Area de trabajo, caracterizando la función y finalidad educativa que le atribuimos"* [25]

Las matemáticas han pasado de desempeñar una función meramente instructiva, en la que debían inculcar la memorización de hechos y la ejercitación de destrezas, a una función educativa más amplia, en la que el conocimiento matemático no se considera aislado del medio cultural ni de los intereses y la afectividad del niño y del joven,

---

[24] González J. (1991). La enseñanza en España: el desafío de los noventa, en Vidal - Beneyto J. (Ed.). España a debate, tomo II. Madrid: Tecnos.

[25] Diseño Curricular de Matemáticas, E. Secundaria 12-16. Op. c.

ampliándose el campo del aprendizaje hasta integrar el dominio de las estructuras conceptuales, ricas en relaciones, con procedimientos y estrategias que abren la puerta a la creatividad, intuición y pensamiento divergente de los alumnos.

También han cambiado las prioridades en educación matemática, y éste es sólo un signo más de que la consideración de las matemáticas en España se ha modificado, y se está modificando, profundamente en estos últimos años.

Esta transformación se explica por el hecho de que las Matemáticas están comenzando a ser uno de los elementos esenciales de la cultura de nuestra época en nuestro país. Esto ocurre porque se da prioridad a la consideración de que se trata de una de las formas básicas de expresión, que permiten comunicar, interpretar, predecir y conjeturar. Las matemáticas no son sólo una disciplina formal que se construye lejos de nosotros y de nuestros intereses, antes bien aparecen en todas las formas de expresión humana.

Nuestro país se encuentra actualmente en la línea de las sociedades modernas y avanzadas, y en este sentido es de especial importancia la integración de valores, hábitos, formas de expresión y razonamiento que provienen del campo de la ciencia, y en particular de las matemáticas. Por lo tanto, al considerar las matemáticas como un elemento de la cultura de nuestra sociedad, importante pero uno más, debemos dejar de concebir las matemáticas como un objeto ya construido que hay que dominar, y debemos comenzar a considerarlas como una forma de pensamiento abierto con margen para la creatividad, cuya ejercitación hay que desarrollar, respetando la autonomía y ritmo en cada persona.

Por otra parte, la extensión a toda la población de la enseñanza obligatoria hasta los 16 años debe suponer un factor de homogeneización social y un aumento del nivel cultural. Los problemas que se derivan de este nuevo marco legal son considerables ya que las prioridades educativas deben dirigirse a aquellos alumnos que no alcancen unas competencias determinadas.

Esto no pone en tela de juicio la necesidad de contar con minorías altamente cualificadas en investigación punta, y que la orientación de esas minorías se comience a considerar desde el sistema escolar, pero esas minorías no pueden estar divorciadas del medio social que las sostiene y que les da su razón profunda de existencia; por tanto, no pueden contraponerse ambas formaciones y, menos aún, orientar el sistema educativo para seleccionar a los integrantes de esas minorías con abandono de los intereses generales. La difusión de valores democráticos, de integración social y comunicación y las necesidades del mercado de trabajo son también elementos claves a tener en cuenta en la planificación y desarrollo de las matemáticas escolares.

Hay que reconocer, definitivamente, que nuestra sociedad y nuestro sistema educativo han cambiado, y deben adaptarse a ese cambio mediante modificaciones profundas en los objetivos, contenidos, metodología y evaluación de las disciplinas escolares y, en particular, de las matemáticas. La situación actual, de cierto desconcierto, debe clarificarse de inmediato planteando el marco más amplio de objetivos que se quieran cubrir mediante la adquisición de capacidades matemáticas, no sólo cognitivas. El Profesor de matemáticas debe tener claras cuales son las dimensiones de la nueva situación en la que debe trabajar.

> *"Los cambios afectan a varias de estas dimensiones, así el Profesor de matemáticas se encuentra con que se han producido cambios importantes en lo que se considera conocimiento matemático al destacarse las estrategias para la resolución de problemas y el conocimiento de procedimientos como aspectos con entidad propia; todo ello lleva necesariamente a una revisión y reorganización de los contenidos. También se ha modificado el modo de trabajar en el aula; desde las clases diseñadas únicamente sobre lecciones magistrales hasta llegar a la dinámica de grupos con énfasis en la participación, elaboración de alternativas propias, discusión y toma de decisiones razonadas, hay una gran distancia que se está recorriendo en el momento actual. Finalmente, y condicionado por los cambios anteriores, estamos asistiendo a una revisión a fondo sobre la evaluación del aprendizaje de los alumnos. La evaluación debe ser orientadora y formativa antes que sumativa y sancionadora, la evaluación debe tener en cuenta no sólo el dominio de definiciones y conceptos o la ejecución de destrezas, sino que debe contemplar competencias más generales, incluyendo la actitud hacia la propia*

matemática. El modo de evaluación, los instrumentos, las finalidades, el modo de comunicar los juicios realizados y su empleo para diagnosticar las dificultades en el aprendizaje, junto con las consecuencias que pueden derivarse de las sucesivas evaluaciones para la promoción de los escolares, son otras tantas cuestiones abiertas aún en el campo de la enseñanza de las matemáticas.

Estas modificaciones, que se derivan de las necesidades sociales, económicas y científicas de nuestro país, nos obligan - obligan a la comunidad de Profesores de Matemáticas- a tomar una perspectiva más amplia y profunda de qué son y para qué sirven las matemáticas y qué papel deben desempeñar en la formación de los jóvenes. Si hasta el momento han predominado los componentes instructivos del conocimiento matemático, cada vez se aprecia con mayor fuerza la insuficiencia de ese planteamiento y se va tomando conciencia de que la formación matemática es una dimensión relevante de la educación de los niños y adolescentes. De ahí que se hable de Educación Matemática, con una visión más integradora de las capacidades humanas que se desarrollan mediante los procesos de aprendizaje de las matemáticas.

Superar el marco clásico en el que se ha venido contemplando la enseñanza de las matemáticas en nuestro país es uno de los retos que tiene planteados no sólo la comunidad actual de profesores de matemáticas sino, principalmente la administración educativa y, en particular, la Universidad como responsable de la formación inicial del Profesorado. Sólo una revisión a fondo de las necesidades que se derivan de una comprensión amplia y profunda del papel cultural que las matemáticas desempeñan puede aportarnos el marco adecuado y los elementos de juicio suficientes para llevar adelante esta tarea de revisión y reestructuración de la educación matemática en nuestro país." [26]

---

[26] L. Rico y M. Sierra (1991). La comunidad de educadores matemáticos, en Gutiérrez A. (Ed.) El Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Ed. Síntesis. Madrid.

La articulación de estas nuevas necesidades, con las adaptaciones correspondientes, no sólo de materiales y libros de texto, sino de un amplio abanico que comprende desde la forma misma de conceptualizar las matemáticas por parte de los profesores hasta las relaciones de poder y disciplina que se establecen en el aula, va a requerir de un largo esfuerzo de preparación, ensayo y error y acomodación no exento de serios problemas y dificultades. Este va a ser uno de los campos de estudio e investigación que más interés van a presentar para el futuro de la Didáctica de la Matemática, y en el que la colaboración y trabajo conjunto entre profesores de distintos niveles va a resultar más necesaria.

I.3.3. Comunidad de Educadores Matemáticos. Organización.

¿Quién es educador matemático?. Tratar de contestar a esta cuestión supone señalar cuáles deben ser los límites de la nueva situación que venimos planteando sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y no resulta sencillo delimitarla por la cantidad de polémica que genera, debido a los cambios profundos que su clarificación implica.

Si bien la aceptación del predominio de los factores educativos que surgen de la enseñanza de las matemáticas sobre los meramente instructivos puede tener un origen y fundamentación ideológico, no cabe duda que también hay razones sociales, culturales y económicas que avalan esta consideración; igualmente hay una explicación racional de la mayor validez de este planteamiento, como hemos argumentado anteriormente. Por ello es pertinente plantearse la cuestión de a quiénes afectan estas consideraciones, quiénes de los profesores de matemáticas deben considerar su profesión desde esta perspectiva.

Entendemos por **educador matemático** a toda persona que pretende formar o instruir a otra, u otras, mediante las matemáticas, es decir, considera las matemáticas, en todo o en parte, como objeto de educación para las personas a cuya formación y desarrollo está contribuyendo.

Con nuestro planteamiento, no exento de aspectos polémicos, puede considerarse educador matemático a todo profesional de la enseñanza cuyo objetivo es transmitir nuevos conocimientos matemáticos a personas en formación. Dentro de esta población están comprendidos los profesores universitarios, aún cuando la materia que transmitan sea de alta especialidad e incluso esté en proceso de investigación. También consideramos educadores matemáticos a los profesores de Secundaria, tanto en la etapa obligatoria como en la postobligatoria; los profesores de matemáticas de los actuales centros de Bachillerato, Formación Profesional y otras enseñanzas de segundo grado están, por derecho propio, dentro de nuestra población. Igualmente, son educadores matemáticos la totalidad del profesorado de la Educación Preescolar y Educación General Básica que estén implicados en la formación matemática de los niños; en esta categoría incluimos igualmente al profesorado correspondiente de la Educación Permanente de Adultos y de

Educación Especial.

Las prioridades y necesidades formativas son muy distintas en cada una de las etapas educativas contempladas. En el nivel universitario predomina la formación en profundidad, el conocimiento de la organización actual y los resultados avanzados más destacables en cada una de las ramas de las matemáticas, así como los campos de investigación a los que los alumnos en formación pueden dedicarse, pero todo ello no excluye la dimensión humana y cultural de ese conocimiento sino que, más bien, le sirve de contrapunto crítico y de marco de referencia, permitiendo que el matemático no se aleje del medio social e intelectual en el que, necesariamente, tiene que trabajar y al cual se debe.

En los niveles universitarios técnicos, escuelas técnicas, o bien en los dedicados a estudios de economía y estadística o, más en general, en todos aquellos estudios en los que las matemáticas constituyen una herramienta imprescindible, incluidas algunas ramas de Formación Profesional, la formación matemática que predomina es la que corresponde a la matemática aplicada. En estos casos no tiene tanta importancia el desarrollo teórico específico cuanto la capacidad para emplear los conceptos y procedimientos matemáticos en la modelización de fenómenos que pongan de manifiesto los elementos cuantitativos, figurativos y lógicos, así como las relaciones que se pueden establecer entre ellos. Los modelos permiten establecer inferencias y relaciones que llevan a determinadas conclusiones sobre el modelo con lo que se puede predecir el comportamiento futuro del fenómeno modelizado y, por tanto, conjeturar los cambios que se van a producir y las regularidades que se van a mantener. En todo este proceso hay, igualmente, una dimensión educativa profunda con la que no sólo se quiere mejorar la capacidad de pensamiento y el desarrollo de la racionalidad en los estudiantes sino también la apreciación y creación de belleza.

En la Educación Preescolar, Primaria y Secundaria predomina el caracter formativo y de desarrollo de capacidades humanas en el aprendizaje de las matemáticas. La formación que han de lograr los alumnos de estos niveles y las competencias específicas que deben adquirir han de ser parte de un conocimiento útil y práctico que no sólo contribuya al desarrollo intelectual de los niños y jóvenes en formación, sino que también les sirva como factor de integración en su medio social y cultural y como elemento de promoción personal.

El profesor de matemáticas, en cualquiera de sus niveles, se encuentra con unas componentes educativas relevantes que interesan por la dimensión social del conocimiento que están transmitiendo y cuya consideración es importante para la consecución del aprendizaje de sus alumnos, que es en definitiva la meta que se quiere alcanzar. Seguramente muchos profesionales de la docencia, en cualquiera de sus niveles, pueden tener serias reservas con bastantes de las afirmaciones que aquí hacemos en relación con las funciones que desempeñan las matemáticas dentro del periodo de la educación obligatoria y con el énfasis puesto en las características formativas que tienen el estudio y aprendizaje de las matemáticas en las etapas no obligatorias del sistema docente. Sin embargo, entendemos que todo profesional de la enseñanza de las matemáticas, al plantearse honestamente su trabajo de formación y transmisión de conocimientos, tiene en cuenta y contempla su acción como una actuación profundamente educativa y, por ello, debe quedar incluido en la comunidad de educadores matemáticos. Más aún, la conceptualización de la Educación Matemática no estará completa hasta que los profesores de todos los niveles no contemplen de modo natural su trabajo como una parte diferenciada de una gran tarea común.

No es fácil delimitar en las Estadísticas Oficiales cuántos docentes quedan comprendidos en nuestra tipificación del educador matemático y tampoco es sencillo determinar en muchos casos si el contenido de la enseñanza se puede considerar o no matemático. De todos modos, aún cuando no podamos cuantificar con precisión a nuestra población, sí hay unos datos de referencia que nos pueden servir para determinar su tamaño aproximado.

Según la Estadística de la enseñanza en España[27] los profesores de los niveles docentes de Preescolar, General Básica y Enseñanzas Medas, tanto de la enseñanza privada como pública, fueron:

[27] Estadística de la Enseñanza en España. Niveles de Preescolar, General Básica y E.E. M.M. 1987/88. (1991). Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Evidentemente, no todos los Profesores computados son educadores matemáticos ya que no contemplan las matemáticas como área de formación o conocimiento a cuya transmisión tengan que contribuir. Cada una de las poblaciones anteriores podemos multiplicarla por un coeficiente de reducción, estimado a la baja, que nos permita tener una aproximación del profesorado implicado en enseñanza de matemáticas desde los niveles más elementales hasta los superiores. Obtenemos así la siguiente tabla:

Los datos estimados nos dicen que un 37% del Profesorado de los niveles no universitarios contemplados tienen competencia en la educación matemática de nuestros niños y jóvenes, constituyendo una población de, al menos, 143.034 personas. También es ilustrativo conocer la población escolar a la que atendieron esos profesores, durante el mencionado curso 85-86.

Si dividimos el total de alumnos matriculados entre el total estimado de educadores matemáticos, tenemos un total de 62 educadores matemáticos por cada 1.000 alumnos como índice aproximado de atención a la Educación Matemática por parte del Sistema Escolar no Universitario en España, durante el Curso 85-86.

Además de los datos de la Tabla 2 hay que considerar los correspondientes al Profesorado univeristario, al menos el de aquellas Areas de Conocimiento que se consideran propiamente matemáticas. Según el Anuario de Estadística Universitaria de 1990 los profesores de Cuerpos Docentes Universitarios de las Areas de Matemáticas eran:

La globalidad de estos profesores supone un 6% del total de Profesores de los Cuerpos Docentes Universitarios. Si sumamos los datos globales de las tablas 2 y 4, aunque los datos se han obtenido de cursos diferentes, la cifra total sigue siendo un dato de referencia como estimación a la baja del total de Profesores que interviene en la Educación Matemática en nuestro país. Desglosando esta cifra según la titulación mínima del profesorado tenemos:

I.3.4. Los Departamentos de Didáctica de la Matemática en relación con la Educación Matemática:

Las relaciones que existen entre los Departamentos de Didáctica con la Educación Matemática son amplias y complejas, implícitas más que explícitas en la mayor parte de los casos, y necesitadas de un desarrollo más sistemático y profundo. De la extensión y calado de estas relaciones depende que la Didáctica de la Matemática sea una disciplina viva y funcional, que interese y atraiga a los investigadores y que los resultados de sus trabajos sean útiles a la comunidad educativa a la que debe servir.

Hay que tener en cuenta que la Educación Matemática es una de las profesiones básicas que se derivan de las matemáticas y que, como ya se ha dicho, está formada por el colectivo de todos aquellos educadores que trabajan en el amplio campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en cualquiera de los niveles del Sistema Educativo. No es la única profesión para las que preparan las matemáticas. En términos generales, hay un colectivo de investigadores que forman una comunidad científica en la que se crean y construyen, se controlan y se confirman los resultados de la reflexión, estudio e investigación en las diversas disciplinas matemáticas.

Hay un tercer grupo de profesionales, cuya formación universitaria ha estado constituida, en su mayor parte, por los conocimientos consolidados más destacables de las Ciencias Matemáticas. Concluida su preparación ponen los conocimientos adquiridos al servicio de una multitud de campos diferentes: administración, organización y gestión de empresas, economías, información, ingeniería, robótica y muchos otros.

La mejora y el avance de los servicios, del comercio, la industria y la investigación en nuestro país son efecto y causa de la participación de un número creciente de licenciados en matemáticas, u otras titulaciones en las que las disciplinas matemáticas tienen un peso considerable. Estos campos en los que el matemático se incorpora como profesional destacado son los que contribuyen al reconocimiento social de nuestros estudios, por la especial cualificación que proporcionan para el tratamiento y solución de los problemas más variados. Estos profesionales son hombres comprometidos con su medio social, que aplican y utilizan las matemáticas destacando sus aspectos de conocimiento útil, y que hacen una aportación considerable al progreso, avance y desarrollo de la comunidad a la que pertenecen.

> *"El término " músico", en el habla corriente, puede referirse a un compositor, un intérprete o un profesor de música, y las posibles superposiciones de estas actividades. De la misma manera, el término "matemático" puede designar a un profesor de matemáticas, un usuario de las matemáticas o un matemático creador"*[28]

Tengamos en cuenta que los educadores matemáticos son sólo una parte de los profesionales cuya formación se deriva de las matemáticas, pero que no todos los educadores matemáticos han recibido su formación inicial en una licenciatura de Matemáticas. Esto hace que muchas veces puedan darse puntos de vista contrapuestos sobre lo que debe ser la Educación Matemática y cuáles sus dependencias e intereses en relación con las disciplinas matemáticas. Aquí es donde encuentra la Didáctica de la Matemática una de las razones para su consolidación. La Didáctica de la Matemática debe realizar el estudio formal y desarrollar la investigación para la descripción, conocimiento, previsión, control y valoración de los fenómenos que se producen en la adquisición, desarrollo, consolidación, comunicación, transmisión y evaluación del conocimiento matemático.

La Didáctica estudia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, trabaja sobre el núcleo de los problemas que afectan a la Educación Matemática; su campo de estudio e investigación, son las múltiples tareas que inciden en el trabajo o que realizan los educadores matemáticos. Por eso la red intrincada de relaciones que existe entre nuestra disciplina y el trabajo que se realiza en las aulas, o que gira en torno a lo ejecutado o por ejecutar en esas aulas, es sumamente compleja y delicada, merecedora de nuestro máximo interés, estudio y dedicación.

Los Departamentos de Didáctica de la Matemática son también centros de

[28] Dieundonné J. (1989). En honor del espíritu humano. Madrid: Alianza Editorial.

formación; trabajan en formación inicial de Profesorado. Sería excesivo atribuir todos los desajustes del actual sistema educativo en relación con el aprendizaje de las matemáticas por parte de nuestros escolares a la Didáctica de la Matemática. Más bien ocurre al contrario; conforme se va conociendo con mayor precisión el modo, las condiciones y procesos en el aprendizaje de parcelas concretas del conocimiento matemático, mayores posibilidades de una formación adecuada del profesorado se van presentando. No obstante los avances que recientemente se están produciendo, hay necesidades muy serias de emprender una reforma en formación inicial, complementaria de la Reforma que se ha producido en el Sistema Educativo y, en particular, en la Educación Secundaria Obligatoria. Pretender abordar las nuevas necesidades que se plantean en Educación en base a la preparación que están recibiendo los futuros licenciados en matemáticas es un despropósito; ya hemos visto cómo el actual plan de estudios en la Universidad de Granada ofrece unas oportunidades formativas reducidas e insuficientes. Y no es este el único problema. La educación matemática de nuestros escolares la realizan también, como se ha indicado, un considerable número de profesores de los niveles de Preescolar y Educación Primaria. Mantener las grandes diferencias en la formación psicopedagógica y en el dominio de contenidos matemáticos entre los Diplomados, profesores de EGB, y los Licenciados es una actitud incongruente con los nuevos planteamientos del Sistema Educativo en nuestro país. Sin embargo, las soluciones no se improvisan ni aparecen por generación espontánea. La Didáctica de la Matemática debe reflexionar y trabajar profundamente en este campo de la formación inicial del profesorado, ya que es aquí donde surgen gran parte de los problemas que van a pesar luego en la formación y educación de niños y adolescentes.

Estas tareas no se pueden plantear como distintas y contrapuestas a la investigación. Los Departamentos de Didáctica investigan sobre actuaciones de aprendizaje concretas de alumnos concretos ante propuestas detalladas de enseñanza sobre conocimientos matemáticos específicos; también hacen estudios comparativos y longitudinales. Estas investigaciones son de laboratorio, pero también también son en muchos casos - los más interesantes- experiencias que comprometen a profesores en ejercicio. La participación conjunta de especialistas en areas concretas y de profesores en la constitución de equipos de investigación y el diseño y ejecución de proyectos concretos es uno de los campos más fecundos, aún por explorar en Didáctica de la Matemática.

La Universidad debe asumir con todas sus consecuencias que una de sus funciones esenciales es la Formación Inicial del Profesorado, y que son los Departamentos educativos, entre ellos el de Didáctica de la Matemática, los encargados de liderar esta tarea. Asumir seriamente esta responsabilidad pasa por racionalizar esa formación, con la elaboración de un plan, la coordinación y fusión de los distintos organismos en los que aún se atomizan las competencias sobre este tema; pasa, igualmente, por establecer una red de centros para las prácticas de enseñanza, incentivando a los profesores tutores y proporcionando la infraestructura necesaria. Una coordinación obligatoria institucionalizada con las Administraciones educativas responsables de la formación permanente es, igualmente, un elemento indispensable en las relaciones entre los Departamentos de Didáctica de la Matemática y la Educación Matemática.

El campo de trabajo no se agota con esto. Como veremos más adelante en esta memoria son muchas las posibilidades de trabajo de los Profesores de Didáctica de la Matemática en Educación Matemática. Su participación activa en las Sociedades de Profesores y Educadores Matemáticos, en las revistas profesionales, en los movimientos de reforma, en los Congresos y Jornadas, en la elaboración de documentos y, en todos los casos, su compromiso personal con la innovación y mejora de la educación, son conexiones reales y cotidianas entre el trabajo académico y el educativo, tarea ésta que no debe olvidar nunca el especialista en Didáctica de la Matemática.

Muchas de éstas y otras cuestiones van a recibir un tratamiento más detallado en los apartados que siguen; para concluir, queremos mencionar el hecho, a veces olvidado, de que nuestro especialista en Didáctica también es, y fundamentalmente, un educador matemático con todos los problemas y dificultades que, como vemos, ello conlleva. Con esto queremos insistir una vez más, que el campo de la Didáctica y su organización como disciplina, no suponen la existencia de un nuevo universo platónico en el que se enuncian, plantean y resuelven problemas que luego no tienen nada que ver con la realidad y práctica diarias.

I.2. MARCO ACADÉMICO:

I.2.1. Plan de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas de la

Universidad de Granada:

La presente Memoria es para concursar a una plaza de Catedrático de Universidad cuya competencia docente viene referida a las asignaturas del Area de Didáctica de la Matemática correspondientes al Plan de estudios vigente en la Licenciatura de Matemáticas. Por ello resulta pertinente hacer una presentación y análisis comentado tanto del plan como de sus especialidades y las asignaturas de nuestra área.

Conviene recordar que este Plan de estudios es muy anterior a la LRU y, por tanto, a la existencia institucional del Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática y del correspondiente Departamento. El Plan de estudios del Título de Licenciado en Ciencias Matemáticas se estructura en dos Ciclos, el primero de materias comunes y tres cursos de duración, cuya regulación aparece en el BOE de 17-XI-1973, según el cuadro que sigue; en el que se expresa la carga docente semanal:

Este Primer Ciclo es de formación común y se estructura sobre cuatro materias fundamentales: Análisis Matemático, Geometría, Algebra y Cálculo de Probabilidades y Estadística (donde las dos primeras tienen mayor peso), y otras tres materias complementarias: Topología, Física General y Cálculo Numérico.

El Segundo Ciclo se organiza en dos cursos y ofrece tres especialidades diferentes: Especialidad de Estadística e Investigación Operativa, Especialidad de Matemática Fundamental y Especialidad de Medodología. La regulación de este Segundo Ciclo y de sus especialidades aparece en el BOE de 15-VII-1977 y se resume en los siguientes cuadros:

En resumen, tenemos:

Se observa una oferta de dos opciones, una de carácter más teórico y otra de carácter más aplicado. Se produce un aumento en la opcionalidad de asignaturas, con la posibilidad de que un alumno puede elaborar su propio currículum; la relación entre las asignaturas que hay que elegir y la oferta que se hace es de 1 a 3.

En resumen tenemos:

Al igual que en la especialidad Estadística, la opcionalidad supone un 25%, tanto del número de asignaturas como del número de horas. La diferencia radica en que, en este caso, hay menos asignaturas y menos horas, por tanto hay menos tiempo lectivo en general, incluida la opcionalidad, que aparece solamente en Quinto Curso.

Observamos que no hay asignaturas optativas, ni tampoco aparecen opciones. La estructura del Plan para la especialidad de Metodología es totalmente rígida, sin posibilidad de opción y con un número de asignaturas máximo. Más aún, se se compara con el Plan de Matemáticas Fundamentales se observa que todas las asignaturas obligatorias de esa especialidad son también obligatorias para Metodología, constituyendo el 62% de su horario. Se configura así la especialidad de Metodología, como una variante de Fundamentales, en la que su opcionalidad queda resuelta con un cupo fijo de asignaturas de orientación Didáctica. A diferencia de la Especialidad de Estadística e Investigación Operativa, que desarrolla plenamente sus materias ofertando distintas opciones y materias optativas, y en la que las materias básicas de matemáticas tienen sólo un papel subsidiario, en la Especialidad de Metodología no se ha seguido este criterio y el bloque de las asignaturas de especialidad resulta disperso y con poco peso.

Creemos que la época en que fue elaborado este Plan de Estudios, junto con la inexistencia otrora del Departamento de Didáctica de la Matemática, justifican en cierto modo las desigualdades observadas y esa falta de visión global sobre las materias y contenidos específicos que deben dominar los Profesores de Matemáticas durante el periodo de su formación.

Para concluir queremos señalar que, con ligeras variantes, la especialidad de Metodología existe en el Plan de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas, y se imparte, en las Universidades Autónoma de Barcelona, Complutense de Madrid, y la Laguna. En todas estas Universidades hay una asignatura que se denomina Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, aunque sólo en la Universidad de la Laguna es impartida por profesores del Area de Didáctica de la Matemática.

I.2.2. Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática:

Como ya hemos señalado al describir las competencias del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada nuestra docencia no se agota en el Segundo Ciclo sino que se amplía con un Programa de Tercer Ciclo. Por su carácter pionero en nuestro país y por su innegable interés para el desarrollo del Area de Conocimiento, nos parece importante hacer una presentación y comentarios a este Programa.

En el Real Decreto que regula el Tercer Ciclo de Estudios Universitarios, encontramos:

> *"El Tercer Ciclo, y como demuestra la experiencia comparada, constituye condición esencial para el progreso científico y, por ello, para el progreso social y económico de una comunidad por cuanto de la profundidad de sus contenidos y la seriedad en su planteamiento depende la formación de los investigadores.*
>
> *Por lo demás, el Doctorado tiene una consecuencia adicional de extremada importancia: en él se inicia la formación del Profesorado Universitario. Si se toma en consideración que en la Universidad, docencia e investigación son dimensiones inescindibles, se comprende la importancia que el aprendizaje de ciencias y técnicas especializadas presenta para el Profesorado y, por tanto, para el futuro de los estudiantes universitarios y de la Universidad misma.*
>
> *Por ello, la Ley de Reforma Universitaria considera el Tercer Ciclo decisivo para promover la calidad de la enseñanza y para potenciar la investigación. Cualquier reforma universitaria debe considerarlo no como el apéndice burocrático de los dos primeros, sino como un periodo clave en el que tiene lugar la articulación entre docencia e investigación, y se forman tanto los investigadores como los futuros docentes universitarios. No en vano su superación permite acceder al título de mayor relieve académico.*
>
> *A estos efectos, la Ley de Reforma Universitaria se plantea cuatro grandes*

objetivos en el campo de los estudios de postgrado:

** Disponer de un marco adecuado para la consecución y transmisión de los avances científicos;*
** Formar a los nuevos investigadores y preparar equipos de investigación que puedan afrontar con éxito el reto que suponen las nuevas ciencias, técnicas y metodologías;*
** Impulsar la formación de nuevo profesorado;*
** Perfeccionar el desarrollo Profesional, científico y artístico de los titulados superiores."* [29]

Queda claro, desde estos supuestos y consideraciones, que el desarrollo de un Area de Conocimiento pasa, necesariamente, por el mantenimiento continuado de un Programa de Tercer Ciclo mediante el que se realicen y logren los anteriores objetivos. Pero en nuestro caso concreto se da un interés añadido: la necesaria promoción de la mayor parte del Profesorado del Departamento, que no tiene el título de Doctor. Durante toda su carrera profesional los docentes del Area de Didáctica de la matemática han visto bloqueadas sus legítimas aspiraciones de lograr el grado académico máximo mediante la realización de un trabajo de investigación en el Area. Hasta el momento, la única oportunidad ha consistido en abandonar transitoriamente su trabajo profesional y sus propios intereses como investigadores (al menos con caracter prioritario) e integrarse en equipos de investigadores de otras disciplinas. La mayor parte de los que han seguido esta opción han concluido una Tesis Doctoral en una de las disciplinas matemáticas que, si bien les ha permitido mejorar la profundidad y calidad de sus conocimientos en Algebra, Análisis, Estadística o Geometría, no cabe duda que también ha supuesto una interrupción en el estudio e investigación dentro de la propia área.

Más recientemente, una mayor flexibilidad en la normativa ha permitido realizar Tesis Doctorales cuyo contenido es de Didáctica de la Matemática, en Departamentos de Pedagogía, Psicología o Didáctica General. Podemos señalar esta etapa como de transición, y aunque el contenido de los trabajos y parte de la metodología resultan más próximos a la Didáctica de la

---

[29] Real Decreto 185/1985 de 23 de Enero, regulador del Tecer Ciclo de Estudios Universitarios. BOE nº 41 de 16 de Febrero de 1985. Madrid.

Matemática, también es cierto que cada disciplina tiene sus propios intereses e imprime su propia lógica, con las consiguientes desviaciones de los propios objetos de estudio y los trabajos complementarios que se deben realizar para alcanzar un grado aceptable de compromiso con los profesionales del Area en la que, formalmente, se realiza la tesis.

Todos estos motivos, junto con las oportunidades que ofrecía el nuevo marco legal, llevaron en el año 1987 al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada a plantearse como objetivo prioritario el establecimiento de un Programa de Tercer Ciclo en el Area.

Un primer problema a resolver era la carencia de Profesorado propio para impartir la docencia. Con este fin se emprendieron dos medidas: adscripción provisional de la Profa. Dra. C. Batanero, del Area de Estadística e Investigación Oparativa, al Departamento de Didáctica de la Matemática, en virtud del Artículo 15 de los Estatutos de la Universidad de Granada; y la firma de un Convenio de colaboración con la Universidad de Bourdeaux I (Francia), mediante el cual se regulaba la participación de los Profesores M. Artigue, G. Brousseau, Y. Chevallard, R. Douady y A. Rouchier en los Cursos del Programa. De este modo se pudo dar cumplimiento a lo establecido en el Decreto que regula el Tercer Ciclo:

> *"**Artículo 3º.** Contenido de los Programas de Doctorado:*
> *1. Los Programas de Doctorado deberan comprender:*
> *a) Cursos o Seminarios relacionados con la metodología y formación en técnicas de investigación.*
> *b) Cursos o Seminarios sobre los contenidos fundamentales de los campos científico, técnico o artístico a los que esté dedicado el Programa de Doctorado Correspondiente.*
> *c) Cursos o Seminarios relacionados con campos afines al del Programa y que sean de interés para el proyecto de tésis doctoral del doctorando."* [30]

El **Programa de Doctorado** diseñado, aprobado por el Consejo de Departamento en enero de 1988, y por la Comisión de Doctorado de la Universidad en mayo de 1988, comprende

[30] Real Decreto 185/1985. c.

cursos de las tres clases previstas, mencionadas anteriormente; en concreto:

a) Dos cursos de caracter metodológico y formación en técnicas de investigación.
b) Ocho cursos y dos seminarios sobre contenidos fundamentales del Area Didáctica de la Matemática.
c) Cinco cursos sobre campos afines al Programa.

Los cursos completos que abarcó el Primer Programa de Doctorado fueron los siguientes:

Curso 1988-89

- Variables críticas en la Educación Matemática.
- Diseño de investigaciones educativas.
- Los ordenadores en el curriculum de matemáticas.
- Didáctica de la probabilidad y de la estadística en la enseñanza obligatoria.
- Epistémologie et didactique de l'analyse. Cadre conceptuel et méthodes (I).
- Epistémologie et didactique des décimaux et des réeles (I).
- Epistémologie et didactique de: l'informatique, du volume, de la fonction lineaire. Cadre conceptuel (I).
- Didactique et épistémologie experimentale des rationnels. Concepts fondamentaux. Méthodologie (I).
- Lógica e Historia de la Matemática.
- Procesos cognitivos.
- Teoría de semigrupos. Rudimentos y técnicas.

Curso 1989-90

- Métodos cuantitativos en Educación Matemática.
- Pensamiento numérico.
- Integración de la Informática en la enseñanza obligatoria.
- Epistémologie et didactique de l'Analyse. Cadre conceptuel et méthodes (II).
- Epistémologie et didactique de l'Algebre. Cadre conceptuel et méthodes (I).

- Epistémologie et didactique des décimaux et des réeles (II).
- Epistémologie et didactique de: l'informatique, du volume, de la fonction lineaire. Cadre conceptuel (II).
- Didactique et épistémologie experimentale des rationnels. Concepts fondamentaux. Méthodologie (II).
- Epistémologie et didactique de l'Algebre. Cadre conceptuel et méthodes (II).
- Resolución de Problemas.

El número de créditos asignado a los cursos impartidos por los profesores franceses fue de uno y los restantes oscilaron entre 3 y 4.

El alumno inscrito en los estudios de doctorado deberá obtener en el plazo de dos años un total de 32 créditos mediante la aprobación de cursos y seminarios incluidos en el programa, de los cuales sólo dos tienen carácter obligatorio, así como con créditos obtenidos por la realización de un trabajo de investigación, hasta un máximo de 9 créditos.

Los alumnos han de presentar en el Departamento, antes de terminar el Programa, un proyecto de tesis doctoral avalado por el que vaya a ser su director o directores. La tesis deberá terminarse en el plazo de cinco años desde la fecha de inicio de los estudios, ampliables por otros dos años a juicio de la Comisión de Doctorado.

Para ser admitido como alumno de tercer ciclo en este programa el Consejo de Departamento estableció como condiciones: estar en posesión de la Licenciatura en ciencias (Sección de Matemáticas), así como conocimiento de inglés y/o francés a nivel de traducción.

El número de plazas disponibles en esta convocatoria estuvo limitado. En el caso de que el número de aspirantes hubiese sido superior al número de plazas disponibles, el Departamento hubiese seleccionado a los aspirantes en función de los méritos enumerados en el Artículo 7 de las Normas Reguladoras de los Estudios de Tercer Ciclo de la Universidad de Granada, que son los siguientes:

a) Expediente académico del aspirante.
b) Calificaciones obtenidas durante la licenciatura en las asignaturas relacionadas con el

Programa.

c) Trabajos y seminarios realizados.

d) Cualesquiera otros méritos que pueda alegar el aspirante relacionados con el Programa de Doctorado.

El Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática quedó incluido dentro del organigrama organizativo de los estudios de Doctorado de la Universidad de Granada en la Subcomisión Asesora 4, que comprende los tipos de Doctorado en Física, Geología, Ingeniería de Caminos, Informática, Matemáticas y Química. Forma parte de la mencionada Subcomisión el Coordinador del Programa.

Concluido el Programa del primer bienio el Consejo de Departamento aprobó un nuevo Programa para el cuatrienio 90-94, cuya relación de Cursos aparece en la descripción de asignaturas que se ha hecho en el apartado I.1.3 de esta memoria.

Durante el primer bienio se matricularon 16 alumnos en el Programa, de los que 12 han recibido ya el reconocimiento de suficiencia para el desarrollo de tareas de investigación, y cuyas Tesis Doctorales se encuentran en estado de progreso. En el bienio en curso 90-92 hay matriculados 14 alumnos, seleccionados entre 21 solicitantes.

La instauración del Programa de Doctorado con el énfasis necesario puesto en la investigación; el diseño, desarrollo, discusión, ejecución, redacción, presentación y defensa de los trabajos de investigación realizados hasta el momento; la preparación de las Memorias de Licenciatura y Proyectos de Tesis; el intercambio de información con los Profesores invitados y la asistencia a Congresos y reuniones de investigadores, han supuesto un cambio radical en las prioridades de trabajo y la dinámica del Departamento. Podemos afirmar que la mayor parte y lo mejor de nuestras energías se encuentran absorbidas por la necesidad de concluir en un plazo razonable un grupo de Tesis Doctorales de calidad, homologables en la comunidad internacional de investigadores y que consoliden las líneas de investigación del Departamento.

I.2.3. Situación Académica de la Didáctica de la Matemática en otros paises:

La preocupación por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas fuera de nuestras fronteras y su institucionalización académica no son recientes. Sin necesidad de buscar antecedentes históricos muy lejanos, podemos señalar la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del XX, cuando ya se han consolidado las disciplinas matemáticas dentro de la Universidad, como el comienzo de un estudio sistemático sobre los problemas que se derivan de la educación matemática. Las primeras aproximaciones se hacen con participación universitaria.

Así, en el Reino Unido se funda en 1871 la *"Association for the Improvement on Geometrical Teaching (A. I. G.T.)"* a la que pertenecían maestros y en la que colaboraban Profesores Universitarios, que pretendía considerar otro enfoque para la Geometría distinto del de Euclides; con el tiempo la A.I.G.T. se interesó por otras ramas de las Matemáticas y cambió su nombre a *"The Mathematical Association"*. En 1894 publican el primer número de "Mathematical Gazzete" una revista que contenía artículos para mejorar la enseñanza de las Matemáticas; esta revista se continúa públicando hasta nuestros días.[31]

Siguiendo el ejemplo de la A.I.G.T. aparecen asociaciones profesionales en otros paises; en los Estados Unidos de América hay que señalar el N.C.T.M. (*"National Council of Teachers of Mathematics"*), fundado en 1928; su publicación periódica *"The Mathematics Teacher"*, continúa hasta la fecha. Además, E.H. Moore, destacado matemático, aboga por una reforma, D. E. Smith pregona el establecimiento de una disciplina de educación matemática y Halsted escribe un tratado de geometría elemental basada no en los Elementos de Euclides sino en los Grundlagen der Geometrie de Hilbert. En 1922, Thorndike publica su *"Psycologie of Arithmetic"*, en la que desarrolla los instrumentos de la teoría conductista para el aprendizaje de las matemáticas.

En Italia, a finales del siglo pasado, la enseñanza de las Matemáticas había decaido al pasar a formar parte de las materias consideradas de segundo orden. Ante este estado de cosas, en

---

[31] Howson G. (1984). Seventy five years of the International Commision on Mathematical Instruction. Educational Studies in Mathematics. Vol. 15, págg. 75-93.

1895, los profesores de Matemáticas reaccionaron creando la asociación *"Mathesis"*, con el propósito de defender la enseñanza de las Matemáticas; a comienzos de siglo, gracias a la intervención de esta asociación se transformaron los programas en Italia. A esta transformación ayudaron también las opiniones de tres grandes matemáticos, Volterra, Enriques y Castelnuovo, en el sentido de que se debería reflexionar sobre qué fines de la enseñanza de las Matemáticas debían proponerse para formar las nuevas generaciones, en contraposición a las directrices ministeriales, según las cuales las Matemáticas no deben considerarse en sí como conocimiento aplicable a la vida, sino como un medio cultural intelectual, como un gimnasia del pensamiento.

Podemos señalar que, a comienzos de siglo, se produce una considerable expansión de los sistemas educativos en la mayor parte de los paises europeos y en USA, con la consiguiente complejificación derivada del diseño y gestión en relación con la comunicación, desarrollo, adquisición y valoración de conocimiento matemático para grandes masas escolares. La aparición de nuevas tecnologías, y el consiguiente planteamiento de innovaciones educativas son otros factores considerables en esta época para la creciente importancia de la educación matemática. Pero es el esfuerzo de algunos profesores universitarios, comprometidos a fondo con la reforma de la enseñanza de las matemáticas, el que lleva a un trabajo sistemático en este campo. Por su carácter destacado, y la influencia posterior que han ejercido, hay que nombrar a los profesores Klein (Alemania) y Perry (Reino Unido). Junto con otros profesores universitarios fundan en 1908 la Comissión Internationale de L'Enseignement Mathématique que desarrolla un activa labor hasta la I Guerra Mundial, (I.C.M.I. en sus siglas actuales). Ya desde sus comienzos, se plantean una serie de cuestiones, que van a orientar el trabajo de la Didáctica de la Matemática y, lo que es más interesante, van señalando la necesidad de un trabajo sólido y sistemático, desde la institución universitaria, para la resolución de estas cuestiones.

En la primera conferencia del ICMI, Roma en 1908, D. E. Smith planteó las siguientes cuestiones:

> * *"¿Cuáles han sido los resultados de los intentos de romper la barrera que separan temas de álgebra y geometría, o de enseñar ambas simultáneamente?. ¿Se han preparado recomendaciones en esta materia?"*.
>
> * *"¿Qué posición se debe tomar en la enseñanza Secundaria sobre la naturaleza de las aplicaciones y la relación entre matemática pura y aplicada?"*.
>
> * *"Cómo deben ser los cursos en la escuela secundaria para aquellos que no*

quieren ingresar en la Universidad?, ¿y para los que sí quieren ingresar?”.

Los temas de interés continuan en las siguientes reuniones:

- En **Milán** (1911): Matemáticas que se deben enseñar a los estudiantes de Ciencias Físicas y Naturales. Lugar del rigor en la enseñanza de las Matemáticas. Integración de las diferentes ramas de las Matemáticas en la enseñanza secundaria.

- En **Cambridge** (1912): La preparación matemática de los físicos en la Universidad, intuición y experimentación en la enseñanza de las Matemáticas en el secundario.

- En **París** (1914): Los resultados obtenidos en la introducción del cálculo diferencial e integral en el secundario superior. La preparación matemática de los ingenieros en los diferentes países.

De este modo se va tomando conciencia de la necesidad de un tratamiento específico para los problemas didácticos.

La Universidad alemana fue pionera no sólo en la adaptación del contenido a la formación del profesorado y en los estudios específicos sobre educación matemática, con cursos impartidos en varias universidades, sino también con la consecución del Primer Doctorado en Educación Matemática, realizado en Göttingen en 1911 por Rudolf Schimmack, bajo la dirección de F. Klein[32] .

Desde sus comienzos, podemos señalar dos disciplinas que han tenido una considerable influencia en la educación matemática. La primera es la de las propias matemáticas; desde que la educación matemática comienza a desarrollarse en la universidad tiende a interesar a profesores cuyo campo de trabajo estaba en las matemáticas y que se consideran a sí mismos como matemáticos. Estos educadores matemáticos dirigen estudios históricos y filosóficos, informes y algún tipo de investigación empírico. La segunda influencia importante sobre educación matemática es la de la psicología. Desde el desarrollo de la psicología como disciplina y su

---

[32] Kilpatrick J. (1991). A History of Research in Mathematics Education, en D.A. Grows (Ed.). Handbook of Research on mathematics teaching and learning. MacMillan. New York.

implicación creciente en la educación, la matemática tomó importancia en los estudios e investigaciones sobre aprendizaje, seguramente debido a su papel destacado en el currículo escolar.

El periodo entre las dos guerras mundiales es de consolidación en educación matemática, y es en esta época cuando comienzan los primeros estudios experimentales sobre aprendizaje de conceptos y destrezas, muy en relación con equipos universitarios de investigadores en psicología. La consolidación de la Psicología cognitiva como paradigma fundamental, debido al trabajo continuo de distintos investigadores, entre los que cabe destacar a Piaget y Bruner, tuvo una influencia innegable sobre la educación matemática. La recesión económica hizo poco viables las políticas de expansión educativa e innovación en este período; sin embargo, es en las universidades europeas y americanas donde se mantiene el esfuerzo e interés por nuestro campo de trabajo.

A finales de la década de los cincuenta comienzan a surgir proyectos de reforma curricular en varios paises y en los más avanzados la Universidad asume definitiva y sistemáticamente la Educación Matemática como una disciplina cuyas competencias organiza y desarrolla. El interés por los problemas de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en esta época fue tan amplio, con tantas y tan variadas ayudas y recibió impulsos institucionales de las autoridades políticas y administrativas tan señalados, que llevó a la comunidad académica universitaria a diseñar y desarrollar amplios proyectos de investigación, que comprometieron a un número considerable de profesores e investigadores procedentes de diversas disciplinas y que permitieron consolidar equipos amplios y competitivos en muchas universidades importantes. De este modo, la educación matemática comenzó a ser una disciplina universitaria en un número considerable de paises, dedicada a satisfacer las necesidades de una mayor profesionalización en la enseñanza y se inició el desarrollo de diversas materias en los curriculos y programas que ofrecen estas instituciones. Más adelante, dentro de esta Memoria, se desarrollará con más extensión la actividad en este periodo.

La evolución en los últimos años ha sido muy rápida y el grado de desarrollo y complejidad alcanzados, creciente. La situación actual es de consolidación e institucionalización como disciplina universitaria y campo de investigación.

Veamos algunos ejemplos, que nos permiten resumir el momento actual, obtenidos por el

Prof. Díaz mediante una encuesta remitida a diversas universidades de Canadá, Reino Unido y USA en octubre del 85, solicitando información relativa a la formación de profesores de matemáticas, y que versaba sobre los siguientes apartados:

- Nivel de los estudios.
- Requisitos exigidos para iniciar los estudios.
- Número de años y/o créditos necesarios para el grado correspondiente.
- Contenidos matemáticos impartidos.
- Contenidos de Didáctica de las Matemáticas.
- Formación de tipo profesional y prácticas de enseñanza.
- Características de la investigación, cuando se exige defensa de una tesis.

De entre los datos obtenidos en este trabajo, y a título de ejemplo, destacamos los relativos a los Certificados de Profesores de la Universidad de Boston (USA) y el Diploma de Educación Matemática de la Universidad de Leeds.

*"**1.- Universidad de Boston:***

El programa para Profesores de Matemáticas, Grado 1-6 incluye un total de 140 créditos, distribuidos del siguiente modo:

A) Cursos por un total de 44 créditos exigidos para ingreso en la School, sobre Humanidades, Ciencias Sociales y Ciencias, impartidos por el College of Liberal Arts.

B) Cursos, impartidos por el College of Liberal Arts (Matemáticas), que suponen un total de 36 créditos, y comprenden: Cálculo (8 créditos), Estadística (4), Informática (4), Algebra Lineal (4), Introducción a la Teoría de Números (4), Introducción a la Geometría Moderna (4), Matemáicas optativas (8 créditos).

C) Cursos, por un total de 60 créditos, impartidos en la School of Education, entre los que se incluyen:

- *Métodos de instrucción elemental (12 créditos).*
- *Métodos de enseñanza de las matemáticas, grados 1-6 (4 créditos).*
- *Prácticas de enseñanza (12 créditos).*

Los restantes créditos, hasta el total de 140, corresponden a cursos sobre Fundamentos de Educación y Psicología.

El programa para Profesores de Matemáticas nivel 5-9 es similar al anterior, pero incluye cambios relativos a las Prácticas y Métodos de enseñanza e instrucción, que en este caso se refieren al nivel correspondiente.

Teniendo en cuenta que una asignatura de 3 a 4 créditos equivale a una de nuestras asignaturas cuatrimestrales, la duración prevista de los estudios es de 4 años.

2.- University of Leeds:

Otra universidad que otorga un Diploma de Educación Matemática para profesores de niños en edades comprendidas entre 8 y 13 años es la University of Leeds (School of Education) del Reino Unido. Para su ingreso se requiere una experiencia previa de al menos tres años y su finalidad es actualizar los conocimientos, tanto en Matemáticas como en Didáctica. El curso dura dos años académicos, a tiempo parcial (una tarde cada semana) y se divide en tres partes:

PARTE I.- El propósito de esta parte es presentar un visión integrada de los estudios educacionales como base para un trabajo más detallado en la enseñanza de las matemáticas. Se realiza un estudio del alumno y la naturaleza del aprendizaje. Asímismo, se estudia el contexto nacional de la educación.

PARTE II.- Esta es la parte principal del curso, versando sobre aspectos como los siguientes:

-Desarrollo del conocimiento y destrezas matemáticas del alumno.
-Estudio de la formación de las ideas matemáticas en los niños, incluyendo la de los conceptos numéricos y espaciales.
-Uso de distintos métodos y recursos en las clases.
PARTE III.- El alumno debe seguir dos o tres cursos breves. El contenido de estos cursos se basa parcialmente en los propios intereses de los estudiantes y surgen durante las Partes I y II." [33]

Estos dos ejemplos, son una muestra de la situación actual en Formación de Profesorado en las universidades europeas y americanas implicadas en programas de Educación.

De gran interés resulta también conocer la situación relativa a Programas de Doctorado y estudios de postgrado. En el informe *"Formación de Investigadores en Educación Matemática: una Encuesta Internacional"*, presentado por H. Steiner y colaboradores, encontramos algunos datos interesantes sobre programas de formación de investigadores en el campo de la Didáctica de la Matemática a nivel internacional; los datos se han obtenido mediante la preparación de una encuesta que ha sido contestado por 35 universidades de todo el mundo. El cuestionario consta de 27 preguntas, agrupadas en los siguientes apartados:

Un primer bloque de identificación del programa: Universidad, país, departamento y/o centro que lo imparte y titulación otorgada. Esta identificación ha sido seguida de una serie de cuestiones sobre las características generales: si se requiere la realización de cursos específicos, duración, tiempo necesario para completarlos, fecha de inicio y número de estudiantes graduados hasta la fecha. El segundo aspecto estudiado ha sido el profesorado a cargo del programa: preparación académica (grado y área de estudio) situación académica y número de profesores así como de profesores visitantes.

A continuación se ha intentado identificar el perfil del alumno que acude a estos cursos de formación : cuál es su formación inicial y número de años de estudios universitarios exigidos

---

[33] Díaz, J. (1988). La Formación de Profesores de Matemáticas y la investigación en el Area de Didáctica de la Matemática en otros paises. Revista Educación Nº 2. Universidad de Granada.

para iniciar el programa. Se pregunta también si es precisa la experiencia docente previa, y el porcentaje de alumnos que alcanzan la graduación.

El cuarto aspecto es la composición del programa. Se han dividido los posibles cursos, según su contenido, en: metodológicos, específicos de educación matemática, de contenido matemático, pedagógicos, psicológicos y otros temas.

Finalmente se hacen preguntas acerca de la investigación llevada a cabo en el programa; si es o no necesaria la realización de una tesis o memoria de investigación y otros trabajos complementarios; se pregunta por las líneas específicas de investigación del departamento y las tesis realizadas en los últimos cinco años. Se termina pidiendo cualquier otra información que se considere oportuna.

Algunos datos de este estudio quedan resumidos en las siguientes tablas:

“Los cursos de educación matemática comprenden todos los aspectos específicos de estudio del currículo matemático. En algunos casos, incluso hay la posibilidad de elección de tópicos específicos según nivel escolar.
También se incluyen cursos sobre resolución de problemas en matemáticas, el contexto cultural en la educación matemática, fundamentos de la educación matemática. Tambíen existen en este grupo, especialmente en el caso de los programas de doctorado, cursos relacionados con agendas específicas de investigación, como pueden ser: epistemología y didáctica del algebra, del análisis, didáctica de la probabilidad y estadística, pensamiento numérico.
En lo que concierne a la matemática es frecuente en los cursos de maestría que el alumno complete su formación con un número importante de cursos de contenidos matemáticos (Algebra, Estadística, etc.) no cursados con anterioridad. Además, se ofrecen cursos complementarios, como desarrollos recientes en matemáticas, modelización matemática, fenomenología, etc.
Entre los cursos de carácter pedagógico, se hallan cursos sobre métodos específicos de enseñanza, análisis de la práctica de enseñanza, técnicas de medición en educación, teoría curricular, historia de la educación, evaluación y diagnóstico, estrategias de gestión del aula, educación especial, etc. La

mayor parte de cursos psicológicos tratan del desarrollo de conceptos matemáticos en el niño, aprendizaje y cognición, psicología y educación matemática, etc.
Otros cursos impartidos son los relacionados con historia de la matemática, filosofía de la matemática, interdisciplinariedad, informática y educación matemática, historia de la educación matemática, etc." [34].

Observamos un desarrollo similar en los Programas de Doctorado y Master de las Universidades que han proporcionado contestación a este cuestionario. Se pone de manifiesto que la situación académica de la Didáctica de la Matemática se está consolidando sobre dos ejes fundamentales: formación de profesorado e investigación sobre educación matemática; este asentamiento como disciplina universitaria se está realizando sobre unas bases similares de organización, tipo de formación que se transmite, características de los alumnos que siguen estos estudios, metas que se quieren conseguir y controles y titulaciones.

I.3. CONTEXTO SOCIAL:

I.3.1. Sistema Educativo Español. Posición de las Matemáticas en el Sistema Escolar:

El Sistema Educativo Español se encuentra implicado en un proceso de innovación y

[34] Steiner H. (1991). Formación de Investigadores en Educación Matemática: una Encuesta Internacional. V. Theory of Mathematical Education conference. Proceedings.

cambio debido, por un lado, a la necesidad de adaptarse en su estructura y funcionamiento a las transformaciones políticas, sociales, económicas y culturales que se han producido en nuestro país en los últimos veinte años y, por otro, homologarse en el terreno de la educación con el resto de los paises de las Comunidades Europeas.

Así, en el Preámbulo de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo de 3 de Octubre de 1990, leemos:

> *" La Constitución ha atribuido a todos los españoles el derecho a la educación. Ha garantizado las libertades de enseñanza de cátedra y de creación de Centros, así como el derecho a recibir formación religiosa y moral de acuerdo con las propias convicciones. Ha reconocido la participación de padres, profesores y alumnos en el control y gestión de los centros sostenidos con fondos públicos. La Constitución ha encomendado a los poderes públicos que promuevan las condiciones y remuevan los obstáculos para que el derecho a la educación sea disfrutado en condiciones de libertad e igualdad, ha establecido el carácter obligatorio y gratuito de la educación básica y ha redistribuido territorialmente el ejercicio de la competencia en esta materia. Todos estos ejes, así como la capacidad de responder a las aspiraciones educativas de la sociedad han de conformar el nuevo sistema educativo. La progresiva integración de nuestra sociedad en el marco comunitario nos sitúa ante un horizonte de competitividad, movilidad y libre circulación, en una dimensión formativa, que requiere que nuestros estudios y titulaciones se atengan a referencias compartidas y sean homologables en el ámbito de la Comunidad Europea, a fin de no comprometer las posibilidades de nuestros ciudadanos actuales y futuros.*
> *El dominio, en fin, del acelerado cambio de los conocimientos y de los procesos culturales y productivos, requiere una formación básica más prolongada, más versátil, capaz de adaptarse a nuevas situaciones mediante un proceso de educación permanente, capaz de responder a las necesidades específicas de cada ciudadano con el objeto de que pueda alcanzar el máximo*

desarrollo posible." [35]

La LOGSE da forma jurídica a las propuestas de cambio y se convierte en un instrumento esencial de la reforma. Para la articulación de este proyecto de actuación individual y social se plantea varios objetivos sobre los cuales establece un marco legal para la toma de decisiones.

En primer lugar, establece la ampliación de la educación básica hasta los 16 años, haciendo coincidir el final de la escolarización con la edad mínima legal de incorporación al trabajo; esta ampliación se realiza con condiciones de gratuidad y obligatoriedad.

En segundo lugar, realiza una reordenación del Sistema Educativo, estableciendo una serie de etapas así como las finalidades, organización, elementos curriculares, evaluación, promoción y titulación que se derivan en cada caso, las enseñanzas mínimas y la titulación requerida para ser profesor en cada etapa.

Las etapas establecidas son las siguientes:

* **Educación Infantil**, de 0 a 6 años, organizada en dos Ciclos.
* **Educación Primaria**, desde los 6 a los 12 años, organizada en tres Ciclos.
* **Educación Secundaria Obligatoria**, desde los 12 a los 16 años, organizada en dos Ciclos.
* **Educación Secundaria Postobligatoria**, que se divide en un Bachillerato de dos cursos y con cuatro modalidades opcionales, y una Formación Profesional de Grado Medio.

El Sistema Educativo se culmina con la Formación Profesional de grado superior y, por otra parte, con los estudios universitarios, que no se regulan mediante esta ley.

La ley también contempla la regulación de las Enseñanzas de Régimen Especial, que comprende dos grandes ramas: las enseñanzas artísticas y las enseñanzas de idiomas.

Además de dedicar un título a la reforma en profundidad de la formación profesional, se

---

[35] Ley Orgánica 1/1990 de 3 de Octubre, de ordenación General del Sistema Educativo. B.O.E. de 4-X-90. Madrid.

establece toda una normativa para la promoción de la calidad de la enseñanza y la regulación de las actividades pertinentes. Se atribuye al Gobierno la fijación de las enseñanzas mínimas, que constituyen los aspectos básicos del currículo. Las diferentes Administraciones educativas, respetando tales enseñanzas mínimas, establecerán el currículo de los distintos niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del Sistema Educativo.

Como objetivos explícitos a los que se debe orientar la educación se señalan:

* Proporcionar una formación plena para conformar la propia identidad; construir una concepción de la realidad que integre el conocimiento y la valoración ética y moral de la misma;
* Adquirir el respeto a los derechos y libertades fundamentales, hábitos de convivencia democrática y respeto mútuo; integrar las dimensiones individual y comunitaria;
* Adquirir hábitos intelectuales y técnicas de trabajo, así como de conocimientos científicos, técnicos, humanísticos, históricos y estéticos.
* Capacitar para el ejercicio de actividades profesionales.
* Preparar para la participación activa en la vidad social y cultural.

Tanto la Educación Primaria como la Educación Secundaria Obligatoria, que comprenden conjuntamente el periodo de enseñanza general obligatoria, se organizan por áreas de conocimiento, entre las que aparece el **área de Matemáticas** como materia que conforma el currículo durante todo este periodo.

Se establecen cuatro modalidades de bachillerato, cuyas denominaciones son:

- **Artes.**
- **Ciencias de la Naturaleza y de la Salud.**
- **Humanidades y Ciencias Sociales.**
- **Tecnología.**

En las tres últimas modalidades las matemáticas aparecen dentro de las materias propias, organizadas en dos cursos: obligatorio el primero y opcional el segundo; también aparece una asignatura optativa en el Bachillerato de Artes denominada Matemáticas de la Forma.

Así, la materia de matemáticas continúa desempeñando un papel fundamental en el periodo de la formación obligatoria, ya que se mantiene dentro de los conocimientos básicos que forman parte del currículo en dicho periodo. Tanto en el documento Diseño Curricular Base, Educación Primaria (MEC, 1989) como en el documento Diseño Curricular Base, Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 1989), las matemáticas aparecen entre las disciplinas generales, cuyo desarrollo corresponde realizar a lo largo de todos los cursos. Estos documentos desglosan los principios generales de la ley y entran en el detalle del desarrollo curricular de las diversas materias.

Ambos documentos dedican un capítulo al Curriculo de Matemáticas en el periodo correspondiente, cuya estructura es muy similar y que se articula del siguiente modo:

1. Consideraciones generales sobre las matemáticas escolares.
2. Matemáticas en Primaria/ Secundaria:

    i) Consideraciones generales.
    ii) Objetivos generales.
    iii) Bloques de contenidos, con su desarrollo.
    iv) Orientaciones didácticas y para la evaluación.

Es importante destacar que el primer apartado es común a ambos documentos, lo cual pone de manifiesto que los fines generales de la formación matemática son los mismos durante toda la enseñanza obligatoria, y que esta formación ha sido pensada como un todo continuo, por encima de las divisiones administrativas que conlleva la organización en dos etapas. Este planteamiento nos parece una modificación sustancial respecto de planes anteriores ya que obliga a diseñar conjuntamente los curriculos de Matemáticas de Primaria y Secundaria, considerándolos como partes de un mismo plan y no como etapas con objetivos distintos, e incluso con intereses contrapuestos.

Este apartado, denominado *"Consideraciones generales de las matemáticas escolares"* , tiene una extensión de 7 páginas y, a lo largo del mismo, se desarrollan las ideas claves de cuáles son las funciones y finalidades de las matemáticas escolares. El documento comienza reconociendo el papel destacado de las matemáticas en el curriculo de la Educación Obligatoria; establece que pueden plantearse diferentes alternativas en el enfoque para las matemáticas escolares y destaca el papel que desempeñan en el desarrollo de los alumnos. A partir de ahí, la filosofía del documento se va explicitando en los siguientes puntos:

1. Las matemáticas evolucionan continuamente, y están relacionadas con otros conocimientos. Esto implica que no convenga presentarlas como un producto cerrado y el que los problemas de otras áreas proporcionen terreno para nuevos conocimientos matemáticos. Las matemáticas modelizan la realidad y validan los modelos.
2. En la construcción de las matemáticas se emplea el razonamiento empírico-deductivo. La deducción formal aparece en una fase posterior.
3. Siguiendo el Informe Cockroft (1984), establece que las matemáticas son un poderoso instrumento de comunicación, conciso y sin ambigüedades. Analiza el papel de las notaciones simbólicas y sostiene que la formalización es sólo el producto final de un largo proceso.
4. Plantea claramente la distinción entre cómo se presentan las matemáticas y cómo se transmiten y adquieren. Se afirma que la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad sobre los objetos.
5. Se enfatiza el caracter constructivo del conocimiento matemático: *"el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas en y a partir de la actividad sobre los objetos"*. Por ello, hay que tener en cuenta el nivel de los alumnos.
6. Se considera que las matemáticas tienen una estructura interna, que relaciona y organiza sus diferentes partes. Realiza un análisis más cuidadoso distinguiendo una componente vertical, que fundamenta unos conceptos en otros, lo que impone una secuencia temporal determinada en el aprendizaje que hace que algunos aspectos sean obligatorios para poder tratar otros; al destacar la relación entre sus diferentes partes señala procedimientos generales de uso variado y que se pueden emplear en diferentes campos; finalmente, recuerda la dualidad con la que permite contemplar la realidad, exponiendo diversos ejemplos de esta dicotomía: discreto versus continuo, finito versus infinito.
7. Establece la finalidad formativa del conocimiento matemático; habla de competencias cognitivas para planificar el aprendizaje e insiste en que el desarrollo de las capacidades cognitivas que proporcionan las matemáticas, también se puede transferir a otros dominios. Concluye destacando la bondad general del aprendizaje de las matemáticas por la virtualidad de aplicación a otros dominios.
8. Se desarrollan detalladamente las finalidades utilitarias del conocimiento matemático, destacando entre ellas el que se puedan emplear como herramienta para el trabajo en otras áreas, que satisfagan las necesidades del sistema escolar, que sirvan para cubrir las

necesidades matemáticas de la vida adulta y que permitan atender las necesidades derivadas de las nuevas tecnologías; en cada uno de los casos se dan ejemplos del interés de la enseñanza de las matemáticas para atender las diversas finalidades utilitarias.

9. Hay una reflexión interesante sobre la complementariedad entre las finalidades formativas y las utilitarias en el desarrollo del currículo de matemáticas; se pretende que en el periodo de la enseñanza obligatoria no haya supeditación de unas a otras, sino que, al contrario, unas apoyen y complementen a las otras.
10. Finalmente, se insiste que en los nuevos programas habrá que dar un peso considerable a la enseñanza y aprendizaje de conceptos y procedimientos de tipo general, aplicables a una gran variedad de situaciones.

En el segundo apartado del documento que venimos comentando, en las Consideraciones Generales, es de destacar la afirmación: *"la contribución que hacen las Matemáticas son decisivas para alcanzar los Objetivos Generales de la Educación Obligatoria"*.
Manteniendo una tradición secular de nuestro sistema escolar, las matemáticas ocupan un lugar preferente en la adquisición de *"capacidades cognitivas o intelectuales; motrices; afectivas; de relación interpersonal; y de actuación o inserción social"* [36] *Más explícitamente: "podemos decir que la importancia educativa que le atribuimos viene de entender que la Matemática, en sentido amplio, es sinónimo de capacidad para conocer por cuanto la consideramos como un instrumento del pensamiento que permite aprender y comprender lo real, bajo los aspectos cuantitativos y cualitativos, y su capacidad para comunicar ésto a los demás"*.[37]

---

[36] Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria, 1989, MEC. Madrid.

[37] Diseño Curricular de Matemáticas. E. Secundaria 12-16 (1989). Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía. Sevilla.

I.3.2. Educación Matemática. Principales problemas que plantea:

Ya se han mencionado las transformaciones de la sociedad española en los últimos veinte años, y su relación con las funciones que debe desempeñar la Universidad. Pero estas transformaciones afectan a todo el Sistema Educativo.

> *"Durante los años sesenta y setenta el rasgo dominante de los sistemas de enseñanza de la CEE ha sido la expansión cuantitativa en sus diferentes aspectos: aumento de los gastos públicos y privados dedicados a la educación, prolongación sistemática de la duración de la enseñanza obligatoria, cuasi-generalización de la escuela única o integrada hasta los 14-16 años, símbolo de la democratización y el igualitarismo, retraso en la edad media de acceder a la formación profesional, reclutamiento masivo de profesorado joven, y desarrollo y relativo éxito de las teorías económicas de la educación centradas en el capital humano, es decir, en el potencial de la enseñanza como factor clave del desarrollo.*
> *En el caso concreto de España la expansión educativa en todas esas dimensiones ha tenido lugar con algún retraso. El año 1975 es el más indicado para marcar el punto de partida de la expansión del sistema educativo español, comparable con el de la mayoría de los paises de la CEE.*
> *La expansión del sistema educativo español desde 1975 se ha reflejado en tres ámbitos: la ampliación del número de alumnos, el aumento paralelo del profesorado y el crecimiento del gasto educativo.*
> *La ampliación del alumnado ha sido espectacular. En 1989 casi la cuarta parte de los españoles está matriculado en centros de enseñanza reglada.*
> *La ampliación del profesorado ha sido aún más rápida. La enseñanza se ha convertido en la primera empresa del país; en estos momentos más de uno de cada cien españoles consagra su vida a la enseñanza. El Profesorado ha crecido en los últimos años a un ritmo del 3 por 100, aproximadamente; sin embargo, la expansión del profesorado no ha conseguido ajustarse a la demanda real de profesores especializados"* [38]

[38] González J. (1991). La enseñanza en España: el desafío de los noventa, en Vidal - Beneyto J. (Ed.). España a debate, tomo II. Madrid: Tecnos.

Es dentro de este marco en el que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas profundizan y desarrollan su dimensión educativa, planteándose nuevas metas y prioridades que desbordan el papel clásico atribuido a esta disciplina, y por esto toma cada vez mayor fuerza una nueva visión de las matemáticas en el sistema escolar, que denominamos Educación Matemática. Esta nueva visión pasa por una crítica de las funciones que, hasta el momento, han desempeñado las matemáticas en el Sistema Educativo:

> *"La Matemática ha venido ostentando un papel selectivo, independiente de la voluntad y el esfuerzo de los profesores, ya que los objetivos y conocimientos considerados básicos no siempre son conseguidos por la generalidad de los alumnos. Habitualmente se atribuye dicho fracaso tanto al carácter de la matemática misma, como ciencia prestigiosa, exacta y llena de abstracciones, como al talante y caracteres de los sujetos que han de aprenderla (incapacidad para aprender, falta de interés y rigor en el estudio, etc.). Dar un nuevo enfoque al aprendizaje matemático e insertarlo en un planteamiento educativo general, pasa por una redefinición de este Area de trabajo, caracterizando la función y finalidad educativa que le atribuimos"* [39]

Las matemáticas han pasado de desempeñar una función meramente instructiva, en la que debían inculcar la memorización de hechos y la ejercitación de destrezas, a una función educativa más amplia, en la que el conocimiento matemático no se considera aislado del medio cultural ni de los intereses y la afectividad del niño y del joven, ampliándose el campo del aprendizaje hasta integrar el dominio de las estructuras conceptuales, ricas en relaciones, con procedimientos y estrategias que abren la puerta a la creatividad, intuición y pensamiento divergente de los alumnos. También han cambiado las prioridades en educación matemática, y éste es sólo un signo más de que la consideración de las matemáticas en España se ha modificado, y se está modificando, profundamente en estos últimos años.

Esta transformación se explica por el hecho de que las Matemáticas están comenzando a ser uno de los elementos esenciales de la cultura de nuestra época en nuestro país. Esto ocurre

---

[39] Diseño Curricular de Matemáticas, E. Secundaria 12-16. Op. c.

porque se da prioridad a la consideración de que se trata de una de las formas básicas de expresión, que permiten comunicar, interpretar, predecir y conjeturar. Las matemáticas no son sólo una disciplina formal que se construye lejos de nosotros y de nuestros intereses, antes bien aparecen en todas las formas de expresión humana.

Nuestro país se encuentra actualmente en la línea de las sociedades modernas y avanzadas, y en este sentido es de especial importancia la integración de valores, hábitos, formas de expresión y razonamiento que provienen del campo de la ciencia, y en particular de las matemáticas. Por lo tanto, al considerar las matemáticas como un elemento de la cultura de nuestra sociedad, importante pero uno más, debemos dejar de concebir las matemáticas como un objeto ya construido que hay que dominar, y debemos comenzar a considerarlas como una forma de pensamiento abierto con margen para la creatividad, cuya ejercitación hay que desarrollar, respetando la autonomía y ritmo en cada persona.

Por otra parte, la extensión a toda la población de la enseñanza obligatoria hasta los 16 años debe suponer un factor de homogeneización social y un aumento del nivel cultural. Los problemas que se derivan de este nuevo marco legal son considerables ya que las prioridades educativas deben dirigirse a aquellos alumnos que no alcancen unas competencias determinadas.

Esto no pone en tela de juicio la necesidad de contar con minorías altamente cualificadas en investigación punta, y que la orientación de esas minorías se comience a considerar desde el sistema escolar, pero esas minorías no pueden estar divorciadas del medio social que las sostiene y que les da su razón profunda de existencia; por tanto, no pueden contraponerse ambas formaciones y, menos aún, orientar el sistema educativo para seleccionar a los integrantes de esas minorías con abandono de los intereses generales. La difusión de valores democráticos, de integración social y comunicación y las necesidades del mercado de trabajo son también elementos claves a tener en cuenta en la planificación y desarrollo de las matemáticas escolares.

Hay que reconocer, definitivamente, que nuestra sociedad y nuestro sistema educativo han cambiado, y deben adaptarse a ese cambio mediante modificaciones profundas en los objetivos, contenidos, metodología y evaluación de las disciplinas escolares y, en particular, de las matemáticas. La situación actual, de cierto desconcierto, debe clarificarse de inmediato planteando el marco más amplio de objetivos que se quieran cubrir mediante la adquisición de capacidades matemáticas, no sólo cognitivas. El Profesor de matemáticas debe tener claras cuales son las dimensiones de la nueva situación en la que debe trabajar.

> *"Los cambios afectan a varias de estas dimensiones, así el Profesor de matemáticas se encuentra con que se han producido cambios importantes en lo que se considera conocimiento matemático al destacarse las estrategias para la resolución de problemas y el conocimiento de procedimientos como aspectos con entidad propia; todo ello lleva necesariamente a una revisión y reorganización de los contenidos. También se ha modificado el modo de trabajar en el aula; desde las clases diseñadas únicamente sobre lecciones magistrales hasta llegar a la dinámica de grupos con énfasis en la participación, elaboración de alternativas propias, discusión y toma de decisiones razonadas, hay una gran distancia que se está recorriendo en el momento actual. Finalmente, y condicionado por los cambios anteriores, estamos asistiendo a una revisión a fondo sobre la evaluación del aprendizaje de los alumnos. La evaluación debe ser orientadora y formativa antes que sumativa y sancionadora, la evaluación debe tener en cuenta no sólo el dominio de definiciones y conceptos o la ejecución de destrezas, sino que debe contemplar competencias más generales, incluyendo la actitud hacia la propia matemática. El modo de evaluación, los instrumentos, las finalidades, el modo de comunicar los juicios realizados y su empleo para diagnosticar las dificultades en el aprendizaje, junto con las consecuencias que pueden derivarse de las sucesivas evaluaciones para la promoción de los escolares, son otras tantas cuestiones abiertas aún en el campo de la enseñanza de las matemáticas.*
>
> *Estas modificaciones, que se derivan de las necesidades sociales, económicas y científicas de nuestro país, nos obligan - obligan a la comunidad de Profesores de Matemáticas- a tomar una perspectiva más amplia y profunda de qué son y para qué sirven las matemáticas y qué papel deben desempeñar en la formación de los jóvenes. Si hasta el momento han predominado los componentes instructivos del conocimiento matemático, cada vez se aprecia con mayor fuerza la insuficiencia de ese planteamiento y se va tomando conciencia de que la formación matemática es una dimensión relevante de la educación de los niños y adolescentes. De ahí que se hable de Educación Matemática, con una visión más integradora de las capacidades humanas que*

se desarrollan mediante los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Superar el marco clásico en el que se ha venido contemplando la enseñanza de las matemáticas en nuestro país es uno de los retos que tiene planteados no sólo la comunidad actual de profesores de matemáticas sino, principalmente la administración educativa y, en particular, la Universidad como responsable de la formación inicial del Profesorado. Sólo una revisión a fondo de las necesidades que se derivan de una comprensión amplia y profunda del papel cultural que las matemáticas desempeñan puede aportarnos el marco adecuado y los elementos de juicio suficientes para llevar adelante esta tarea de revisión y reestructuración de la educación matemática en nuestro país." [40]

La articulación de estas nuevas necesidades, con las adaptaciones correspondientes, no sólo de materiales y libros de texto, sino de un amplio abanico que comprende desde la forma misma de conceptualizar las matemáticas por parte de los profesores hasta las relaciones de poder y disciplina que se establecen en el aula, va a requerir de un largo esfuerzo de preparación, ensayo y error y acomodación no exento de serios problemas y dificultades. Este va a ser uno de los campos de estudio e investigación que más interés van a presentar para el futuro de la Didáctica de la Matemática, y en el que la colaboración y trabajo conjunto entre profesores de distintos niveles va a resultar más necesaria.

[40] L. Rico y M. Sierra (1991). La comunidad de educadores matemáticos, en Gutiérrez A. (Ed.) El Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Ed. Síntesis. Madrid.

I.3.3. Comunidad de Educadores Matemáticos. Organización.

¿Quién es educador matemático?. Tratar de contestar a esta cuestión supone señalar cuáles deben ser los límites de la nueva situación que venimos planteando sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y no resulta sencillo delimitarla por la cantidad de polémica que genera, debido a los cambios profundos que su clarificación implica.

Si bien la aceptación del predominio de los factores educativos que surgen de la enseñanza de las matemáticas sobre los meramente instructivos puede tener un origen y fundamentación ideológico, no cabe duda que también hay razones sociales, culturales y económicas que avalan esta consideración; igualmente hay una explicación racional de la mayor validez de este planteamiento, como hemos argumentado anteriormente. Por ello es pertinente plantearse la cuestión de a quiénes afectan estas consideraciones, quiénes de los profesores de matemáticas deben considerar su profesión desde esta perspectiva.

Entendemos por **educador matemático** a toda persona que pretende formar o instruir a otra, u otras, mediante las matemáticas, es decir, considera las matemáticas, en todo o en parte, como objeto de educación para las personas a cuya formación y desarrollo está contribuyendo.

Con nuestro planteamiento, no exento de aspectos polémicos, puede considerarse educador matemático a todo profesional de la enseñanza cuyo objetivo es transmitir nuevos conocimientos matemáticos a personas en formación. Dentro de esta población están comprendidos los profesores universitarios, aún cuando la materia que transmitan sea de alta especialidad e incluso esté en proceso de investigación. También consideramos educadores matemáticos a los profesores de Secundaria, tanto en la etapa obligatoria como en la postobligatoria; los profesores de matemáticas de los actuales centros de Bachillerato, Formación Profesional y otras enseñanzas de segundo grado están, por derecho propio, dentro de nuestra población. Igualmente, son educadores matemáticos la totalidad del profesorado de la Educación Preescolar y Educación General Básica que estén implicados en la formación matemática de los niños; en esta categoría incluimos igualmente al profesorado correspondiente de la Educación Permanente de Adultos y de Educación Especial.

Las prioridades y necesidades formativas son muy distintas en cada una de las etapas educativas contempladas. En el nivel universitario predomina la formación en profundidad, el conocimiento de la organización actual y los resultados avanzados más destacables en cada una de las ramas de las matemáticas, así como los campos de investigación a los que los alumnos en formación pueden dedicarse, pero todo ello no excluye la dimensión humana y cultural de ese conocimiento sino que, más bien, le sirve de contrapunto crítico y de marco de referencia, permitiendo que el matemático no se aleje del medio social e intelectual en el que, necesariamente, tiene que trabajar y al cual se debe.

En los niveles universitarios técnicos, escuelas técnicas, o bien en los dedicados a estudios de economía y estadística o, más en general, en todos aquellos estudios en los que las matemáticas constituyen una herramienta imprescindible, incluidas algunas ramas de Formación Profesional, la formación matemática que predomina es la que corresponde a la matemática aplicada. En estos casos no tiene tanta importancia el desarrollo teórico específico cuanto la capacidad para emplear los conceptos y procedimientos matemáticos en la modelización de fenómenos que pongan de manifiesto los elementos cuantitativos, figurativos y lógicos, así como las relaciones que se pueden establecer entre ellos. Los modelos permiten establecer inferencias y relaciones que llevan a determinadas conclusiones sobre el modelo con lo que se puede predecir el comportamiento futuro del fenómeno modelizado y, por tanto, conjeturar los cambios que se van a producir y las regularidades que se van a mantener. En todo este proceso hay, igualmente, una dimensión educativa profunda con la que no sólo se quiere mejorar la capacidad de pensamiento y el desarrollo de la racionalidad en los estudiantes sino también la apreciación y creación de belleza.

En la Educación Preescolar, Primaria y Secundaria predomina el caracter formativo y de desarrollo de capacidades humanas en el aprendizaje de las matemáticas. La formación que han de lograr los alumnos de estos niveles y las competencias específicas que deben adquirir han de ser parte de un conocimiento útil y práctico que no sólo contribuya al desarrollo intelectual de los niños y jóvenes en formación, sino que también les sirva como factor de integración en su medio social y cultural y como elemento de promoción personal.

El profesor de matemáticas, en cualquiera de sus niveles, se encuentra con unas componentes educativas relevantes que interesan por la dimensión social del conocimiento que están transmitiendo y cuya consideración es importante para la consecución del aprendizaje de sus alumnos, que es en definitiva la meta que se quiere alcanzar. Seguramente muchos profesionales de la docencia, en cualquiera de sus niveles, pueden tener serias reservas con bastantes de las afirmaciones que aquí hacemos en relación con las funciones que desempeñan las matemáticas dentro del periodo de la educación obligatoria y con el énfasis puesto en las características formativas que tienen el estudio y aprendizaje de las matemáticas en las etapas no obligatorias del sistema docente. Sin embargo, entendemos que todo profesional de la enseñanza de las matemáticas, al plantearse honestamente su trabajo de formación y transmisión de conocimientos, tiene en cuenta y contempla su acción como una actuación profundamente educativa y, por ello, debe quedar incluido en la comunidad de educadores matemáticos. Más aún, la conceptualización de la Educación Matemática no estará completa hasta que los profesores de todos los niveles no contemplen de modo natural su trabajo como una parte diferenciada de una gran tarea común.

No es fácil delimitar en las Estadísticas Oficiales cuántos docentes quedan comprendidos en nuestra tipificación del educador matemático y tampoco es sencillo determinar en muchos casos si el contenido de la enseñanza se puede considerar o no matemático. De todos modos, aún cuando no podamos cuantificar con precisión a nuestra población, sí hay unos datos de referencia que nos pueden servir para determinar su tamaño aproximado.

Según la Estadística de la enseñanza en España[41] los profesores de los niveles docentes de Preescolar, General Básica y Enseñanzas Medas, tanto de la enseñanza privada como pública, fueron:

Evidentemente, no todos los Profesores computados son educadores matemáticos ya que no contemplan las matemáticas como área de formación o conocimiento a cuya transmisión tengan que contribuir. Cada una de las poblaciones anteriores podemos multiplicarla por un

[41] Estadística de la Enseñanza en España. Niveles de Preescolar, General Básica y E.E. M.M. 1987/88. (1991). Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

coeficiente de reducción, estimado a la baja, que nos permita tener una aproximación del profesorado implicado en enseñanza de matemáticas desde los niveles más elementales hasta los superiores. Obtenemos así la siguiente tabla:

Los datos estimados nos dicen que un 37% del Profesorado de los niveles no universitarios contemplados tienen competencia en la educación matemática de nuestros niños y jóvenes, constituyendo una población de, al menos, 143.034 personas.También es ilustrativo conocer la población escolar a la que atendieron esos profesores, durante el mencionado curso 87-88:

Si dividimos el total de alumnos matriculados entre el total estimado de educadores matemáticos, tenemos un total de 62 educadores matemáticos por cada 1.000 alumnos como índice aproximado de atención a la Educación Matemática por parte del Sistema Escolar no Universitario en España, durante el Curso 87-88.

Además de los datos de la Tabla 2 hay que considerar los correspondientes al Profesorado Universitario, al menos el de aquellas Areas de Conocimiento que se consideran propiamente matemáticas. Según el Anuario de Estadística Universitaria[42] , los profesores de cuerpos docentes Universitarios de las Areas de matemáticas eran:

La globalidad de estos profesores supone un 6% del total de Profesores de los Cuerpos docentes Universitarios. Si sumamos los datos globales de las tablas 2 y 4, aunque los datos se han obtenido de cursos diferentes, la cifra total sigue siendo un dato de referencia como estimación a la baja del total de Profesores que intervienen en la Educación Matemática en nuestro país. Desglosando esta cifra según la titulación mínima del profesorado tenemos:

I.3.4. Los Departamentos de Didáctica de la Matemática en relación con la Educación Matemática:

Las relaciones que existen entre los Departamentos de Didáctica con la Educación Matemática son amplias y complejas, implícitas más que explícitas en la mayor parte de los casos, y necesitadas de un desarrollo más sistemático y profundo. De la extensión y calado de estas relaciones depende que la Didáctica de la Matemática sea una disciplina viva y funcional, que interese y atraiga a los investigadores y que los resultados de sus trabajos sean útiles a la comunidad educativa a la que debe servir.

[42] Anuario de Estadística Universitaria 1990 (1991). Madrid: Consejo de Universidades. Ministerio de Educación y Ciencia

Hay que tener en cuenta que la Educación Matemática es una de las profesiones básicas que se derivan de las matemáticas y que, como ya se ha dicho, está formada por el colectivo de todos aquellos educadores que trabajan en el amplio campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en cualquiera de los niveles del Sistema Educativo. No es la única profesión para las que preparan las matemáticas. En términos generales, hay un colectivo de investigadores que forman una comunidad científica en la que se crean y construyen, se controlan y se confirman los resultados de la reflexión, estudio e investigación en las diversas disciplinas matemáticas.

Hay un tercer grupo de profesionales, cuya formación universitaria ha estado constituida, en su mayor parte, por los conocimientos consolidados más destacables de las Ciencias Matemáticas. Concluida su preparación ponen los conocimientos adquiridos al servicio de una multitud de campos diferentes: administración, organización y gestión de empresas, economías, información, ingeniería, robótica y muchos otros.

La mejora y el avance de los servicios, del comercio, la industria y la investigación en nuestro país son efecto y causa de la participación de un número creciente de licenciados en matemáticas, u otras titulaciones en las que las disciplinas matemáticas tienen un peso considerable. Estos campos en los que el matemático se incorpora como profesional destacado son los que contribuyen al reconocimiento social de nuestros estudios, por la especial cualificación que proporcionan para el tratamiento y solución de los problemas más variados. Estos profesionales son hombres comprometidos con su medio social, que aplican y utilizan las matemáticas destacando sus aspectos de conocimiento útil, y que hacen una aportación considerable al progreso, avance y desarrollo de la comunidad a la que pertenecen.

> *"El término " músico", en el habla corriente, puede referirse a un compositor, un intérprete o un profesor de música, y las posibles superposiciones de estas actividades. De la misma manera, el término "matemático" puede designar a un profesor de matemáticas, un usuario de las matemáticas o un matemático creador"*[43]

Tengamos en cuenta que los educadores matemáticos son sólo una parte de los

[43] Dieundonné J. (1989). En honor del espíritu humano. Madrid: Alianza Editorial.

profesionales cuya formación se deriva de las matemáticas, pero que no todos los educadores matemáticos han recibido su formación inicial en una licenciatura de Matemáticas. Esto hace que muchas veces puedan darse puntos de vista contrapuestos sobre lo que debe ser la Educación Matemática y cuáles sus dependencias e intereses en relación con las disciplinas matemáticas. Aquí es donde encuentra la Didáctica de la Matemática una de las razones para su consolidación. La Didáctica de la Matemática debe realizar el estudio formal y desarrollar la investigación para la descripción, conocimiento, previsión, control y valoración de los fenómenos que se producen en la adquisición, desarrollo, consolidación, comunicación, transmisión y evaluación del conocimiento matemático.

La Didáctica estudia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, trabaja sobre el núcleo de los problemas que afectan a la Educación Matemática; su campo de estudio e investigación, son las múltiples tareas que inciden en el trabajo o que realizan los educadores matemáticos. Por eso la red intrincada de relaciones que existe entre nuestra disciplina y el trabajo que se realiza en las aulas, o que gira en torno a lo ejecutado o por ejecutar en esas aulas, es sumamente compleja y delicada, merecedora de nuestro máximo interés, estudio y dedicación.

Los Departamentos de Didáctica de la Matemática son también centros de formación; trabajan en formación inicial de Profesorado. Sería excesivo atribuir todos los desajustes del actual sistema educativo en relación con el aprendizaje de las matemáticas por parte de nuestros escolares a la Didáctica de la Matemática. Más bien ocurre al contrario; conforme se va conociendo con mayor precisión el modo, las condiciones y procesos en el aprendizaje de parcelas concretas del conocimiento matemático, mayores posibilidades de una formación adecuada del profesorado se van presentando. No obstante los avances que recientemente se están produciendo, hay necesidades muy serias de emprender una reforma en formación inicial, complementaria de la Reforma que se ha producido en el Sistema Educativo y, en particular, en la Educación Secundaria Obligatoria. Pretender abordar las nuevas necesidades que se plantean en Educación en base a la preparación que están recibiendo los futuros licenciados en matemáticas es un despropósito; ya hemos visto cómo el actual plan de estudios en la Universidad de Granada ofrece unas oportunidades formativas reducidas e insuficientes. Y no es este el único problema. La educación matemática de nuestros escolares la realizan también, como se ha indicado, un considerable número de profesores de los niveles de Preescolar y Educación Primaria. Mantener las grandes diferencias en la formación psicopedagógica y en el dominio de contenidos matemáticos entre los Diplomados, profesores de EGB, y los Licenciados es una actitud incongruente con los nuevos planteamientos del Sistema Educativo en nuestro país. Sin embargo, las soluciones no se improvisan ni aparecen por generación espontánea. La Didáctica de la Matemática debe reflexionar y trabajar profundamente en este campo de la formación inicial del profesorado, ya que es aquí donde surgen gran parte de los problemas que van a pesar luego en la formación y educación de niños y adolescentes.

Estas tareas no se pueden plantear como distintas y contrapuestas a la investigación. Los Departamentos de Didáctica investigan sobre actuaciones de aprendizaje concretas de alumnos concretos ante propuestas detalladas de enseñanza sobre conocimientos matemáticos específicos; también hacen estudios comparativos y longitudinales. Estas investigaciones son de laboratorio, pero también también son en muchos casos - los más interesantes- experiencias que comprometen a profesores en ejercicio. La participación conjunta de especialistas en areas concretas y de profesores en la constitución de equipos de investigación y el diseño y ejecución de proyectos concretos es uno de los campos más fecundos, aún por explorar en Didáctica de la Matemática.

La Universidad debe asumir con todas sus consecuencias que una de sus funciones esenciales es la Formación Inicial del Profesorado, y que son los Departamentos educativos, entre ellos el de Didáctica de la Matemática, los encargados de liderar esta tarea. Asumir seriamente esta responsabilidad pasa por racionalizar esa formación, con la elaboración de un plan, la coordinación y fusión de los distintos organismos en los que aún se atomizan las competencias sobre este tema; pasa, igualmente, por establecer una red de centros para las prácticas de enseñanza, incentivando a los profesores tutores y proporcionando la infraestructura necesaria. Una coordinación obligatoria institucionalizada con las Administraciones educativas responsables de la formación permanente es, igualmente, un elemento indispensable en las relaciones entre los Departamentos de Didáctica de la Matemática y la Educación Matemática.

El campo de trabajo no se agota con esto. Como veremos más adelante en esta memoria son muchas las posibilidades de trabajo de los Profesores de Didáctica de la Matemática en Educación Matemática. Su participación activa en las Sociedades de Profesores y Educadores Matemáticos, en las revistas profesionales, en los movimientos de reforma, en los Congresos y Jornadas, en la elaboración de documentos y, en todos los casos, su compromiso personal con la innovación y mejora de la educación, son conexiones reales y cotidianas entre el trabajo académico y el educativo, tarea ésta que no debe olvidar nunca el especialista en Didáctica de la

Matemática.

Muchas de éstas y otras cuestiones van a recibir un tratamiento más detallado en los apartados que siguen; para concluir, queremos mencionar el hecho, a veces olvidado, de que nuestro especialista en Didáctica también es, y fundamentalmente, un educador matemático con todos los problemas y dificultades que, como vemos, ello conlleva. Con esto queremos insistir una vez más, que el campo de la Didáctica y su organización como disciplina, no suponen la existencia de un nuevo universo platónico en el que se enuncian, plantean y resuelven problemas que luego no tienen nada que ver con la realidad y práctica diarias.

II. SITUACION CIENTIFICA:

II.1. CAMPO DE PROBLEMAS:

Nuestra reflexión a lo largo de este capítulo va a ir encauzada a poner de manifiesto, en toda su riqueza y complejidad de matices, los problemas que se han planteado y pueden plantearse en la Educación Matemática. Comenzaremos por los problemas que genera la propia naturaleza del conocimiento matemáticos; continuaremos con los derivados del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, tal y como lo realizan en nuestros centros escolares los niños y jóvenes; pasaremos luego a reflexionar sobre la organización social de la enseñanza de las matemáticas, según lo manifiestan los fines generales asignados a esta disciplina por diferentes programas y currículos elaborados en las últimas décadas. Despues de este recorrido vamos a analizar cuáles son los problemas prioritarios que se han debatido en la propia comunidad de educadores matemáticos. Este recorrido quiere dar una visión global de un área de conocimiento viva, activa, consciente de sus propias dificultades y con un esfuerzo sostenido y compartido para encontrar respuestas válidas a los problemas detectados.

II.1.1. La discusión sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

A lo largo de la historia, la cuestión general sobre qué son las matemáticas ha sido planteada y discutida por los científicos y pensadores que se han ocupado de esta disciplina. Hoy día es una pregunta que sorprende al profesional de las matemáticas por la complejidad que encierra dentro de su aparente ingenuidad. Para el educador matemático es una cuestión importante, ya que le obliga a reflexionar sobre los fundamentos del conocimiento a cuya transmisión contribuye, y cuya respuesta, espera, le permite mejorar su actuación.

Varias son las fuentes a las que hay que remitirse para abordar esta pregunta:

En diccionarios o enciclopedias hallaremos descripciones genéricas, a veces circulares, que relatan los modos y logros principales del trabajo en matemáticas.

También es usual remitir a breves descripciones de matemáticos famosos, en las que se destacan algunos rasgos del quehacer matemático con mayor profundidad. Estas descripciones suelen consistir en párrafos aislados de un trabajo más ámplio, y no transmiten todo su significado cuando se separan del estudio global del que forman parte.

Finalmente, al considerar que las matemáticas son una forma de conocimiento, una ciencia con una historia y unas características generales propias, la pregunta se traslada a un campo distinto del de las propias matemáticas y buscamos respuesta en la epistemología o teoría del conocimiento. Las cuestiones y problemas que se plantea la epistemología se suelen diferenciar, atendiendo a su generalidad, en dos grandes apartados: aquellas que abarcan la totalidad de las ciencias y aquellas otras propias de cada grupo de ciencias más o menos amplio, o que conciernen a una sola ciencia. Vamos a considerar en nuestro caso las segundas, que se refieren más directamente a las matemáticas.

Es una idea generalmente admitida la división entre ciencias formales, por una parte, lógica y matemática, y las ciencias de lo real, por otra. I. Berlin expresa así esta idea:

> *"La historia del pensamiento humano sistemático es, en gran parte, la de un esfuerzo sostenido para formular todas las preguntas que se le han ocurrido a la humanidad de tal manera que las respuestas que se le puedan dar caigan en una u otra de dos grandes canastas: la empírica; es decir, la de las preguntas cuyas respuestas dependen, en última instancia, de los datos observables; y la formal; es decir, la de las preguntas cuyas respuestas dependen del puro cálculo, sin que lo traben conocimientos sobre hechos. Esta dicotomía constituye una tajante simplificación excesiva: no es tan fácil desligar los elementos formales de los empíricos, pero contiene verdad suficiente para no inducirnos a error grave. Esta distinción entre las dos grandes fuentes del conocimiento ha sido reconocida desde los comienzos del pensamiento consciente de sí mismo"* [44]

Al situar las matemáticas dentro de las ciencias formales se plantea una primera cuestión, cuyo interés es acuciante desde los comienzos de la matematización de la física en el Renacimiento, con Galileo; ¿cómo es posible que una ciencia que sólo se ha desarrollado tras haber abandonado la experiencia sensible, se haya convertido en la clave capaz de descifrarla?. ¿Cuáles son las relaciones entre las matemáticas y la experiencia que les han permitido mantener su efectividad a lo largo de los siglos?.

Hay dos respuestas tradicionales, englobadas bjo las etiquetas de "empirismo" y "racionalismo".

El empirismo hace derivar las matemáticas de la experiencia sensible, intenta paliar el sentimiento de ruptura con el conocimiento experimental que se da en el matemático y considera ilusorio el caracter de necesidad que se asigna a las verdades matemáticas. El racionalismo reconoce y subraya la necesidad racional de las verdades matemáticas y las relaciona con la experiencia mediante la hipótesis de un intermediario divino: Dios ha creado el mundo conforme a estas verdades eternas que ocupan un lugar en su entendimiento, ésto explica que se las encuentre en la experiencia.

---

[44] Berlin, I (1983). Conceptos y categorías. México: Fondo de Cultura Económica, pág. 29.

Kant trató de poner de acuerdo las dimensiones intuitiva y apodíctica de la matemática. El hecho de que las verdades matemáticas, aunque necesarias a priori, se apliquen a la experiencia, obliga a admitir que la intuición sensible está sometida a condiciones a priori; en otros términos, existen formas a priori de la intuición sensible que, por una parte, rigen la estructura de nuestra experiencia pero, por otra parte, se prestan a ser estudiadas independientemente de su contenido sensible como formas puras; estas dos formas son el espacio y el tiempo.

Las verdades matemáticas, contrariamente a los elementos de la experiencia sensible, son a priori, de ahí su necesidad, y contrariamente a las puras leyes de la lógica son intuitivas, y esto explica su carácter sintético, su aptitud para acreditar nuestros conocimientos; y como este conocimiento es el mismo que el de los principios de acuerdo con los que nuestra experiencia se estructura en la intuición, se comprende por qué las matemáticas son el lenguaje de la física.

La crítica realizada a la interpretación kantiana y el desarrollo posterior de la ciencia han modificado las posiciones clásicas.

El empirismo del siglo XX establece la separación entre las proposiciones de la lógica y matemática que son a priori, pero analíticas y vacías, y las proposiciones empíricas, de las que las ciencias de lo real sacan su contenido. Al contrario que en la posición tradicional, el empirismo actualmente se niega a deducir las matemáticas de la experiencia. La experiencia es la única fuente de conocimiento y las leyes de la lógica y de la matemática no ofrecen verdadero conocimiento, pues dan sólo las reglas para transformar el discurso con el que expresamos nuestros conocimientos. Las leyes lógico-matemáticas valen para todos los mundos posibles, por tanto se aplican al mundo real.

En la epistemología contemporánea el empirismo y el racionalismo han cambiado su posición clásica. El empirismo defiende actualmente la prioridad de las matemáticas y su total independencia de la experiencia. Por el contrario, los nuevos racionalistas insisten en su enraizamiento con la experiencia, tienen una preocupación común: conservar la matemática como una ciencia auténtica que trate de lo falso y de lo verdadero, en vez de ser un simple auxiliar lingüistico. Muchos lo hacen abandonando la tesis tradicional de un mundo suprasensible de ideas eternas. La experiencia no es sólo intuición pasiva de un elemento, sino una actividad por la cual la razón, reclamada por los shocks del elemento y los problemas que le plantea, somete sus ideas a hechos. En la cadena de las ciencias no hay separación entre las matemáticas y las ciencias experimentales, sino sólo niveles sucesivos de abstracción a partir de lo concreto. La ciencia racional no se constituye independientemente de las experiencias, sino tras una reflexión sobre las prácticas empíricas eficaces.

Pero la posición empirista más radical no se reduce al nominalismo del empirísmo lógico. Así, autores como Kline, tienen un planteamiento más radical:

> *"Las matemáticas son una ciencia empírica, lo mismo que la mecánica de Newton. Son correctas en la medida en que funcionan y cuando no funcionan deben ser modificadas. No se trata de un conocimiento a priori, aún cuando se las considera así durante dos mil años. No son absolutas e inalterables (...) Pero ahora debemos comprender que cada rama de la matemática ofrece solamente una teoría que funciona. Mientras funcione la mantendremos, pero es posible que más tarde se necesite otra mejor. Las matemáticas median entre el hombre y la naturaleza, entre sus mundos externo e interno."* [45]

Esto nos lleva a la idea actual de *"modelo"*. Las matemáticas conectan con el mundo físico porque elaboran modelos que permiten describir, interpretar o explicar.

Lo abstracto sólo se concibe ligado a una determinada realización, un *"modelo"* en el que la mente lo aperciba, y este modelo concreto ha sido abstracto en relación con uno anterior. Esta idea de modelo, aplicada a la enseñanza, tiene importantes implicaciones como más adelante se verá. La conexión actual entre matemáticas y experiencia está en el núcleo de las reflexiones que van a permitir un avance o un estancamiento en nuestra capacidad de conocimiento. Por ello mismo, también son problemas que interesan a la Educación Matemática, y cuyo enfoque condiciona esencialmente el modo de planificar la enseñanza y

[45] Kline M. (1985). La pérdida de la certidumbre. Madrid: Siglo XXI, págg. 400-401.

aprendizaje de las matemáticas.

Una segunda cuestión, que ha ocupado extensa y profundamente a matemáticos y filósofos, es la relativa a la naturaleza de los conceptos y nociones matemáticos. ¿Qué realidad tienen los números o las figuras geométricas?. Se trata aquí de los conceptos y entidades abstractas de los que tratan las matemáticas. Esta cuestión surgió en la antigüedad, cuando se sustituyó la matemática empírica de los egipcios por la matemática racional. De este modo se pasó de la respuesta útil a la respuesta demostrable (y, a su vez, también útil), de los sentidos a la inteligencia, del mundo empírico al mundo de las ideas o de las esencias. Con la aparición de la matemática no sólo se pasó de la creencia u opinión a la ciencia, sino que esa misma ciencia, al apelar al alma, condujo a un mundo de realidades suprasensibles, adquiriendo así un valor metafísico y casi religioso; la ilustración de estas ideas la encontramos en la alegoría platónica de la caverna.

El término *"platonismo"* se utiliza actualmente para designar este realismo de las esencias matemáticas que se ha perpetuado hasta nosotros, formando siempre una de las escuelas entre las que se suele dividir la filosofía matemática.

A lo largo de la historia esta creencia sobre algún modo de existencia de los objetos matemáticos se ha expresado de diversas formas y en múltiples ocasiones.

Así, el algebrista Hamilton, creador de los cuaterniones, escribía en 1836:

> *"Las ciencias puramente matemáticas del algebra y la geometría son ciencias de la razón pura, que no reciben ningún peso o ayuda de los experimentos, aisladas, o al menos aislables, de todos los fenómenos externos y accidentales… Son sin embargo, ideas que parecen hasta tal punto innatas en nosotros que su posesión, en cualquier grado concebible, es sólo el desarrollo de nuestro poder original, la manifestación de nuestra propia humanidad"*.[46]

[46] Kline M. Op. c.

Hermite, también expresó la creencia en un mundo real y objetivo de las matemáticas:

> *"Creo que los números y las funciones del análisis no son productos arbitrarios de nuestro espíritu; creo que existen fuera de nosotros con el mismo carácter de necesidad que los objetos de la realidad objetiva; y los encontramos o los descubrimos y los estudiamos como hacen los físicos, los químicos y los zoólogos"*[47]

Cantor creía que el matemático no inventa, sino que descubre conceptos y teoremas; éstos existen independientemente del pensamiento humano. Cantor se consideraba a sí mismo como un secretario o un notario.

Hardy, en su libro *"Apología de un matemático"*, escribió:

> *"Enunciaré mi postura dogmáticamente para evitar malentendidos. Creo que la realidad matemática reside fuera de nosotros, que nuestra misión es descubrirla u observarla, y que los teoremas que demostramos y que a veces describimos grandilocuentemente como nuestras creaciones no son más que notas de nuestras observaciones"* [48]

J. Hadamard afirmaba en su *"Psicología de la invención en el campo matemático"* que:

> *"la verdad preexiste aunque todavía no la conozcamos e, inexcusablemente, nos impone el camino que debemos seguir"*.[49]

También Gödel mantenía que existe un mundo trascendente de matemáticas. A

---

[47] Kline M. Op. c.

[48] Hardy G. (1967). Apología del matemático, en R. Newman (Ed.) Sigma, el mundo de las Matemáticas. Barcelona: Grijalbo.

[49] Hadamard J. (1947). Psicología de la invención en el campo matemático. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

propósito de la teoría de conjuntos, afirmaba que es legítimo considerar todos los conjuntos como objetos reales:

> *"Me parece que suponer tales objetos es tan legítimo como suponer los objetos físicos y que existen las mismas razones para creer en su existencia. Son necesarios para obtener una teoría satisfactoria de las matemáticas en el mismo sentido que lo son los cuerpos físicos para obtener una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensoriales y, en ambos casos, es imposible interpretar las proposiciones que se desea afirmar sobre estas entidades como proposiciones sobre los datos; es decir, en el último caso, las percepciones sensoriales que de hecho se dan".*[50]

Algunos de los matemáticos que más destacaron en el estudio de los fundamentos: Hilbert, Church y los bourbakistas, afirman que las propiedades y los conceptos matemáticos existen en algún sentido objetivo y pueden ser aprehendidos por la mente humana. De este modo la verdad matemática es descubierta, no inventada. Lo que se desarrolla no son las matemáticas sino el conocimiento que el hombre tiene de ellas.

Estas afirmaciones sobre la existencia de un cuerpo de matemáticas único y objetivo no explican dónde residen las matemáticas. Dicen solamente que las matemáticas existen en un mundo extrahumano y que los hombres, simplemente, las detectan. Los axiomas y teoremas no son creaciones puramente humanas, pero su existencia es tan independiente del hombre como parecen serlo los planetas.

Un segundo punto de vista, el de que las matemáticas son por entero un producto del pensamiento humano, se remonta a Aristóteles. Sin embargo mientras que algunos afirman que la verdad está garantizada por la mente, otros mantienen que las matemáticas son una creación de mentes humanas falibles, más que un cuerpo fijo de conocimiento.

Otro algebrista, Cayley, afirmaba en 1833:

---

[50] Kline M. Op. c.

> *"Estamos en posesión de cogniciones a priori, independientes no de esta o aquella experiencia, sino absolutamente de cualquier experiencia... Estas cogniciones son una contribución de la mente a la interpretación de la experiencia"* [51]

Hankel, Dedekind y Weierstrass pensaban todos ellos que las matemáticas son una creación humana y Wittgenstein afirmaba que *"el matemático es un inventor no un descubridor"*.

En esta misma línea se manifiestan H. Weyl y P. Bridgman; todas estas personas sostienen que las matemáticas no sólo son obra del hombre, sino que han recibido una gran influencia de las culturas en las que se han desarrollado. Sus verdades dependen tanto de los seres humanos como la percepción del color o los idiomas. Solamente la aceptación relativamente universal de las matemáticas como algo opuesto a las doctrinas políticas, económicas y religiosas puede habernos inducido a creer que se trata de un cuerpo de verdades objetivamente existentes fuera del hombre. Pueden existir independientemente de cualquier ser humano, pero no de la cultura en la que éste resida.

Quienes aceptan la opinión de que las matemáticas son obra del hombre son, en esencia, kantianos puesto que Kant localizaba la fuente de las matemáticas en el poder organizador de la mente humana. Sin embargo, en el momento actual, se afirma que no es en la morfología o en la fisiología de la mente en donde se originan las matemáticas, sino más bien en la actividad de la mente, La mente organiza mediante métodos que evolucionan. La actividad creadora de la mente desarrolla constantemente formas de pensamiento nuevas y superiores. La mente humana puede ver claramente que en matemáticas es libre de crear un cuerpo de conocimiento si lo encuentra interesante o útil. Además, el campo de la creación no es un campo cerrado. Se crearán nuevas nociones que se apliquen a los campos de pensamiento existentes y a los que surjan. La mente tiene el poder de idear estructuras que abarquen los datos de la experiencia y proporcionen una forma de ordenarlos. La fuente de las matemáticas es el progresivo desarrollo de la propia mente.

---

[51] Kline M. Op. c.

En otro extremo, Bertrand Russell emparejaba el nominalismo con el empirismo lógico. Las verdades matemáticas no sólo son relativas al sistema de axiomas arbitrariamente elegido sino que el sentido de las palabras se reduce a las reglas de su uso fijadas implícitamente por estos axiomas. La matemática no va más allá de las ideas de los signos; se mantiene en los mismos signos y en sus leyes de combinación. El nominalismo se vió favorecido por la reducción que hizo Russell de la matemática a la lógica, y la posterior de Wittgenstein de las leyes de la lógica a simples tautologías. Las fórmulas lógico-matemáticas no ofrecen propiamente ningún conocimiento; tan sólo dan las recetas que permiten transformar el discurso, decir lo mismo en términos diferentes.

Las fórmulas lógicas o matemáticas más complejas no desempeñan otro papel que el de garantizar la validez de tales transformaciones; fundamentalmente, no son más que reglas de un lenguaje y es en ello precisamente donde reside su inmensa utilidad para la ciencia. Pero la asociación de la ciencia formal con la ciencia de lo real no introduce ningún elemento objetivo nuevo, como creían muchos filósofos que oponen a los objetos "reales" de la ciencia de lo real los objetos "formales", "espirituales" o "ideales" de la ciencia formal. La ciencia formal no tiene en absoluto ningún objeto: es un sistema proposicional auxiliar, desligado de cualquier objeto y vacio de todo contenido.

Actualmente, la tesis de la separación radical entre las ciencias formales y las ciencias de lo real, que permite al empirismo lógico sacar todo el contenido de las matemáticas y otorgarles como única tarea el establecer las reglas para el discurso, ha provocado muchas críticas.

Como vemos, son tres las posiciones de base para establecer la naturaleza de los objetos matemáticos: la que afirma una existencia objetiva de estas nociones, la que considera que se trata de leyes del pensamiento y aquella que las reduce a unas reglas para la manipulación de símbolos.

Entre estas posiciones extremas también hay posiciones intermedias. Son muchos los matemáticos que se contentan con establecer la existencia matemática por la falta de contradicción, sentido mucho más débil que la existencia empírica. Decir de una noción matemática que existe, quiere decir simplemente que puede entrar en el sistema por el simple hecho de que no introduce ninguna contradicción en él. La propiedad de existir, para una noción matemática, tiene aquí exactamente el significado de ser no contradictoria.

Para una noción o proposición la propiedad de ser o no contradictoria depende tan sólo de los axiomas propiamente matemáticos a los que se le relacione, siendo la consistencia (no contradicción) de un sistema axiomático relativa a la legislación lógica a la que se le somete.

Para los matemáticos intuicionistas de la escuela holandesa el hecho de no encontrar una contradicción en una noción o proposición matemática no prueba que la proposición sea verdadera o que la noción exista. Para asegurar su existencia hay que poder construirla en un determinado número de etapas.

Aparecen aquí las proposiciones indecidibles, de las que no se puede demostrar que son imposibles, pero para las que tampoco existe un método constructivo que nos permita establecer su existencia. No se debe imponer la ley del tercio excluso que obliga a uno de los términos de una alternativa aunque se ignora cuál. No hay alternativa allí donde no existe ningún medio de impedirla.

Con frecuencia se objeta a la concepción intuicionista que, si se hace depender de este modo las verdades matemáticas de un hecho accidental, dicha concepción rechaza de nuevo la objetividad.

Para el Educador Matemático estas consideraciones constituyen una reflexión ineludible. Según sea la fundamentación epistemológica que atribuya al conocimiento matemático, así se planteará el aprendizaje de sus alumnos como un descubrimiento, una invención, una construcción personal, una interiorización de códigos y reglas o una asimilación de patrones y pautas culturales, con mayor o menor grado de pasividad por parte de los sujetos que aprenden y enfatizando una clase de actividades sobre otras. Muchas de las discusiones que se plantean entre profesores tienen sus raices en las diferentes creencias que éstos presentan en relación con la naturaleza del conocimiento matemático y en la mayor o menor coherencia con la que sostienen y articulan estos planteamientos. Los problemas planteados en relación con el conocimiento matemático no tienen incidencia sólo en las propias matemáticas, sino que condicionan decisivamente la Educación Matemática.

Una tercera y última cuestión, en este trabajo, es la relativa a la crisis moderna de los fundamentos de la matemática. B. Russell decía en 1903 que:

> *"...de la propia naturaleza de cualquier intento de basar las matemáticas en un sistema de conceptos no definidos y de proposiciones primitivas se sigue que los resultados pueden ser refutados por el descubrimiento de una contradicción, pero jamás pueden ser probados".*[52]

Weyl, escribió:

> *"La cuestión de los fundamentos últimos y del sentido último de las matemáticas sigue pendiente; desconocemos en qué dirección se encontrará su solución final e incluso si se puede esperar una respuesta objetiva o definitiva. La matematización bien podría ser una actividad creadora del hombre, como el lenguaje o la música, de una originalidad primaria, cuyas decisiones históricas se resisten a una total racionalización objetiva".*[53]

Se entiende así, que las matemáticas son una actividad mental, no un cuerpo cerrado de conocimientos.

K. Popper en "Lógica de la investigación científica" expuso que el razonamiento matemático jamás es verificable, sino solamente falseable. Los teoremas matemáticos no están garantizados en modo alguno. Se puede continuar utilizando la teoría existente en ausencia de otra mejor, del mismo modo que se usó durante doscientos años la teoría mecánica de Newton antes de la relatividad, o la geometría euclídea antes de la riemanniana. Pero la seguridad en la corrección es inalcanzable.

La historia corrobora la tesis de que no existe un cuerpo de matemáticas fijo, objetivo y

---

[52] Kline M. Op. c.

[53] Weyl H. (1969). el modo matemático de pensar, en R. Neuman (Ed). Sigma, el mundo de las Matemáticas. Barcelona: Grijalbo.

único. No es posible una exposición atemporal de las verdades matemáticas. Los intentos de erigir las matemáticas sobre unos fundamentos indestructibles han terminado en un fracaso.

Los actuales conflictos acerca de la naturaleza de las matemáticas y el hecho de que las matemáticas no sean hoy un cuerpo de conocimiento indiscutible y universalmente aceptado apoyan, ciertamente, el punto de vista de que las matemáticas son obra del hombre.

Sigue siendo cierto que las matemáticas constituyen el esfuerzo más amplio y profundo para lograr un pensamiento preciso y eficaz y que dan la medida de la capacidad de la mente humana. Representan la cota superior de lo que podemos esperar alcanzar en cualquier dominio racional. Pero a nadie puede tranquilizar hoy la confusión actual sobre lo que debemos entender por matemáticas válidas.

A lo largo de la historia de las matemáticas, la determinación de sus fundamentos epistemológicos y la conexión con el mundo físico y natural, han sido cuestiones determinantes en el modo de entender e interpretar la naturaleza del conocimiento matemático y, lo que es igualmente importante, en el modo de considerar la transmisión y adquisición de estos conocimientos. Desembocamos así en nuestro campo de trabajo: independientemente de cualquier otra consideración, la diversidad de concepciones epistemológicas sobre el conocimiento matemático, con el enfoque consiguiente de las cuestiones derivadas sobre fenomenología o proceso del conocer matemático, la posibilidad de este conocimiento, su fundamentación y las formas que adopta, derivan en otra diversidad de posiciones y planteamientos sobre los modos de adquirir y transmitir conocimiento matemático.

La epistemología de las matemáticas, además de tratar con problemas específicamente matemáticos como los derivados de la crisis de fundamentos, abarca problemas de comunicación tales como la delimitación del significado que se puede atribuir a las matemáticas, cómo se transmite esta clase de información, cómo se estructura y reelabora, cómo se comparte y cómo se utiliza y gestiona. En todos estos casos estamos hablando de problemas que afectan directamente a la Educación Matemática, y en todos ellos su raiz epistemológica es un dato no trivial, que podemos y debemos profundizar e intentar esclarecer en todos los casos.

Otra aproximación destacable es la que realizan las ciencias de la cultura y que vamos a resumir con un punto de vista antropológico, tal y como lo expresa L. White[54] . Al reflexionar sobre la dimensión cultural de las matemáticas como fenómeno de elaboración y sostenimiento colectivo, con existencia en los usos, costumbres, lenguajes y formas de pensamiento de una sociedad determinada, reconoce en estas características el fundamento por el que las matemáticas se presentan como conocimiento objetivo, externo a los sujetos concretos, cuya realidad se puede contemplar como algo existente. Las verdades y conocimientos matemáticos existen en la tradición en la que cada uno ha nacido y son recibidas por cada sujeto desde su medio social y cultural. Pero, aparte de la tradición cultural, los conceptos matemáticos no tienen existencia ni significado. Las realidades matemáticas tienen así una existencia independiente de la mente individual, pero dependen por completo de la cultura de una comunidad ubicada en el espacio y el tiempo. De este modo la educación se constituye en una dimensión inherente al conocimiento matemático.

Desde la perspectiva de las tres cuestiones mencionadas, el resultado de este análisis es el siguiente: es cierto que los conocimientos matemáticos residen fuera de nosotros; existían antes de que hubieramos nacido y, a medida que crecemos, los hallamos en el mundo que nos rodea. Pero se trata de una objetividad que existe sólo para el individuo. El lugar de la matemática es la tradición cultural, es decir, un continuo de conductas y convenios, de intuiciones y conceptos expresados simbólicamente. Pero, aparte de la tradición cultural, los conceptos matemáticos no tienen existencia ni significado y, por supuesto, la tradición cultural no tiene existencia aparte de la especie humana. Las matemáticas son un desarrollo del pensamiento que tuvo su comienzo con el origen del hombre y la cultura, tienen así una existencia que no depende de los sujetos concretos pero sí de la "mente de la especie". La adquisición por estos sujetos del capital cultural matemático, y su reelaboración en cada cerebro individual es una de las tareas de la educación, y en esta perspectiva la dimensión educativa resulta ineludible para el conocimiento matemático.

Entroncamos aquí con la reflexión de Romberg[55] , que surge de la consideración cultural de

---

[54] White L. (1982). La Ciencia de la Cultura. Barcelona: Paidós.

[55] Romberg T. (1991). Características Problemáticas del Currículo Escolar de Matemáticas. Rev. de Educación nº 294, págg. 323-406.

las matemáticas y en la que destaca cinco aspectos importantes. Primeramente, considera que las matemáticas han sido creadas por seres humanos como respuesta a problemas sociales, para dotar de sentido al mundo que les rodea. En segundo lugar, destaca que todas las culturas desarrollan históricamente algún tipo de matemáticas para comunicarse y han sido un acontecimiento importante en todas las sociedades. En tercer lugar subraya que, incluso en la época contemporánea, hay varias culturas matemáticas. Puede que los centros escolares insistan en las matemáticas formales de los académicos, pero no en las que se desarrollan en el ejercicio de profesiones y artesanías. En cuarto lugar indica que, en las sociedades multiculturales modernas, cada alumno aporta su propia cultura a la clase de matemáticas.

Y en quinto lugar, considera que los matemáticos constituyen un grupo diferenciado, que trabaja dentro de su propia cultura. El matemático participa en las matemáticas como miembro de una comunidad de aprendizaje, en la que el lenguaje de la disciplina transforma sus prácticas y en la que, con frecuencia, los términos se convierten en objetos que se internalizan acríticamente. De aquí que surjan conflictos entre la cultura matemática profesional y la cultura más general de la educación matemática.

Aquí concluimos esta rápida revisión acerca del conocimiento matemático. La discusión sobre la naturaleza del conocimiento nos ha permitido abrir una línea de reflexión amplia y profunda sobre la que enumerar y plantear algunos problemas de la educación matemática.

II.1.2. El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas:

La reflexión que hemos realizado sobre la naturaleza del conocimiento matemático y sus diferentes fundamentaciones a lo largo de la historia no se refiere a algo pasado y sin vida, ya que estas ideas se encuentran en discusión constante por parte de las distintas escuelas de filosofía matemática y tienen incidencia en los planteamientos y actuaciones de los matemáticos hoy en ejercicio. En consecuencia, la organización de los conocimientos matemáticos, el énfasis que se da a la formalización y grado de abstracción, los argumentos que se consideran válidos para su justificación y el mismo estilo de comunicar las matemáticas, son otras tantas opciones que tienen sus raices en argumentos epistemológicos y que contribuyen a facilitar o dificultar la transmisión y adquisición del conocimiento matemático. Si bien las primeras dificultades que podemos señalar en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas tienen un origen epistemológico, no es éste el único campo de problemas que conviene destacar. Si contemplamos las matemáticas como producto de la mente humana a lo largo de un proceso histórico dilatado es fácil poner de manifiesto la complejidad y sutileza de cada uno de los conceptos y teorías que han surgido y se han destacado durante este periodo. Nunca, o casi nunca, la consolidación de un concepto ha sido realizada por un único investigador, ni tan siquiera en una sola época. La potencialidad de los conceptos relevantes los convierte en instrumentos útiles que permiten hacer avanzar al conocimiento matemático, alcanzar nuevos resultados, completar estructuras y, en este avance, el propio concepto se transforma al establecer nuevas relaciones e integrarse en esquemas más amplios. Por ello, admitiendo la idea de Haeckel de que la evolución del individuo es paralela a la de la especie a la que el individuo pertenece, cabe esperar dificultades de carácter ontogenético que sigan la evolución filogenética de cada uno de los conocimientos en cuestión. Muchas de las dificultades con las que se van a encontrar los sujetos concretos en el aprendizaje de conceptos matemáticos importantes surgieron durante el proceso de creación, desarrollo y consolidación de esos mismos conceptos.

Pero, además de las dificultades que surgen al considerar las dimensiones culturales de la construcción del conocimiento matemático, también conviene considerar aquellas otras que surgen de la dimensión individual de esa misma construcción. Nos referimos en este caso a las dificultades que encontramos en los fenómenos del aprendizaje.

Tradicionalmente, el conocimiento matemático ha mostrado resistencias específicas durante el proceso de su transmisión y su adquisición por alumnos concretos. Algunas de las más destacables han sido abordadas como problemas específicos, entre los que podemos señalar los siguientes.

En primer lugar, **la contraposición entre la habilidad de ejecución en tareas matemáticas y la capacidad de comprensión de los procedimientos y conceptos implicados**. Uno de los temas que ha ocupado a la psicología de las matemáticas desde antiguo es la relación entre habilidad de cálculo y comprensión matemática, cuyo ejemplo paradigmático está en el dominio y empleo de las operaciones aritméticas. Algunos autores, entre ellos los asociacionistas, creían que la habilidad de cálculo era anterior a la comprensión; otros, como Bruner o los gestaltistas, opinaban que la comprensión servía de base al desarrollo de la habilidad de cálculo. Por esta vía las relaciones entre habilidad y comprensión nunca se llegaron a poner en claro. El punto de vista actual, que está dando lugar a un amplio plan de investigaciones, consiste en estudiar cómo influye la comprensión sobre la adquisición de rutinas y, recíprocamente, cómo puede modificarse la comprensión matemática de los individuos mediante la práctica de habilidades de cálculo. El moderno planteamiento, que desarrollaremos más adelante, distingue entre conocimiento conceptual o declarativo y conocimiento procedimental, y es una aproximación teórica para abordar con mayor profundidad el complejo nudo de relaciones entre comprensión y ejecución de tareas matemáticas.

En segundo lugar podemos señalar el problema de **la transferencia de los aprendizajes y el papel que la práctica desempeña**. La práctica sirve, fundamentalmente, para automatizar los componentes de un procedimiento, logrando mayor eficacia y seguridad en su ejecución, por un lado, y por otro, proporcionando más espacio en la memoria de trabajo, al liberarla del control de los pasos mecanizados. La memoria tiene así la posibilidad de explorar el entorno de la tarea propuesta, buscando y detectando otras regularidades que faciliten la ejecución del procedimiento que lleva a su resolución. Muchas de las tareas más rutinarias son realizadas hoy día por calculadoras o microordenadores, permitiendo a los sujetos centrarse en cuestiones más relevantes de las tareas propuestas. ¿Existen modos preferentes de dirigir la práctica que mejoren la probabilidad de que se produzca la invención de procedimientos más útiles y abreviados?. Este es, de nuevo, uno de los problemas claves en el aprendizaje de las matemáticas, ya que se trata no sólo de conseguir una ejecución eficaz y fiable de las destrezas operatorias sino de lograr que estas habilidades faciliten el desarrollo de la comprensión y su empleo en la adquisición de nuevos conocimientos. En definitiva, se trata de saber cómo organizar la práctica para optimizar el aprendizaje.

En tercer lugar consideramos el problema general del **papel que desempeñan las representaciones mentales en el aprendizaje**. Esta es una cuestión amplia, que incluye las imágenes mentales con las que los niños, jóvenes y adultos se representan los conceptos y relaciones matemáticas; los símbolos, gráficos, esquemas y diagramas; y, finalmente, los modelos físicos y el material concreto, estructurado o no estructurado.

Parece claro que los conceptos y relaciones matemáticas tienen un tipo de representación mental, convencional o no convencional. Estas representaciones desempeñan el papel de modelos intuitivos, que se pueden utilizar para trabajar adecuadamente sobre tareas en las que aparece o en las que hay que emplear el concepto en cuestión. El uso de modelos está bastante extendido en matemáticas y permite salvar las dificultades que surgen por las diferencias entre el razonamiento intuitivo y el abstracto, el implícito y el explícito, el paradigmático y el analógico. De especial interés en el aprendizaje escolar resultan las metáforas físicas para los conceptos matemáticos, es decir, representaciones físicas que permiten una manipulación directa de materiales, de tal manera que ayudan a asociar procedimientos de ejecución con los conceptos matemáticos de base.

No están aún claras cuales son las condiciones de una buena representación mental para un concepto matemático; en particular, tampoco está resuelta la cuestión de hasta qué punto, un material concreto aporta una representación física útil.

Una cuarta cuestión, que señala una fuente de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, es **la contraposición entre la elaboración del conocimiento matemático por parte de cada sujeto o su recepción, ya elaborada, de otras personas.**

La psicología cognitiva establece como uno de sus supuestos que el nuevo conocimiento es elaborado en gran parte por el aprendiz. Los estudiantes no se limitan a añadir mera información a su fondo de conocimientos; por el contrario, deben conectar la nueva información con las estructuras del conocimiento ya existentes, y elaborar nuevas relaciones entre esas estructuras. La construcción de nuevas relaciones parece esencial en el aprendizaje, Pero son aún muchas las cuestiones que quedan por resolver para tener claro cómo se conecta el hecho de recibir u oir información matemática y construir procedimientos que aprovechen esa información y la vinculen con estructuras de conocimiento ya existentes. Dicho en otros términos: ¿Cuáles son los procesos por los que lo que nos dicen o muestran se integra en estructuras del conocimiento ya establecidas?, ¿cómo se realiza esa integración?, ¿qué conexiones se producen?, ¿se puede facilitar el proceso de elaboración de conexiones?.

Una quinta y última cuestión, de carácter general, es la relativa a las **diferencias entre los sujetos en relación con su conocimiento matemático.** Se trata en este caso del problema de la aptitud para las matemáticas. Es un hecho fácilmente observable que, cuando se propone una misma tarea a distintos sujetos, siempre encontramos respuestas diferentes en la realización de la tarea, independientemente de cómo se hayan seleccionado los sujetos, y por muy homogénea que resulte la muestra en relación con las capacidades generales de aprendizaje. ¿A qué son debidas estas diferencias?. ¿Se pueden atribuir las diferencias a características individuales estables, o son el resultado de un estado momentáneo del conocimiento y práctica del individuo en relación con una tarea dada?. Las condiciones de no equidad en el sistema social escolar ¿producen diferencias acusadas en aprendizaje de las distintas minorías sociales?.

No es mucho aún lo que se conoce sobre diferencias individuales y las discusiones sobre el tema no están exentas de un marcado carácter ideológico o polémico. Resulta necesario poner de manifiesto, si es que existen, los tipos de estructuras del conocimiento que caracterizan a los individuos con mayor éxito en la adquisición de nuevos conceptos o habilidades. También habrá que señalar las características de los procesos de aprendizaje para aquellos sujetos que recorren el curriculo de matemáticas más eficaz y rápidamente que los demás. Clarificar estas cuestiones va a permitir abordar con mayor conocimiento los problemas de aprendizaje en matemáticas de sujetos concretos.

Estos cinco grandes núcleos de problemas o cuestiones relativos al aprendizaje de las matemáticas han surgido, fundamentalmente, desde el campo de la psicología ya que el énfasis se ha puesto en los procesos de aprendizaje. Estos núcleos generales son específicaciones de cuestiones aún más generales, que han preocupado por igual a lo largo de la historia a educadores y matemáticos, a pensadores y psicólogos. Como cuestiones más generales planteamos las siguientes:

¿Cómo son las personas en el trabajo con matemáticas?
¿Cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?
¿En qué consiste la capacidad matemática?

En estas cuestiones vuelve a aparecer la dualidad de nuestro campo de estudio, ya que hay que conocer, por un lado, la estructura matemática del conocimiento y, por otro, cómo las personas piensan, razonan y emplean sus capacidades para adquirir, utilizar y controlar esos conocimientos.

Para abordar los problemas que surgen al analizar el proceso de aprendizaje de las matemáticas, y dar respuesta a algunas de las cuestiones planteadas, contamos con las teorías del aprendizaje.

Una teoría del aprendizaje, en términos generales, es una hipótesis sobre el modo en que los sujetos actuan para construir su conocimiento, bien por apropiación de ideas que reciben o bien por invención propia. Las expectativas que generan estas hipótesis establecen cuáles elementos y relaciones van a destacarse para un determinado conocimiento, cómo se va a presentar a los sujetos, qué se espera que el sujeto haga con la información que se le proporciona, qué procesos se supone se van a desencadenar y, en definitiva, qué tipo de actuaciones se pretenden generar y cuál va a ser el modo en que se controle si la integración de los nuevos conocimientos ha tenido lugar y si ello se ha hecho adecuadamente.

Una teoría del conocimiento debe prever, con carácter general, que la adquisición de conocimiento - en particular, de conocimiento matemático- no es un proceso lineal y mecánico; también esas mismas hipótesis deben contemplar los modos o causas por los que el proceso de aprendizaje no llega a tener efecto. De hecho, cada teoría del aprendizaje, al establecer unas condiciones para el mismo, singulariza aquellos factores que pueden impedirlo. Tendríamos así un tipo de dificultades intrínsecas al propio aprendizaje. En este sentido, una teoría del aprendizaje también es un instrumento de análisis que permite establecer cuales han sido los impedimentos por los que un sujeto no ha integrado unos conocimientos, es decir, permite determinar las dificultades relativas al propio proceso de aprender.

Pero en el proceso de aprender no podemos aislar al sujeto y al conocimiento en estado puro y aséptico. Los procesos de aprendizaje que nos interesan son los que se producen en el Sistema Educativo, y en este caso la acción del sujeto está condicionada por el medio social; también hay que contemplar al profesor, con el que el alumno interactua, que trata de promover la formación integral del alumno y, en particular, la adquisición e integración de los conocimientos mediante la enseñanza. Pero el Sistema Educativo tiene también sus limitaciones que dan lugar a planteamientos problemáticos que, potencial y realmente, generan dificultades. Surgen así varios campos problemáticos con la enseñanza de las matemáticas.

En primer lugar tenemos **la necesaria selección de qué matemáticas enseñar a los jóvenes**. Esa selección es obligatoria, debido a la gran complejidad de conocimientos posibles a transmitir, resultando imposible - e innecesario- considerar la totalidad de ellos; la selección está culturalmente determinada, según la visión que predomine en cada epoca sobre las matemáticas y las conexiones que destaquen en relación con otras ciencias; y, finalmente, la selección satisface necesidades sociales tales como la formación necesaria para acceder al mercado de trabajo, el mayor o menor énfasis sobre la aplicabilidad de los conocimientos matemáticos y el prestigio asociado en cada momento con el dominio en esta materia. Independientemente de los contenidos específicos que formen parte del curriculo de matemáticas, lo realmente importante es la ya clásica distinción entre el conocimiento y las pruebas del conocimiento. Para muchos profesores saber matemáticas significa identificar las definiciones y pruebas de esta disciplina, pero para muchos otros, saber matemáticas significa capacidad para hacer matemáticas. Con demasiada frecuencia se considera que son conocimientos las grandes cantidades de información, ya sistematizada, que se han decantado como pruebas del conocimiento establecido, independientemente de su condición de resultados de investigación y de recursos de investigación futura.

El conocimiento como acción implica que una persona reúne, descubre o crea conocimiento en el curso de alguna actividad que tiene una finalidad; el proceso activo no es igual que la asimilación de las pruebas del conocimiento, fruto de actividades anteriores.

Cuando se toman por conocimientos únicamente las pruebas del conocimiento, la adquisición de información se convierte en un fin en sí misma y los alumnos emplean su tiempo en asimilar lo que otras personas han hecho, en lugar de experimentar y elaborar individualmente sus conocimientos. La disyunción entre conocer el qué y conocer el cómo es una fuente de dificultades aún no resueltas en la enseñanza de las matemáticas.

Este planteamiento no es una discusión vacia sino que ha llenado gran parte de los debates que han tenido lugar durante estos últimos años sobre la enseñanza de las matemáticas.

Romberg[56] plantea esta polémica mediante una cuestión sencilla: *"¿Qué hace un matemático?",* y señala que lo importante son las actividades esenciales de las matemáticas; identificar y describir estas características ha sido el núcleo del trabajo de varios especialistas dedicados a orientar al profesorado de matemáticas.

> **Polya** destacó la importancia de la resolución de problemas no rutinarios. Insistió en los elementos de un razonamiento plausible que llevan al descubrimiento de enunciados matemáticos. Trabajó sobre la heurística o conjunto de operaciones mentales útiles para

[56] Romberg T. Op. c.

el proceso de resolución de problemas.

Steen desarrolló la idea de las matemáticas como ciencia de los modelos y el papel del matemático como inventor y descubridor de modelos. En consecuencia, señala que todos los alumnos necesitan experimentar la búsqueda de modelos en todos los niveles; las matemáticas se presentan no como un conjunto fijo de conceptos y destrezas sino como una ciencia empírica.

Freudenthal centró su reflexión en las estrategias de matematización. La matematización comporta la representación de relaciones en una situación compleja, de tal manera que puedan situarse en una relación cuantitativa recíproca. Freudenthal pensaba que el aprendizaje de estas estrategias sería el núcleo básico del curriculo de matemáticas; desde esa perspectiva eligió como lema *"las matemáticas para todos"* para su propuesta curricular, entendiendo que la complejidad de las situaciones problemáticas y la complejidad de los modelos matemáticos pueden variar, pero todos los alumnos pueden construir modelos matemáticos.

Finalmente, el propio **Romberg** señala cuatro actividades relacionadas, que son comunes a todas las matemáticas, y que deben aparecer en cualquier situación de enseñanza. Estas actividades son la abstracción, la invención, la prueba y la aplicación. Cada una de ellas señala una fuente de dificultades para la práctica de las matemáticas en el Sistema Escolar.

Concluimos así una rápida revisión de un tercer centro de interés para la Educación Matemática, al considerar las dificultades en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, que surgen de la dimensión social de la educación, institucionalizada en un Sistema Escolar.

Al trabajar dentro del Sistema Escolar observamos que los alumnos cometen errores en sus actuaciones matemáticas, bien al ejecutar una tarea o al establecer relaciones entre conceptos. La mayor parte de estos errores son sistemáticos y algunos parecen estar producidos por causas de tipo estructural. El análisis y estudio de los errores matemáticos escolares y su titpificación como signos de distintas clases de obstáculos constituye un intento sistemático de trabajar las dificultades en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas tomando como base las producciones de los alumnos.

II.1.3. Los fines de la Educación Matemática:

El contexto en el que ahora nos situamos es el de la enseñanza obligatoria; como ya se ha indicado las matemáticas forman parte de las disciplinas que se transmiten durante la Educación Obligatoria. Esta situación no es una peculiaridad exclusiva de nuestro país, ni de aquellos que nos son cultural y políticamente próximos. Los sistemas escolares son un fenómeno reciente en terminos históricos, cuyo desarrollo se ha realizado, aproximadamente, en el último siglo y medio. La escuela ha asumido gran parte de las tareas de socialización de niños y adolescentes que, con anterioridad, realizaba exclusivamente la familia; también la escuela ha integrado entre sus funciones el enseñar determinados conocimientos, entre ellos los que denominamos con carácter general matemáticas.

El curriculo de matemáticas con el que estamos hoy día familiarizados se desarrolló en el particular contexto histórico-cultural de la Europa posterior a la Revolución Industrial, y ya desde ese momento las matemáticas comienzan a considerarse como un conocimiento destacable:

> *"Aquella ciencia (las Matemáticas) a quien todas las naturales se subalternan, que forma el entendimiento, que enseña a discurrir, a buscar la verdad y a analizarla, a sacar consecuencias legítimas; aquella ciencia, delicia del hombre, bienhechora de la sociedad, fecunda en descubrimientos, no en voces, llena de realidades, no de precisiones; la que en dos siglos ha dado a la sociedad más frutos que en dos mil años el abultado escuadrón de nuestros quiméricos discursos"*[57]

A lo largo de los años esta concepción del currículo ha sido exportada y aceptada

[57] Vallejo M. (1819). Matemática.

por la mayor parte de los paises del mundo, lo cual explica la gran uniformidad que encontramos entre los programas escolares de matemáticas de distintos paises, o de distintas épocas dentro de un mismo país. Resulta importante destacar que, en el momento actual, las matemáticas se enseñan en todo el mundo, prácticamente a todos los niños en edad escolar. Esta uniformidad que encontramos en los currículos de matemáticas y la posición destacada que ocupan presentan un aspecto positivo y otro negativo.

Consideramos positiva la contribución destacada de las matemáticas a los fines generales de la educación, y la preocupación constante para que se produzca una adaptación progresiva a estos fines. Esa contribución se ha planteado por muchos especialistas.

Así, Krulik, propone las siguientes metas matemáticas, en las que se señalan sus relaciones con las metas generales de la educación y las necesidades de la sociedad:

"Meta 1. Lograr, para cada individuo, la competencia matemática que le corresponde.
Meta 2. Preparar a cada individuo para la vida adulta, reconociendo que algunos alumnos requieren más instrucción matemática que otros.
Meta 3. Fomentar el reconocimiento de la utilidad fundamental de la matemática en nuestra sociedad.
Meta 4. Desarrollar la habilidad para usar los modelos matemáticos con miras a la resolución de problemas".[58]

Howson (1986) considera cuatro aspectos mediante los que las matemáticas pueden contribuir a los fines educativos generales: el desarrollo de la capacidad de razonar, su carácter ejemplar de certeza, el placer estético que causa y su función de instrumento auxiliar para otras disciplinas.

El aspecto negativo tiene dos facetas. Por un lado, no cabe duda que el dominio en el

---

[58] Krulik S. (1975). Teaching Secondary School Mathematics. Filadelfia: W. B. Saunders Company.

conocimiento de las matemáticas se ha empleado como uno de los criterios más fuertes para promocionar a los alumnos y para seleccionar el acceso a muchas profesiones, en especial las de carácter científico y técnico. Por otra parte, su origen europeo hace que bastantes de los componentes culturales que integran este currículo sean extraños a la mayor parte de las sociedades en las que se ha implantado. Esta situación ha llevado a planteamientos fuertemente críticos que han hecho surgir la duda sobre la conveniencia de mantener el currículo clásico o proceder a revisarlo y llegar a su supresión o a nuevos currículos fundamentados sobre bases culturales propias.

Todas estas consideraciones, junto con el hecho de que profesores y alumnos dedican gran parte de su tiempo al proceso de aprendizaje de las matemáticas, nos llevan a una cuestión prioritaria: **¿Por qué enseñamos matemáticas?.**

La cuestión no es trivial, e interesa igualmente a los padres, a los legisladores, a los administradores y a los políticos que deben tomar decisiones sobre el destino de los recursos dedicados a la educación. Esta cuestiòn conduce a plantearnos las metas de la educación matemática.

Antecedentes. Los documentos que reflexionan y estudian la planificación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se plantean, ineludiblemente, las metas que se pretenden conseguir. Los ejemplos que podemos encontrar son múltiples, y de ellos hemos seleccionado los siguientes.

El National Committee on Mathematical Requirements (USA), como parte de un documento curricular, realizó en 1923[59] unas consideraciones sobre las metas de la educación matemática, que pasamos a resumir. En el apartado de Principios Generales destacó que una discusión sobre educación matemática y sobre las vías y medios de enfatizar su validez debía realizarse sobre una formulación comprensiva de las metas y propósitos de tal educación. Las metas y propósitos de la enseñanza de las matemáticas pueden surgir de la naturaleza de la materia, del papel que desempeña en la vida práctica, intelectual y espiritual del mundo, y también de los intereses y capacidades de los estudiantes.

---

59 Bidwell J. & Clason R. (Ed.) (1970). The Reorganization of Mathematics in Secondary Education. Readings in the History of Mathematics Education. Reston VA.: NCTM.

En el apartado dedicado a las metas de la instrucción afirma que es usual distinguir tres clases de metas: 1 Prácticas o utilitarias; 2 De entrenamiento o desarrollo; y 3 Culturales. considera que las tres clases no son mutuamente excluyentes. Las metas prácticas o utilitarias, en sentido restringido, significan la utilidad directa o inmediata de un hecho, método o proceso en matemáticas; a continuación describe detalladamente la utilidad práctica de algunos contenidos básicos generales.

Entre las metas de entrenamiento o desarrollo incluye aquellas metas relacionadas con el entrenamiento mental. Este entrenamiento implica la adquisición de ciertas características más o menos generales y la formación de ciertos hábitos mentales de los que se espera que actúen en campos más o menos relacionados, es decir, que transfieran a otras situaciones. Algunas de las metas que enuncia son:

i. la adquisición, en forma precisa, de aquellas ideas o conceptos que permiten realizar la concepción cuantitativa del mundo;
ii. el desarrollo de la habilidad para pensar claramente en términos de tales ideas y conceptos;
iii. la adquisición de hábitos mentales y actitudes que hagan efectivo el anterior entrenamiento.

Las metas culturales significan aquellas metas menos tangibles, pero no menos reales, de carácter intelectual, ético, estético o espiritual que están implicadas en el desarrollo de la apreciación y comprensión, y en la formación de ideales de perfección.

El documento *"Mathematics from 5 to 16"* (1985)[60], presenta las siguientes metas generales para la Educación Matemática en la enseñanza obligatoria, cuya orientación hay que destacar en los procesos de enseñanza.

"1. Las matemáticas son un elemento esencial de comunicación.

---

[60] Department of Education and Science (1985). Mathematics from 5 to 16.

2. Las matemáticas son una herramienta potente.

3. Hay que apreciar las relaciones internas dentro de las matemáticas.

4. Las matemáticas deben resultar una actividad fascinante.

5. Hay que fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente.

6. Trabajar de modo sistemático.
7. Trabajar independientemente.

8. Trabajar cooperativamente.

9. Profundizar en el estudio de las matemáticas.

10. Conseguir la confianza del alumno en sus habilidades matemáticas".

Las tres primeras metas hacen referencia a algunas características relevantes de las matemáticas; la cuarta y quinta a la valoración personal de las matemáticas; las metas sexta, septima, octava y novena hacen referencia al modo de trabajo y la adquisición de métodos y la décima resume la necesidad de utilizar los conocimientos adquiridos.

En el Diseño Curricular Base (1989)[61], en donde encontramos las siguientes consideraciones:

"La finalidad formativa del aprendizaje de las matemáticas ha sido el argumento tradicionalmente utilizado para justificar su inclusión en el currículo de la Educación Obligatoria. Aunque en la actualidad el peso de este argumento ha disminuido considerablemente, sigue pareciendo razonable suponer que determinados formas de actividad matemática favorecen el desarrollo y la adquisición de capacidades cognitivas muy

[61] Ministerio de Educación y Ciencia (1989). Diseño Curricular Base. Enseñanza Secundaria Obligatoria. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC.

generales. (...)

Junto a la finalidad formativa, las matemáticas escolares tienen una clara finalidad utilitaria o pragmática. El contenido matemático es una herramienta auxiliar indispensable para otras areas; las opciones de formación para los alumnos en la Educación Post-Obligatoria requieren un conocimiento matemático; también con un referente claro las necesidades matemáticas en la vida adulta; la aparición y el uso de nuevos medios tecnológicos incide en la finalidad utilitaria de las matemáticas.

Los aspectos formativo y utilitario de las matemáticas escolares no son en absoluto antagónicos sino complementarios".

Aunque los documentos reseñados contemplan metas generales de la Educación Matemática, no todos hacen el mismo tipo de consideraciones y se observan diferencias apreciables entre ellos. No parece haber consenso en las respuestas que hay que dar a la pregunta: ¿Por qué enseñamos matemáticas?.

Esta cuestión encierra problemas serios, que afectan a la tarea que vienen realizando miles de personas a lo largo del mundo y que organizan y dirigen la formación y educación que se transmite a millones de niños y jóvenes. Encontrar respuestas sencillas y directas no es una tarea fácil ya que, por otra parte, los planteamientos posibles pueden llegar a ser muy diferentes e incluso contrapuestos. La cuestión anterior ha sido abordada empleando una metodología sistemática, buscando alguna taxonomía útil para clasificar y trabajar sobre las metas; también se ha trabajado considerando el tema de modo global, siguiendo planteamientos sociológicos que contemplan la educación matemática como un proceso en desarrollo, dentro del desarrollo educativo general.

Entre los objetivos y metas enunciados en multitud de documentos se identifican con claridad cuatro grandes categorías de finalidades: matemáticas, sociológicas, personales y afectivas.

Cuando se abandona la preocupación por la clarificación y se atiende al proceso, las cuestiones predominantes son las relativas a la utilidad de la matemática como herramienta y su importancia destacable como disciplina formativa.

Ubiratan D'Ambrosio en el trabajo "Metas y objetivos generales de la Educación Matemática"[62] resume el trabajo realizado en ICME III de Karlsruhe (1976), en relación con las finalidades de la Educación Matemática.

Comienza planteando que la cuestión *"¿por qué se enseñan matemáticas?"* hay que situarla en el contexto de un marco educativo variable, que se ha modificado profundamente por la realización del ideal de una educación masiva. Los beneficios de la educación deben extenderse a todos los estratos de la sociedad, sin atender a diferencias económicas o sociales; todos los niños y jóvenes tienen derecho a alcanzar las posibilidades que les permitan sus propias capacidades individuales; en este sentido hay una obligación social de reducir a cero las diferencias debidas a la educación. Las distintas filosofías generales sobre educación, al dar prioridad a la búsqueda de valores, o a la adquisición de nuevos conocimientos, o al sostenimiento de una estructura social determinada, dan expresión a algunas de las tensiones que genera el fenómeno educativo y ponen de manifiesto la dificultad para dar satisfacción al progresivo desarrollo y afianzamiento de los valores democráticos.

Cuando se tiene en cuenta que el trabajo del profesor debe ser educar y no sólo instruir, destacando el interés que presenta el desarrollo de capacidades de carácter general, hay que admitir que la educación matemática no es el único medio para conseguir estos comportamientos, incluso que es probable que no sea el mejor camino posible; esto plantea una respuesta negativa a nuestra cuestión inicial: no es necesario enseñar matemáticas, al menos no en la forma en que actualmente se realiza.

Cuando hablamos de la educación matemática y las funciones que debe atender hay que considerar, prioritariamente, a qué clase de sociedad nos referimos. Pensando en la sociedad del futuro, con toda la carga utópica que incluyen los ideales de justicia,

---

[62] D'Ambrosio U. (1979). Metas y objetivos generales de la Educación Matemática, Cap. IX en Nuevas tendencias en la Enseñanza de las Matemáticas. Trabajo preparado por la International Commisión of Mathematical Instruction (ICMI). Vol. IV París: UNESCO.

libertad, dignidad de vida, igualdad de oportunidades, etc, entonces es posible discutir sobre cómo orientar la educación para alcanzar ese futuro. Sobre esta base, D'Ambrosio pasa a presentar los dos puntos de vista más destacables.

Primero: el **punto de vista utilitario**, cuyas ideas principales resumimos. Hay una necesidad creciente de preparar matemáticos, en todos los niveles, para la aplicación y el uso de la tecnología. Los mismos matemáticos vienen observando con preocupación la distancia entre lo que se enseña e investiga en matemáticas y lo que se aplica. La sociedad espera, aunque sea a largo plazo, alguna recompensa de las matemáticas; espera que los matemáticos sean profesionales competentes, capaces de justificar por qué están siendo pagados para hacer matemáticas.

La educación matemática refleja también la posición que las matemáticas y los profesionales de la misma tienen en la sociedad. Si se hace una educación especulativa o contemplativa, dedicada a una élite, y dejando la formación profesional para una estructura paralela, los fines educativos de las matemáticas quedan dirigidos a la formación individual. En cambio, con una formación masiva y la inclusión de la formación profesional en el Sistema Educativo, la sociedad puede esperar mucho más. En la mayor parte de los enunciados de las metas de la educación matemática se nota un énfasis fuerte hacia el comportamiento social y hacia el mundo exterior.

Segundo: **punto de vista especulativo**. Un segundo tipo de educación matemática, desplazado despues de la revolución industrial, y que aún no se ha reincorporado al contexto de la educación científica, es el esfuerzo por desarrollar la educación como libre y creadora, como adquisición del arte de utilizar el conocimiento. La meta para esta forma creativa y más estructurada de la educación matemática consiste en colocar meramente la matemática en su posición de lenguaje conveniente y útil para simular el mundo real. El objetivo es crear nuevas matemáticas, nuevas teorías y ayudar a la solución de nuevos problemas, que tan sólo ahora están siendo identificados y reconocidos. Objetivo básico de la educación matemática no es el perpetuar conocimientos, o avanzar un poco sobre el existente, sino fomentar la creación de nuevo conocimiento. La enseñanza no es la meta esencial de esta forma creativa o contemplativa de la educación matemática; lo que es fundamental es lograr una posición favorable a la creación de nuevo conocimiento.

Tarea principal de la educación matemática consiste en proponer estrategias que permitan el desarrollo simultáneo de estos dos objetivos, el primero basado en el concepto de matemática como cuerpo utilitario de técnicas y habilidades, pensado y diseñado para satisfacer necesidades sociales, y el segundo que considera las matemáticas como componentes de un gran cuerpo de modelos del pensamiento y del lenguaje para simular los fenómenos anteriores.

En estas ideas resume D'Ambrosio su reflexión relativa a los fines de la educación matemática, sobre los que considera que hay que contemplar una variable más: los cambios producidos por el aumento epectacular en el número de alumnos. Los cambios de magnitud en el número de alumnos han producido un cambio igualmente impresionante en el número de profesores, lo que ha dado lugar al nacimiento de una nueva comunidad. La nueva situación genera nuevas estructuras que plantean nuevas necesidades y favorecen la creación de nuevos conocimientos.

Pero quizás la reflexión más actual y completa sobre las funciones de la educación matemática es la realizada en el trabajo ya comentado de Romberg[63]. En este trabajo se sistematizan las respuestas a la cuestión ¿Por qué se debe enseñar matemáticas?, y se analizan las dificultades que surgen en cada caso.

Considera Romberg que hay tres grandes categorías de respuestas o justificaciones a la cuestión planteada:

a) Justificaciones funcionales.
b) Otras justificaciones, que incluyen el desarrollo de las capacidades personales.
c) Problemas relativos a la justificación.

Pasamos a presentar las ideas más destacables para nosotros en cada uno de estos apartados.

---

63 Romberg T. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. Revista de Educación nº 294, pág. 323-406.

Justificaciones funcionales. Tanto para los alumnos como para la sociedad las matemáticas satisfacen una necesidad funcional de largo alcance. Las escuelas deben preparar a los alumnos para ser ciudadanos productivos; la formación especializada de las matemáticas es un requisito previo esencial para el estudio de una amplia variedad de disciplinas. La cuestión que se plantea de inmediato es: ¿cuántas matemáticas son suficientes para todos?.

El NCTM plantea que *"los empleados deben estar preparados para comprender las complejidades y tecnologías de la comunicación, para plantear cuestiones, asimilar información desconocida y trabajar cooperativamente en equipo"*; todo esto implica que todos los alumnos en edad escolar deben tener la oportunidad de estudiar más matemáticas, algo distintas de las que se estudian en el currículo actual.

Por el contrario, otros educadores creen que al no ser necesario un control y dominio de los procedimientos algorítmicos que pueden ejecutar las máquinas, la mayor parte de los niños no necesitarán estudiar demasiadas matemáticas.

Surgen así, tres cuestiones cruciales:

i) ¿Qué ideas matemáticas seran útiles para los ciudadanos en el futuro?; hay quien piensa que las matemáticas serán más importantes y otros que serán menos importantes.

ii) La segunda se refiere a las creencias sobre diferencias y talentos individuales; los que apoyan más cantidad de matemáticas minimizan estas diferencias, mientras que los partidarios del menos consideran que el rendimiento de un alumno debe compararse con el de los demás. Argumento importante en este segundo planteamiento es la idea del currículo diferenciado, que se considera más eficiente; la diferenciación debe basarse en la capacidad, el interés y las necesidades sociales; el riesgo que se corre con la diferenciación es el de promocionar una élite intelectual que controle el desarrollo económico y científico, lo cual *"no es compatible ni con los valores de un sistema democrático justo ni con sus necesidades económicas".*

iii) La tercera y más importante cuestión son las razones propuestas por quienes están interesados en la historia de la reforma educativa; las peticiones de reforma para que todos los alumnos aprendan más matemáticas y algo distintas, no son nuevas; los resultados de iniciativas reformistas pueden llevar fácilmente a problemas y contradicciones; con todo este planteamiento se ha llegado a cuestionar la función social específica de las matemáticas escolares y a señalar sus diferencias con la disciplina científica de las matemáticas.

Keitel insiste en distinguir entre las actividades educativas que fomentan el uso de las matemáticas o el desarrollo de conceptos y procedimientos matemáticos y la práctica de las matemáticas.

Damerow y Westbury emplean tres niveles de análisis para delimitar las matemáticas para todos:

a) La distribución del conocimiento: el conocimiento matemático no es una prerrogativa de ciertas comunidades culturales; al contrario, las matemáticas son potencialmente adecuadas para todas las personas.

b) El sistema escolar y su integración en la sociedad: el éxito no procede de los logros de unos pocos sino de los que obtenga la mayoría; el índice de rendimiento es la producción global del sistema escolar, no sólo de los más aptos.

c) Interacción en la clase: hay un problema de oportunidades de aprendizaje y de relación con la dinámica del proceso de aprendizaje; hay que analizar y poner en cuestión los supuestos, los modelos y la práctica de clasificar y separar a los alumnos.

Otras justificaciones. Entre ellas encontramos usualmente la idea de que se debe enseñar matemáticas porque se supone que promueven el desarrollo de destrezas de pensamiento de alto nivel.

La utilidad del esfuerzo y la confianza en el propio trabajo que proporciona la práctica de ejercicios, es otro tipo de justificación usual.

También se argumenta con frecuencia que las matemáticas tienen una belleza propia, que produce satisfacción a quienes la perciben y sobre cuya valoración es conveniente educar a los jóvenes.

Como quinto tipo de argumentación encontramos la necesidad de formar y promocionar matemáticos profesionales; se trata de una justificación muy arraigada en muchos profesores.

Finalmente, hay quienes estiman que es útil enseñar matemáticas por su contribución a nuestra cultura democrática occidental; importante también porque forman parte de las dimensiones de la personalidad humana.

Problemas. Queda claro que las matemáticas se consideran una materia escolar importante; todas las razones y argumentos expuestos con anterioridad explican, conjuntamente, el fuerte respaldo que recibe esta materia. Sin embargo, no está igualmente clara la correspondencia entre los fundamentos contemplados y las implicaciones curriculares que se pretenden derivar de los mismos.

En primer lugar, es probable que los diferentes fundamentos impliquen un mayor protagonismo para determinadas partes de las matemáticas; en segundo lugar, también ocurre que un mismo fundamento se puede emplear para justificar orientaciones diferentes; en tercer lugar, aún cuando haya acuerdo en las metas, hay disparidades acusadas entre las metas y la realidad; finalmente, no está aún bien desarrollada la justificación de las matemáticas como parte de la cultura.

En resumen, son pocos los especialistas que han justificado adecuadamente la inclusión de las matemáticas en el currículo escolar. Con frecuencia, las justificaciones específicas son superficiales, descubren las disparidades entre los fundamentos y las prácticas y no reflejan las relaciones entre los procedimientos matemáticos formales y sus raices socioculturales.

Se abre aquí un nuevo campo de cuestiones cuyo planteamiento, estudio y resolución interesa destacadamente a la Educación Matemática. Por un lado, la coherencia y ajuste entre las finalidades pretendidas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio del Sistema Educativo y su realización mediante el diseño, desarrollo y puesta en práctica del currículo de las matemáticas escolares, conlleva todo un esfuerzo de racionalidad, de delimitación de contradicciones, de propuestas de ajuste y ensayo de nuevas soluciones, que permitan cubrir con el mínimo de contradicciones las metas pretendidas. El problema no se plantea en términos de diseñar un currículo exento de contradicciones en su enunciado y en su organización. El problema consiste en planificar y llevar a cabo, coordinadamente, la superación de estas contradicciones. No basta, y eso lo sabemos bien, con una lista de hermosos enunciados sobre los valores y utilidad de la matemática que no venga acompañada de una planificación adecuada que indique qué hacer, cómo hacerlo, cuándo realizarlo y el modo de control y ajuste o modificación de las actuaciones. Todo ello plantea un nuevo campo de estudio, trabajo e investigación que se viene denominando teoría curricular o diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas. Campo de estudio cuyos problemas están comenzando a delimitarse con claridad desde hace poco tiempo, y con cuya sistematización se espera poder abordar y avanzar respuestas a las cuestiones aquí planteadas.

II.3. MARCO CIENTIFICO Y METODOLOGICO:

II.3.1. Didáctica de la Matemática como disciplina.

II.3.1.1. Necesidad de una fundamentación para Didáctica de la Matemática:

En los apartados anteriores de este proyecto hemos ido poniendo de manifiesto el estado actual del área de conocimiento que denominamos Didáctica de la Matemática. Por un lado, hemos destacado el amplio campo de problemas a los que tiene que prestar atención y la complejidad y diversidad de los mismos; por otra parte, hemos presentado las grandes líneas de estudio e investigación que se vienen desarrollando por la comunidad internacional de investigadores en Educación Matemática durante los últimos años, así como los antecedentes más destacables desde finales del siglo pasado.

Nos queda por abordar la consideración de la Didáctica de la Matemática como disciplina, lo que exige explicitar el marco teórico y metodológico en el que, hoy día, se puede enmarcar nuestra materia. Diversos autores, hemos visto, ponen de manifiesto la necesidad de contar con un esquema teórico bien establecido y unas técnicas y procedimientos específicos para el estudio, desarrollo e investigación en este campo. Sin embargo, esta necesidad, que nadie discute, no debe llevar a una simplificación excesiva de nuestro campo, ni tampoco a forzar la aceptación de cualquier esquema general ad hoc. Antes de señalar algunos de los componentes teóricos que deben servir de fundamento a la Didáctica de la Matemática, destacaremos algunas ideas que orientan en esta dirección.

Reflexionando, igualmente, sobre los fundamentos de la Educación Matemática, Steiner[64] desarrolla esta idea de complejidad:

> *"La Educación Matemática es un campo cuyos dominios de referencia y acción están caracterizados por una extrema complejidad: el complejo fenómeno de las matemáticas, en su desarrollo actual e histórico, y su interrelación con otras ciencias, áreas de práctica, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolarización dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en la cognición individual y el desarrollo social de los alumnos, etc. En esta conexión, la gran variedad de grupos de personas diferentes implicadas en el proceso total juega un papel importante y representa otro aspecto específico de la complejidad considerada.*
>
> *Dentro de este sistema general varios subsistemas han evolucionado. No siempre trabajan adecuadamente, en particular carecen a menudo de cooperación e interconexión mútua. Con respecto a ciertos aspectos y tareas la propia educación matemática, como disciplina y campo profesional, es uno de estos subsistemas".*

En relación con la complejidad señalada, Steiner destaca diferentes visiones y reacciones.

---

[64] Steiner H. G. (1984). Theory of Mathematics Education (TME), en Steiner H.G.; Balacheff N.; Mason J. y otros. Theory of Mathematics Education. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik.

Una de las reacciones a la extrema complejidad de los problemas en educación matemática es la opinión de que resulta imposible tratar estos problemas por una vía científica y que, por tanto, la educación matemática, nunca va a ser una ciencia o una disciplina con fundamentación científica.

Otra reacción contemplada consiste en reducir sistemáticamente la complejidad mediante la selección y promoción de un aspecto especial; así ocurre cuando se destaca el análisis del contenido, la construcción del currículo, los métodos de enseñanza, el desarrollo de las habilidades en el niño, las interacciones en el aula o el predominio de los aspectos puramente metodológicos. A menudo esto va acompañado con la asignación de un papel predominante en la orientación básica y los métodos de investigación en educación matemática a una de las disciplinas de referencia: matemáticas, epistemología, pedagogía o sociología.

De acuerdo con la variedad de reducciones posibles se puede encontrar una variedad de definiciones distintas sobre educación matemática, como son por ejemplo, el estudio de las relaciones entre las matemáticas, el individuo y la sociedad; la reconstrucción de las matemáticas del momento en un nivel elemental; el desarrollo y evaluación de cursos para la enseñanza de las matemáticas; el estudio del conocimiento matemático, sus tipos, representación y crecimiento; el estudio del comportamiento de los alumnos cuando aprenden matemáticas; el estudio y desarrollo de las competencias del profesor; el estudio de las comunicaciones e interacciones en el aula, etc.

De acuerdo con las interpretaciones anteriores, y con otras que puedan realizarse, la educación matemática puede caracterizarse de distintas formas: como un campo especial de las matemáticas, como una rama particular de la epistemología, como una tecnología, como un subapartado de la pedagogía o la didáctica general, como una ciencia social, como una ciencia aplicada, etc.

Todos estos puntos de vista aportan algún elemento importante para la educación matemática, pero ninguno de ellos agota o reduce su campo de estudio. Como Steiner[65] indica, parece que *"es necesaria una base teórica que nos permita entender e identificar las diferentes*

---

[65] Steiner H. G. (1984). Obra citada.

posiciones, aspectos e intenciones que subyacen a las distintas definiciones en uso de educación matemática, para analizar las relaciones entre estas posiciones e intentar una comprensión dialéctica conjunta de su totalidad". Nosotros añadimos que esta comprensión e integración de las diferentes disciplinas básicas antes mencionadas -matemáticas, epistemología, pedagogía, psicología y sociología- dificilmente se puede intentar cuando la consideración que se haga de cada una de ellas esté en desequilibrio, siendo muy alta para algunas y escasa o inexistente para otras.

Por eso mismo, antes de avanzar en los intentos de sistematizar la Didáctica de la Matemática como disiciplina autónoma, parece ineludible realizar una reflexión detallada sobre las aportaciones realizadas desde las disciplinas básicas a nuestro campo, señalando los conceptos más productivos, poniendo de manifiesto los avances conseguidos y los campos de estudio que han logrado una sistemática en la selección, planteamiento y resolución de problemas relevantes para la educación matemática.

En el estado actual, y por lo que se refiere a la fundamentación de la Didáctica de la Matemática como área científica, sobre unos supuestos teóricos explícitos, de carácter bien epistemológico, psicológico, sociológico o pedagógico, no se ha alcanzado un marco autónomo unificado, no existe acuerdo en la comunidad de teóricos, investigadores y prácticos sobre cuál es la Teoría de la Educación Matemática.

El mismo Steiner es consciente de esta situación cuando señala:

> *"el debate actual sobre el estatus de la Educación Matemática como una ciencia está enfocado más hacia cuestiones tales como si está cercano a lo que (en sentido de Kuhn) se entiende por ciencia normal, a las relaciones entre teoría y práctica, y a los problemas de la interdisciplinariedad"*.

Sería una trivialidad por nuestra parte disminuir las exigencias formales, teóricas y metodológicas en relación con la Educación Matemática; igualmente, sería un error dedicar todos los esfuerzos y preocupaciones a establecer un marco teórico unificado que permitiese la comparabilidad con las disciplinas ya establecidas. Dentro de la comunidad hay profesionales dedicados a cuestiones de fundamentación, a los que expresamos todo nuestro respeto, pero no debe olvidarse que no es ese el objetivo exclusivo, ni siquiera el principal, de la Educación

Matemática.

El profesional de la Educación Matemática se encuentra ante una serie de disciplinas ya constituidas, y con un alto grado de desarrollo y especialización, como son los distintos campos de la Matemática, la Pedagogía, la Psicología, la Sociología y la Epistemología. Estas disciplinas, actuando conjuntamente, permiten el avance en el conocimiento sobre los procesos de comunicación, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La interacción entre ellas permite no confundir el objeto propio de estudio de cada una de las disciplinas mencionadas, separadamente, con las aportaciones que realizan a nuestra área. Esta idea la expresa Fischbein claramente en relación con la Psicología[66] :

> *"La educación matemática tiene sus propios problemas psicológicos que un psicólogo profesional nunca encontraría en su propia área. No me imagino a un psicólogo interesado en los tipos específicos de representaciones que aparecen en matemáticas - desde los gráficos que representan funciones, a las diversas clases de morfismos o a la dinámica del simbolismo matemático (Janvier, 1987)-. No me imagino a un psicólogo cognitivo interesado en los problemas del infinito matemático con sus facetas y dificultades. Para manejar tales problemas, hace falta un sistema particular de conceptos además de los generales basados en la psicología. Incluso los conceptos psicológicos usuales, adquieren nuevos significados a la luz de las matemáticas y de la educación matemática. Permitaseme mencionar algunos de los conceptos inventados como consecuencia de estos esfuerzos: concepto imagen y concepto definición (Vinner y Tall), campo conceptual (Vergnaud), intuiciones primarias y secundarias (Fischbein). Los conceptos psicológicos tradicionales como: resolución de problemas, representación, comprensión y aprendizaje, se llenan de un contenido mucho más rico en relación con la actividad matemática".*

De nuevo, Steiner[67] marca la línea de reflexión:

---

[66] Fischbein E. (1990). Introduction en Kilpatrick J. & Nesher P.: Mathematics and Cognition. Cambridge: Cambridge University Press.

[67] Steiner H. G. Obra citada.

“Creo que supondría un peligro y una restricción inadecuada la insistencia en encontrar teorías con fundamentación propia para la educación matemática. La naturaleza de la materia y sus problemas necesitan un acercamiento interdisciplinar y podría ser un error no hacer una utilización significativa del conocimiento que otras disciplinas han producido ya en relación con aspectos específicos de estos problemas. Debiéramos ser capaces de una cooperación interdisciplinar que no supone, en el momento actual, tomar prestadas teorías ya hechas y adaptarlas a las condiciones de las matemáticas escolares; existe una relación más profunda entre las disciplinas.”

Esta es nuestra posición: la Matemática, la Epistemología, la Pedagogía, la Psicología y la Sociología, establecen -conjuntamente- el marco teórico y metodológico en el que se plantean, estudian e investigan los problemas y cuestiones de la Educación Matemática. No cabe confusión entre las cuestiones prioritarias de cada una de esas materias y las de la Educación Matemática: se distingue que un problema es de nuestra área de conocimiento cuando están implicados procesos de comunicación, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y postulamos que en su estudio y resolución se apela a las cinco disciplinas citadas de una manera especial que trasciende e integra las aportaciones concretas de cada una de ellas. Esto lo ejemplificaremos detalladamente al presentar los temas 11 a 32 de la Asignatura Didáctica de la Matemática, en el apartado III.2 de este Proyecto.

En lo que sigue vamos a ir considerando las aportaciones más significativas de cada una de las disciplinas mencionadas a la Didáctica de la Matemática.

II.3.1.2. Aportaciones de la Matemática:

Hablar de aportaciones de la Matemática en Educación Matemática puede resultar redundante ya que el conocimiento matemático es parte sustancial de nuestra área. Prescindiendo de las matemáticas nos quedaríamos sólo con la componente educativa y habríamos abandonado nuestro propio territorio para trabajar en un campo totalmente distinto. Por tanto, es obvio que el conocimiento matemático no proporciona una aportación más o menos valiosa a la Educación Matemática sino que constituye uno de sus elementos definitorios. Sin embargo, también es cierto que la Educación Matemática considera este conocimiento desde una perspectiva diferente de la que lo hacen cada una de las disciplinas que caen bajo la denominación genérica de

Matemáticas.

Si buscamos descripciones de las diversas disciplinas matemáticas, encontramos que:

"el Algebra se ocupa de las propiedades de conjuntos dotados de estructura algebraica, que viene dada por operaciones internas y externas con propiedades especiales"[68]*; "la Geometría es la parte de la matemática dedicada al estudio de los espacios y de las transformaciones propias de los mismos"*[69]*; "el Análisis es aquella parte de la matemática que consiste esencialmente en la teoría de la aproximación y el estudio de las funciones"*[70] *, o también "que es la prolongación moderna del cálculo infinitesimal, con el estudio de las funciones, de conjuntos provistos de estructuras topológicas y de sus relaciones"*[71] *; "la Estadística es la ciencia del tratamiento de la información que contiene las series de datos procedentes de observaciones de fenómenos colectivos, en que el gran número de factores de variación que intervienen hace necesarios modelos probabilísticos para que las conclusiones, leyes o decisiones basadas en los mismos, se les pueda asignar una confianza medible"*[72]

En todos los casos, el objeto de estudio es un campo de conceptos obtenidos por abstracción y generalización, presentados simbólicamente, adaptados a un tipo de procesamiento mecánico que llamamos formalización y cuyas relaciones mutuas están sometidas a un proceso de prueba y control llamado demostración.

"Las demostraciones sirven simultáneamente a muchos fines. Al ser expuestas

---

[68] Reinhard F. & Soeder H. (1984). Atlas de matemáticas I. Madrid: Alianza.

[69] Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990). Vocabulario Científico y Técnico.
Madrid: Espasa-Calpe.

[70] Real Academia de Ciencias Exactas. Obra citada.

[71] Bouvier A. & George M. (1984). Diccionario de Matemáticas. Madrid: Akal.

[72] Real Academia de Ciencias Exactas. Obra citada.

al escrutinio y enjuiciamiento de auditorios nuevos, quedan sujetas a un proceso constante de crítica y revalidación. Su presentación continuada permite eliminar y depurar de ellas los errores, anbigüedades y malentendidos. La demostración conlleva respetabilidad; es el sello de la autoridad. En los casos mejores, la demostración da una comprensión más profunda al revelar el alma del problema. La demostración sugiere nuevos desarrollos. El novel que estudia demostraciones se está acercando a la creación de nuevas matemáticas. La demostración es energía matemática"[73]

Los objetivos y conceptos que estudia cada una de las disciplinas matemáticas son, como se ha dicho, diferentes; también existen ciertas diferencias en sus procedimientos propios, pero, no cabe duda que comparten una serie de rasgos que no tiene la Educación Matemática.

Las distintas disciplinas matemáticas son pensadas y constituidas por seres humanos; son objeto de comunicación dentro de una comunidad, que cuida especialmente la justeza y precisión en las interpretaciones posibles; y forman parte de aquella selección de conocimientos privilegiados que hemos elegido para transmitir a las generaciones en formación. En estos procesos de creación, comunicación asimilación y transmisión está el objeto de la Educación Matemática; como se ve, diferenciado claramente de los de las diversas disciplinas de la Matemática, pero ligado indisolublemente a ellas. Por ello hemos dicho anteriormente que es la fuerza de los contenidos matemáticos la que establece el carácter específico de nuestra área de conocimiento.

Cada una de las disciplinas matemáticas aporta a la Educación Matemática una serie de conceptos y procedimientos sobre cuya construcción y transmisión debe reflexionar, estudiar e investigar. Un concepto matemático admite diversas aproximaciones; las proposiciones o propiedades pueden alcanzarse, usualmente, por más de una vía; el campo de aplicaciones y problemas que surgen en cada caso también es amplio y variado. Todas esas posibilidades se pueden presentar y organizar de muy diversos modos y no cabe duda, que en algunos casos, la comprensión de los aprendices se va a ver facilitada o entorpecida por el modo en que se les presente y transmita la información. El producto y resultado de la actividad matemática, en sus

[73] Davis P. & Hersch R. (1988). Experiencia Matemática. Barcelona: Labor.

diferentes opciones, en cuanto ofrece pautas para nuevas construcciones y organizaciones, es objeto explícito de estudio de la Educación Matemática; es lo que suele denominarse análisis de contenidos.

También las disciplinas matemáticas aportan un campo de aplicaciones de cada uno de sus principales conceptos y procedimientos en las otras disciplinas. En estos casos las matemáticas ofrecen modelos y se emplean como herramienta. La aplicabilidad de los conocimientos matemáticos está en relación directa con el mundo de fenómenos a los cuales modeliza. El estudio de la fenomenología de cada campo conceptual y su empleo sistemático durante los procesos de enseñanza es un factor decisivo para el logro de una correcta comprensión y un aprendizaje completo. Por ello, las aportaciones que cada disciplina matemática hace en este sentido a la Educación Matemática, son decisivas.

Finalmente, y para concluir este análisis general, hay que considerar una tercera aportación procedente del campo de la Matemática. Nos referimos a la historia. Cada una de las disciplinas de la matemática ha tenido una evolución a lo largo de la historia. Muchos de los conceptos y procedimientos que hoy día utilizamos son resultado de un largo proceso de adaptación, reelaboración y depuración. Han sido necesarias, a veces, muchas generaciones de pensadores reelaborando los conceptos y de técnicos aplicándolos, para alcanzar el grado aparente de simplicidad, precisión y justeza con el que hoy se presentan la mayor parte de los conocimientos matemáticos. Pero esto, que desde el punto de vista conceptual es claramente ventajoso, desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje puede convertirse en un obstáculo. Por ello, el conocimiento de la historia de las matemáticas, de las diversas conceptualizaciones que ha experimentado un determinado conocimiento o de las limitaciones impuestas por el modo de simbolización o por las reglas de procedimiento que en cada época se han tenido en cuenta, es una información muy valiosa a la hora de organizar la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento en cuestión; también permite tipificar algunas de las dificultades que encuentran los alumnos e interpretar los posibles errores que cometen.

" El estudio de los obstáculos encontrados por los matemáticos en el pasado nos ayuda a interpretar los errores cometidos por los estudiantes de hoy; a su vez, el estudio de los errores, de las dificultades y de las falsas conceptualizaciones de los estudiantes aporta algo de luz a nuestra comprensión de la historia de la matemática (Arsac, 1987; Sierpinska, 1985). Aun reconociendo que la colección de problemas con los que los estudiantes pueden

aprovechadamente chocar es diferente de la colección de problemas que los científicos se han encontrado a lo largo de la historia, es esencial, para la educación matemática, el considerar la relación entre conocimiento y problemas."[74]

La Educación Matemática, pues, no es ajena al campo de estudio y trabajo de la Matemática, sino que está en estrecho contacto con él. Muchos investigadores en matemáticas han sido grandes didactas y han hecho aportaciones considerables a la enseñanza de las matemáticas. El campo de profesionales en Educación Matemática tiene su fuente principal en los matemáticos en tanto que la enseñanza es una actividad profesional clave en estas disciplinas.

II.3.1.3. Aportaciones de la Epistemología.

A lo largo de la historia la conexión entre matemáticos y filósofos y, más tarde en particular, con los filósofos preocupados por los problemas del conocimiento ha sido permanente. La historia del pensamiento ha enlazado, en multitud de ocasiones en una misma persona, las reflexiones derivadas de la naturaleza y posibilidades del conocimiento y los estudios sobre el conocimiento matemático, e incluso, la producción de nuevo conocimiento matemático. Los nombres de Descartes, Pascal, Kant y, más recientemente, Poincaré, Russell, Polya, Lakatos, son sólo una breve muestra de esta conexión permanente.

La Epistemología, ya lo hemos indicado en otro apartado de este Proyecto, ha servido para

---

[74] Vergnaud G. (1990). Epistemología y psicología de la Educación Matemática, en Kilpatrikc J. & Nesher P.: Mathematics and Cognition. Cambridge: Cambridge University Press.

fundamentar diversas conceptualizaciones de la matemática a lo largo de la historia, entre las que el formalismo, el intuicionismo y el logicismo son las más recientes. También ha servido para poner en cuestión los fundamentos supuestos de las matemáticas en cada época; por otra parte, las matemáticas por su modo peculiar de argumentación, construcción teórica, búsqueda de coherencia interna y de justificación han proporcionado a la Epistemología un campo de reflexión, estudio y debate. Recientemente, sobre todo a partir de los trabajos de Piaget, el interés de la Epistemología se ha extendido al campo de la Educación Matemática. Así lo pone de manifiesto Vergnaud[75] :

"A la epistemología no le interesa sólo el fundamento de la matemática, como parecen sugerir los debates sobre la posibilidad de reducir la aritmética a la lógica (Carnap, 1931/1964; Gödel, 1947/1974; Russell, 1919) o sobre el intuicionismo (Brouwer, 1913/1964; Heyting, 1956). Se necesita la epistemología en todos los "pisos" del edificio matemático, cada vez que necesitamos clarificar la relación del conocimiento matemático con los problemas.

Diferentes problemas involucran diferentes propiedades del mismo concepto y diferentes conceptos.

La relación del conocimiento con los problemas que hay que resolver y la situación que ha de ser tratada, hace que también sea relevante el considerar la influencia del entorno cultural en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. La educación matemática es un proceso social que ocurre en el seno de diferentes culturas y de sociedades diferentes con diferentes organizaciones escolares, diferentes trasplanos filosóficos y diferentes metas. El significado de la educación matemática cambia de una sociedad tecnológica altamente desarrollada a una sociedad rural tradicional. Es también diferente para distintos subgrupos de la misma sociedad. Las matemáticas están empezando a ser importantes para todo el mundo: necesitamos algo de matemáticas para comprender las máquinas asistidas por ordenador, la contabilidad y la tecnología convencional, y también para dar sentido a la información que llega a nosotros procedente de los medios de comunicación. Si la matemática no es sólo una parte de nuestra cultura científica sino también un útil lote de competencias y concepciones para una gran variedad de actividades, profesionales o no, entonces debemos revisar, de manera global, la filosofía de la educación matemática.

Necesitamos preguntarnos acerca de las representaciones mentales implícitas que tienen

75 Vergnaud G. (1990). Obra citada.

los profesores, los padres, los tutores, los que toman decisiones y los investigadores sobre las matemáticas y sobre la educación matemática. Necesitamos preguntarnos acerca de los currículos, no tomarlos como una base segura. Necesitamos preguntarnos acerca de los libros de texto; los materiales informáticos; y también sobre las costumbres, concepciones y decisiones de los profesores desde el punto de vista no sólo de su adecuación sociológica y psicológica, sino también de su fundamento epistemológico."

La idea de Vergnaud, ampliamente compartida por la comunidad de educadores matemáticos, es que la complejidad de problemas planteados en este área de conocimiento hace cada vez más necesaria una clasificación y desarrollo epistemológicos que proporcionen coherencia a los trabajos, investigaciones y supuestos teóricos que se están desarrollando en este campo.

Desde hace unos años se viene trabajando en esta línea, que se está convirtiendo en una especialidad propia dentro de la Educación Matemática. Quizás el Institut für Didaktik der Mathematik, de la Universidad de Bielefeld haya sido el centro en el que más se haya trabajado en esta línea, siendo el Profesor Steiner uno de sus mayores impulsores. Aunque el número de publicaciones sobre estos tópicos se ha incrementado considerablemente en los últimos años, vamos a seguir un trabajo[76] de este Profesor para señalar algunos aspectos filosóficos y epistemológicos de las matemáticas y la influencia sobre su enseñanza y aprendizaje.

Comienza por señalar que dentro de la lista de cuestiones relevantes en la filosofía de las matemáticas, se pueden incluir las siguientes:

1. Cuestiones de justificación del saber matemático -contexto de justificación- y, en particular, el papel de la prueba en este contexto.
2. Lazos existentes entre las matemáticas puras y las aplicadas, metodología de la matematización y la modelización.
3. Papel de los problemas y de la resolución de problemas en la matemática.
4. Papel de los modos de representación y de conocimiento.

---

[76] Steiner H. G. (1987). Philosophical and epistemological aspects of Mathematics and their Interaction whith Teory and Practice in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics. Vol. 7 pgs 7-13.

5. Dinámica de la aparición y desarrollo de los contextos y de las teorías y lugar de la demostración en este contexto.
6. Relaciones existentes entre justificación, aplicación y desarrollo.

Se incluyen, pues, cuestiones epistemológicas puesto que se hace referencia a teorías del conocimiento y de la ciencia. Pero son las relaciones con las ciencias de la educación y sobre todo con la didáctica de la matemática lo que constituye el núcleo de esta reflexión.

En primer lugar tenemos que algunas concepciones filosóficas y epistemológicas de las matemáticas juegan un papel esencial en la organización de la enseñanza matemática. Es importante destacar que la matemática escolar, por su ubicación histórica y social en la institución escolar, por los procesos que de ahí se derivan de interacción social, contrato didáctico, transposición didáctica, así como por el particularismo de sus concepciones en cuanto al objeto que le es propio, el particularismo de sus modos de trabajo o de interpretación o bien el de sus herramientas de representación y los medios que pone en marcha para sus actividades, constituye una matemática de un género particular y, por tanto, un dominio de fenómenos y de datos epistemológicos específicos. Hay divergencias entre las filosofías de las matemáticas explícita o implícitamente subyacentes a lo que piensan los profesores y a lo que expresa el currículo oficial y la realidad y los problemas epistemológicos de las matemáticas escolares, y estas divergencias son considerables, constituyendo un objeto importante de investigación en didáctica de la matemática.

Para destacar la influencia recíproca que tienen los aspectos filosóficos y epistemológicos de las matemáticas con la teoría y práctica de la enseñanza de las matemáticas enuncia dos tesis:

Primera tesis: Hay concepciones sobre las matemáticas más o menos elaboradas, epistemologías, metodologías o filosofías de las matemáticas en su totalidad, o de alguna de sus partes, que contienen de manera general y a menudo implícitamente orientaciones para su enseñanza así como elementos teóricos de didáctica de la matemática.

Segunda tesis: Los conceptos que se refieren al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, y más específicamente los programas, los trabajos pedagógicos, los didácticos y los metodológicos, la determinación de objetivos, los elementos de investigación en didáctica de la matemática, etc, pero también las teorías subjetivas que tienen los enseñantes sobre su enseñanza así como los juicios metacognitivos realizados sobre la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje de las propias matemáticas por los alumnos se refieren, a menudo de manera implícita, a aspectos bien determinados de una filosofía de las matemáticas.

Para sostener estas tesis Steiner aporta distintos ejemplos en los que un planteamiento filosófico o epistemológico sobre la naturaleza de las matemáticas tiene implicaciones didácticas. Ejemplos clásicos encontramos en la utilización que hizo Piaget en su epistemología genética de las estructuras de Bourbaqui; en el peso que concede Bruner a la estructura de la disciplina en su enseñanza y aprendizaje; el comentario de Proclo a los Elementos de Euclides muestra una teoría del aprendizaje en la que se concede una importancia particular a la dialéctica análisis/síntesis. También lo apreciamos analizando desde una visión filosófica y epistemológica conceptos más restringidos como el concepto de función fundado sobre la teoría de conjuntos, la interpretación lógica de las variables como lugares vacios o la utilización del programa de Erlangen de F. Klein para realizar una clarificación de las geometrías en términos de los grupos de transformaciones.

En este mismo trabajo realiza también una evaluación crítica de las filosofías de las matemáticas desde el punto de vista de una epistemología empírica y descriptiva, proponiendo el desarrollo de orientaciones filosóficas fecundas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para ello formula su propuesta en otras cuatro tesis, que son continuación de las anteriores.

Tercera Tesis: No hay una filosofía de las matemáticas destacable, constante y universal. Parece oportuno emprender evaluaciones sobre las concepciones que tienen los matemáticos, o sobre las filosofías de los matemáticos, consideradas por su fecundidad en lo que concierne a ciertos problemas y para establecer criterios adecuados.

En razón del conocimiento del hecho de que existen concepciones y aspectos de las matemáticas que se muestran en ciertas situaciones muy infructuosos y actúan como obstáculos para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es por lo que se formula la siguiente tesis.

Cuarta Tesis: para la didáctica de las matemáticas es necesario elegir o desarrollar filosofías de las matemáticas en las que, entre otras, las diferentes formas del saber, las dinámicas objetivas o subjetivas del desarrollo, la capacidad para establecer relaciones así como la referencia a las aplicaciones, las dimensiones personal y social y la relatividad de la matemática, se tengan en cuenta en su totalidad.

Quinta Tesis: Una filosofía de la matemática del tipo indicado deberá formar parte de una enseñanza de las matemáticas de tipo reflexivo y contribuir, incluso con los alumnos, al desarrollo de un meta-saber adecuado relativo a las matemáticas y a sus relaciones con la matemática.

Sexta Tesis: La didáctica de la matemática tomada en su conjunto tiene necesidad de una teoría marco que englobe las filosofías adecuadas de las matemáticas y que, en sus tareas de integración y de síntesis (entre las que se encuentran las regulaciones necesarias de las relaciones que se establecen con las disciplinas que están en conexión con ella así como con la práctica), se apoyen sobre estas filosofías.

Como se ve, la riqueza de interconexiones y la necesidad de una profundización sobre las bases epistemológicas de la Educación Matemática hacen que este campo sea uno de los más prometedores para un avance en la fundamentación de nuestra área de conocimiento.

II.3.2. Aportaciones de la Pedagogía.

El término Pedagogía, como el término Matemática, es un término genérico con el que nos referimos a la ciencia general de la educación, "la ciencia que se ocupa de la educación en todo su campo; la Pedagógía en este sentido es, para muchos, lo que llaman Ciencias de la Educación"[77] . Bajo el término Pedagogía encontramos una serie de teorías y disciplinas especializadas que estudian científicamente el amplio campo de fenómenos que surgen de la educación, realizando en ocasiones un desarrollo tecnológico posterior. Desde el punto de vista de nuestro interés por su aportación a la Didáctica de la Matemática nos vamos a limitar a la consideración de tres materias, si bien es cierto que la casi totalidad de disciplinas pedagógicas pueden conectarse con nuestra Area de conocimiento. Las materias que vamos a estudiar son:

- **Teoría de la Educación.**
- **Didáctica General.**
- **Teoría Curricular.**

II.3.2.1. Teoría de la Educación y Didáctica de la Matemática.

Nos hemos venido refiriendo en este proyecto, indistintamente, a la Educación Matemática y a la Didáctica de la Matemática ya que, en ambos casos, el campo de estudio se refiere a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y se toman como referencias equivalentes dentro de la comunidad de especialistas. El término Educación Matemática es usual en la comunidad anglo-parlante, mientras que el término Didáctica de la Matemática es usual dentro de los paises de la Europa continental y en sus áreas de influencia. Entre los especialistas, el uso de una u otra denominación, viene a indicar cuál es la comunidad de referencia. Sin embargo, recientemente se ha introducido en España el término Educación Matemática con un significado coincidente en muchos puntos, pero no equivalente, al de Didáctica de la Matemática. Estas diferencias tienen que ver con los significados usualmente atribuidos a los términos "educación" y "didáctica". Por educación se entiende "genéricamente,

[77] Quintana J. Mª (1988). Teoría de la Educación. Madrid: Dikinson, págs. 24 y sgs.

el proceso por el cual todo humano se incorpora al patrimonio cultural de la comunidad en la que va desarrollándose su existencia, al tiempo que se integra en el grupo y se especifica como individuo singular". [78] Para el término Didáctica encontramos que "es la disciplina que explica los procesos de enseñanza-aprendizaje para proponer su realización consecuente con las finalidades educativas". [79]

El concepto de Educación da prioridad a la reflexión cultural y antropológica, hace referencia a un sistema de valores, necesita una fundamentación ética y conlleva unas implicaciones sociales y politicas.

El concepto de Didáctica destaca la dimensión racional y organizativa, hace referencia a un sistema educativo institucional, necesita una fundamentación científica y conlleva unas implicaciones normativas y técnicas.

Simplificando convenientemente, podemos decir que la Didáctica establece unos fundamentos para la planificación racional y la ejecución técnica de una Teoría de la Educación.

En otros apartados de este proyecto hemos visto cómo la situación general de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas queda mejor expresada con el término Educación Matemática que con el de Didáctica de la Matemática. Limitarnos en muchas ocasiones sólo a la reflexión didáctica sin considerar las componentes educativas puede ser una simplificación excesiva.

Dede el punto de vista científico la Didáctica de la Matemática necesita fundamentarse en una Teoría de la Educación Matemática. Muchos de los estudios antropológicos, culturales, y sociológicos que se han emprendido recientemente, están elaborando y desarrollando conceptos adecuados de esa Teoría de la Educación Matemática, aún sin culminar.

Aportación importante, desde el campo de la Pedagogía, a la Teoría de la Educación

[78] Santillana (1991). Tecnología Educativa. Madrid: Aula XXI, págs. 179-180.

[79] Contreras J. (1990). Enseñanza, Currículum y Profesorado. Madrid: Akal.

Matemática y a la Didáctica de la Matemática es la que realiza la disciplina Teoría de la Educación. Es importante tener en cuenta que ya existe un estudio sistemático y organizado, sobre Educación, que trabaja a nivel teórico.

La Teoría de la Educación considera la Educación, básicamente, desde tres perspectivas complementarias. En primer lugar, como ámbito especulativo que se limita a la comprensión de una realidad, precindiendo de su aplicación para solucionar problemas. En segundo lugar, como unidad explicativa compleja, convierte la Educación en un campo científico, de manera que englobando un conjunto de hipótesis, merced a una coordinación lógica de principios, proposiciones y leyes, proporciona un esquema explicativo que permite entender tanto la naturaleza como el funcionamiento de la Educación. Esta perspectiva aporta un nivel de formalización al estudio sobre Educación que proporciona respetabilidad epistemológica.

Dado el interés de los profesionales de la Matemática por la formalización y la elaboración de modelos interpretativos, los desarrollos y esquematizaciones teóricas de carácter formal sobre Educación, presentan un interés destacable para muchos educadores matemáticos cuya formación inicial es la de matemático.

La complejidad de los fenómenos educativos y la variedad de factores implicados no han permitido la elaboración de modelos convincentes y de leyes generales y muchos creen que eso no será nunca posible. No obstante, la Teoría de la Educación proporciona un marco explicativo suficientemente sólido, cuyo conocimiento interesa considerar en nuestra área.

Y, en tercer término, la teoría se concibe como proceso de observación/descripción de los fenómenos educativos, mediante el que se obtienen conocimientos sobre un objeto. En este sentido la teoría aporta una organización de los estudios e investigaciones educativas, asume e integra datos e informaciones haciendo una descripción lo más exhaustiva posible. Estas tres perspectivas, conjuntamente, constituyen el marco de referencia de la Teoría de la Educación. De este modo puede abordar tres objetivos generales:

i) Considerar científicamente la educación en toda su realidad.
ii) Explicar pedagógicamente la naturaleza de la educación y la intencionalidad del acto educativo.

iii) Realizar una categorización epistemológica del fenómeno de la educación.[80]

Una noción clave en el surgimiento y desarrollo de la Teoría de la Educación es la noción de **formación**. Por lo que se refiere a la educación matemática la noción de formación ha estado ligada, principalmente, con los componentes conceptuales y procedimentales del conocimiento matemático; algunos especialistas han considerado también las estrategias y toma de decisiones para la resolución de problemas, pero sólo en fechas muy recientes ha empezado a tenerse en cuenta elementos afectivos y actitudinales como destacables en la formación que proporcionan las matemáticas.

Dentro de la noción de formación, cuestión clave es la relación que tiene el sujeto con el conocimiento matemático. Podemos hablar, alternativamente de **absorber, recibir, adquirir, descubrir, sintetizar, construir o inventar los conceptos y procedimientos matemáticos**. Independientemente de la fundamentación psicológica que sustente la opción elegida, no cabe duda que cada uno de los verbos anteriores plantea una relación con el conocimiento y una noción de formación en matemáticas diferente. Sin pretender alcanzar respuestas absolutas, la Teoría de la Educación debe proporcionar ideas claras a la Educación Matemática sobre la noción general de formación.

El concepto clave en Teoría de la Educación es el propio concepto de educación, que presenta, por su propia naturaleza, una problemáticidad intrínseca. A lo largo de la historia este concepto se ha rehecho en multitud de ocasiones, oscilando entre diversas opciones de un continuo, cuyos extremos los marcan el Naturalismo, por un lado, y el Culturalismo, por otro, siendo el Humanismo realista uno de sus puntos centrales. La educación ha sido una noción clave en la historia del pensamiento y ha estado sometida a múltiples elaboraciones por parte de filósofos y pensadores. Esto ha permitido considerar multitud de facetas y extraer las consecuencias lógicas de conceder prioridad a determinadas ideas y principios sobre la educación. También ha hecho surgir una serie de antinomias clásicas, que siguen expresando problemas reales del hecho educativo.

Todas estas cuestiones no son triviales para el trabajo que se realiza en el Area de

[80] Quintana J. Mª (1988). Obra citada.

Didáctica de la Matemática y, puesto que la Teoría de la Educación existe hoy día como disciplina diferenciada, no cabe duda que sus conclusiones generales constituyen parte importante de la fundamentación de nuestra área de conocimiento.

II.3.2.2. Didáctica General y Didáctica de la Matemática.

La Didáctica General la hemos caracterizado anteriormente como la disciplina que explica los procesos de enseñanza-aprendizaje para proponer su realización consecuentemente con las finalidades educativas. Destaca así una dimensión explicativa, que profundiza en la comprensión, y una dimensión proyectiva, que incluye una valoración moral, relacionándose ambas dimensiones dialécticamente.

Establecer un concepto claro de enseñanza, delimitando agentes, funciones, planificación, realización, implicaciones y valoración de la misma, es uno de los cometidos de la Didáctica General. La enseñanza se ha descrito como una actividad intencional, diseñada para dar lugar al aprendizaje de los alumnos. Ligar la enseñanza con el aprendizaje pone de manifiesto el entramado de acciones y efectos que se generan en las situaciones de instrucción. El aprendizaje es el resultado y efecto de asumir y realizar las funciones de alumno, no es algo que se siga automáticamente de la enseñanza como causa. Tarea central de la enseñanza consiste en hacer posible al alumno la realización de las tareas de aprendizaje. La enseñanza no es un fenómeno de provocación de aprendizajes sino una situación social, sometida a las variaciones de las interacciones entre los participantes, a las presiones exteriores y a las definiciones institucionales de los papeles que esos participantes deben desempeñar. Las tareas de enseñanza, más que realizar la transmisión de conocimientos, tienen que proporcionar al alumno instrucciones sobre cómo realizar las tareas de aprendizaje.

Desde este punto de vista, los procesos de enseñanza-aprendizaje son, a la vez, un fenómeno que se vive y se crea desde dentro; son procesos de interacción e intercambio dirigidos por determinadas intenciones. Los procesos de enseñanza-aprendizaje son “el sistema de comunicación intencional que se produce en un marco institucional y en el que se generan estrategias encaminadas a provocar el aprendizaje”.[81]

---

[81] Contreras J. Obra citada.

De esta descripción conviene destacar tres ideas, en relación con los procesos de enseñanza-aprendizaje.

i) Ocurren en un contexto institucional.
ii) Los procesos de enseñanza/aprendizaje se pueden interpretar mediante los esquemas de los sistemas de comunicación humana.
iii) El sentido interno de estos procesos está en hacer posible el aprendizaje.

Entender los procesos de enseñanza/aprendizaje, en su auténtica naturaleza, significa entenderlos en la dinámica social de la que son parte y en el análisis crítico de las auténticas tareas que realiza.

El siguiente esquema sintetiza las ideas anteriores[82] :

Estas reflexiones sobre el significado de la enseñanza y de los procesos de enseñanza-aprendizaje son especialmente importantes para las matemáticas. La visión convencional del

[82] Contreras J. Obra citada. Tomado de Barnes D. (1976). From Communication to Curriculum.

profesor recreando el conocimiento matemático ante el alumno mediante el enunciado de los axiomas y proposiciones convenientes, con el desarrollo deductivo formal posterior de las pruebas y demostraciones correspondientes, que es asimilado por el alumno mediante copia de los procedimientos mostrados, es un esquema excesivamente simple, que falsea la naturaleza de los procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. La reflexión realizada desde la Didáctica General para profundizar en la naturaleza de estos procesos debe impulsar la reflexión correspondiente en Didáctica de la Matemática.

Un segundo punto importante lo encontramos al considerar que la Didáctica trata de desarrollar un aparato científico basado en la capacidad de predicción de los fenómenos didácticos, para garantizar mediante la capacidad de anticipación el control de los procesos y los resultados, al actuar dentro de un marco conocido. Enunciar proposiciones predictivas con respecto a los sucesos didácticos supone entenderlos e interpretarlos como fenómenos sometidos a una regularidad suficiente como para anticipar cuál será el comportamiento posterior o consecuencia.[83]

Hay una crítica a una lectura demasiado simplista sobre la necesidad de controlar los procesos y resultados de las personas participantes, de sus relaciones, aprendizajes y conductas. Cuando se quiere evitar que nada quede fuera de control se dirige el orden social de la escuela, provocando la aparición -a veces - de técnicas depuradas de control social. Gran parte de las críticas que se han hecho a la orientación tecnológica de la Didáctica está en ese carácter de necesidad inevitable que imprime a sus conclusiones forzando a un ajuste casi mecánico y ritual a los esquemas de actuación prescritos como más adecuados.

La enseñanza de las matemáticas tiene ciertos aspectos, relativos al aprendizaje de algoritmos y dominio de las destrezas correspondientes, que se ajustan con facilidad al esquema tecnológico. Sin embargo, reducir los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas a estos elementos es una simplificación abusiva y contraproducente.

Tarea de los investigadores es recordar a cada generación de prácticos que lo que parece un proceso natural que ocurre en el contexto de una institución natural es, en realidad, un

[83] Contreras J. Obra citada.

proceso socialmente construido en una institución socialmente construida.

Por otra parte, la comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje no se agota en el análisis y comprensión de los acontecimientos del aula; la enseñanza necesita de la elaboración de estrategias para interpretar y acortar las distancias entre las condiciones de la realidad y las aspiraciones educativas. Esto lleva a considerar qué procesos intervienen en la formación del conocimiento de los alumnos en las clases y qué relación guarda tanto con lo que se enseña explícita como implícitamente; de dónde procede el conocimiento que se enseña en la escuela; quién y cómo lo selecciona y bajo qué intereses, argumentos y suposiciones; qué relación hay entre las decisiones curriculares y los participantes en el aula; a qué intereses sirve la escuela y cómo se realizan a través de todos los procesos mencionados.

También la Didáctica estudia el papel del Profesor en cuanto figura fundamental en el desarrollo de las estrategias de enseñanza. Finalmente, la Didáctica en cuanto ciencia de la enseñanza, está moralmente comprometida con la intervención educativa; esta influencia en la realidad educativa implica la adopción de una posición de valor para el análisis y de un compromiso con la práctica para la realización de esos ideales.

Todas estas cuestiones, analizadas, debatidas y organizadas por la Didáctica General ofrecen un apoyo indiscutible a la Didáctica de la Matemática, cuya necesidad está fuera de discusión.

Hay otra aportación de la Didáctica General a nuestra área de conocimiento, que es la relativa a la fundamentación epistemológica de la Didáctica, y que se concreta en dos cuestiones principales: en primer lugar, cuál es el carácter del conocimiento que genera; la naturaleza científica de ese conocimiento, en segundo lugar.

El primer problema expresa la dificultad de la relación entre el conocimiento y la acción; se ha dicho que la Didáctica es la disciplina que explica los procesos de enseñanza-aprendizaje para proponer su realización, lo que implica una dependencia del componente explicativo respecto del compromiso con la práctica y, por tanto, la práctica debe constituir la fuente de contrastación de la Didáctica. Una de las dificultades de esta doble faceta explicativa-normativa de la Didáctica consiste en aclarar qué constituye una explicación genuinamente didáctica. Al hacer el balance de la situación actual de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, en el apartado II-2-2, siguiendo a Kilpatrick, ya vimos esta tensión entre teoría y práctica y los planteamientos de superación de la disyuntiva que nos ofrecía este autor, siguiendo y desarrollando las reflexiones críticas de Carr y Kemmis[84], realizadas desde la Didáctica General. La naturaleza del conocimiento generado por la Didáctica de la Matemática es una cuestión abierta, que no puede aislarse de las reflexiones realizadas sobre la naturaleza del conocimiento que proporciona la Didáctica. Cualquier opción epistemológica en el campo de la Didáctica tiene su versión correspondiente para la Didáctica de la Matemática; más aún, cuando el especialista de Didáctica de la Matemática reflexiona a este nivel de abstracción está haciendo un trabajo como didacta, como pedagogo, en general, lo cual es legítimo si se hace con el rigor y honestidad adecuados, pero no está reflexionando sobre cuestiones que afectan únicamente a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, sino a la enseñanza-aprendizaje en general.

En esta perspectiva epistemológica general, tiene también sentido la discusión sobre si las disciplinas educativas son o no científicas. Parece haber dos razones diferentes en la base de esta discusión. La primera de ellas afecta igualmente a todas las ciencias sociales, y se plantea el identificar la ciencia mediante planteamientos positivistas y, por tanto, niega el carácter de ciencia a toda disciplina que no se acomode en sus formas teóricas y en sus prácticas metodológicas al modelo de ciencias físico-naturales.

La segunda razón es específica de la Didáctica ya que, a diferencia de las restantes ciencias sociales, que tienen un compromiso teórico, las disciplinas educativas tienen un fuerte compromiso práctico, es decir, su fin último no es limitarse a saber cómo funcionan las prácticas educativas -por importante que pueda ser sino a conocer cómo se alcanzan determinadas aspiraciones educativas; establecer el carácter científico de una disciplina de estas características necesita de una justificación propia.

Benedito[85], despues de una revisión de las principales tendencias y enfoques en relación con la teoría del conocimiento científico, que incluye las ideas y planteamientos tanto de la ortodoxia analítica como de enfoques alternativos, entre los que incluye a Piaget, Kuhn, Bunge y Lakatos, así como las aportaciones de autores españoles, como Quintanilla y Pérez Gómez, plantea la cuestión en

[84] Carr W. & Kemmis S. (1988). Teoría crítica de la enseñanza. Barcelona: Martínez Roca.

[85] Benedito V. (1987). Introducción a la Didáctica. Fundamentación teórica y diseño curricular. Barcelona: Barcanova.

los siguientes términos: "La Didáctica, ¿ciencia, tecnología o técnica?", desarrollando a continuación su defensa de la Didáctica como ciencia en 22 proposiciones, que pasamos a resumir:

1. *Las diferencias entre ciencias de la naturaleza y ciencias sociales son cuestiones de grado y de nivel de elaboración.*
2. *La dimensión ideológica del conocimiento científico es el motor de desarrollo científico. En didáctica, las ideologías son imprescindibles en los programas de investigación científica (Quintanilla).*
3. *La relación entre objeto y sujeto es característica y propia de las ciencias humanas y, por tanto, de la Didáctica.*
4. *El concepto de racionalidad científica ha de tomar en consideración los aspectos contextuales, psicosociales, del mundo fáctico e institucional.*
5. *Una teoría científica no es lo mismo que su formulación lingüística, pero ambas cosas no están reñidas; se ha de buscar y alcanzar - en la medida de lo posible- la máxima claridad y rigor en los términos.*
6. *Los conceptos y principios han de relacionarse en conformidad con las leyes de la lógica para formar un cuerpo integrado de hipótesis y leyes.*
7. *La didáctica presenta dificultades epistemológicas en torno al método de investigación. El problema y la dificultad a superar es el grado de precisión en la observación de los hechos.*
8. *La didáctica como ciencia ha de tender a formar un cuerpo creciente de conocimientos que se caracterizan por la racionalidad, sistematicidad, exactitud, verificabilidad y falibilidad. El conjunto de ideas y teorías establecidas provisionalmente forman el conocimiento científico de la didáctica.*
9. *La estructura explicativa de las teorías didácticas se ha de configurar a partir de una rigurosa investigación científica y tecnológica que descienda a marcos reales y prácticos.*
10. *La evidencia o apoyo empírico es condición de validez de una teoría científica. Los conceptos, principios e hipótesis derivados de una teoría han de someterse a verificación y falsación experimentales.*
11. *La concepción sobre el hombre y el mundo ha de planear sobre la investigación y sobre la aplicación práctica de lo investigado.*
12. *La interrelación y la pluralidad metodológicas parece, en el momento actual, la mejor opción posible. El único criterio para la exclusión de un método es su falta de rigor.*

13. *Las metodologías de los programas de investigación o de los paradigmas proporcionan a la didáctica un marco coherente de investigación.*
14. *El conocimiento científico en didáctica se caracteriza por su provisionalidad, por su construcción y reconstrucción permanentes.*
15. *La normatividad didáctica ha de construirse a partir de resultados de investigación contrastados; nuevas investigaciones pueden modificar la norma.*
16. *El progreso científico exige tolerancia, tenacidad y proliferación de teorías; una búsqueda del contraste y variedad de perspectivas.*
17. *El peligro de la subjetividad debe superarse mediante un procedimiento metodológico depurado, pruevas evidentes y el contraste y contraposición de resultados.*
18. *Los paradigmas alternativos deben disponer de tiempo y oportunidades para su consolidación.*
19. *En el momento actual, el paradigma ecológico parece el más adecuado para fundamentar y desarrollar el concepto científico de la Didáctica.*
20. *El carácter pragmático, de utilidad social, de la investigación didáctica debe primar sobre cualquier otro aspecto a la hora de seleccionar núcleos de contenidos y temas sobre los que volcar la investigación.*
21. *También hay que revisar y elaborar teorías que vayan conformando los fundamentos y estructuras del edificio didáctico.*
22. *El uso de esquemas formales, como el de Bunge, para los campos de investigación puede tener valor instrumental en Didáctica cuando se trata de concretar, situar y aclarar teorías, modelos, núcleos temáticos de investigación, etc.*

No obstante, Benedito no limita su análisis a las consideraciones anteriores sino que contempla, igualmente, la didáctica como saber tecnológico y como hacer técnico, entendiendo que estas tres dimensiones: científica, tecnológica y técnica, delimitan con mayor claridad el estatus epistemológico de la Didáctica ya hemos dicho con anterioridad que no entra dentro de nuestras preocupaciones prioritarias establecer aquí una fundamentación sobre el carácter científico de la Didáctica de la Matemática, pero entendemos que la clarificación de estas cuestiones contribuye a la delimitación y avance de este Area de Conocimiento. También entendemos que el estatus epistemológico de la Didáctica de la Matemática tiene dos fuentes de legitimación: una teórica y común a todas las disciplinas didácticas; otra específica y procedente de las aportaciones e investigaciones hechas desde su propio campo de trabajo y estudio, que ya hemos comentado previamente.

II.3.2.3. Teoría Curricular y Didáctica de la Matemática.

La puesta en práctica de los procesos de enseñanza-aprendizaje necesita de una organización y planificación y unos criterios claros de desarrollo. El Sistema Escolar es un sistema complejo de organización, diseñado para producir unos determinados resultados, que denominamos educación institucional. La transmisión y adquisición de conocimientos y también de valores, conductas, reglas de actuación, actitudes, habilidades y destrezas necesitan de un entramado complejo de relaciones sociales institucionales y personales, cuya planificación y criterios de realización los estudia la Teoría Curricular.

La Teoría Curricular se ocupa de todos los elementos que intervienen en la planificación, ejecución y control de cualquier plan de formación o de cualquier formación planificada. Se trata de una disciplina que procede del campo de la Didáctica y, por tanto, es prescriptiva y organizativa. Sin embargo, tiene su fundamento en una consideración profunda de qué es y en qué consiste la educación, para dar razón de la especificidad de la educación institucionalizada. Conecta, pues, con las dos disciplinas consideradas anteriormente.

La Teoría Curricular, en nuestro caso, se ocupa de explicitar detalladamente todos los elementos, y las relaciones estructurales entre ellos, que definen un plan de formación en Educación Matemática.

El concepto de Currículo es un noción compleja, suceptible de diferentes análisis y niveles de reflexión. Stenhouse[86] considera que Currículo significa plan de formación, que expresa, por un lado, lo que debiera ocurrir - teoría - y, por otro lado, lo que de hecho ocurre - práctica-.

[86] Stenhouse L. (1984). Investigación y Desarrollo del Currículo. Madrid: Morata.

Howson, Keitel y Kilpatrick[87] establecen que el currículo comprende metas, contenidos, métodos y medios de valoración, y debe destacar el papel del profesor.

En los documentos elaborados por el Ministerio de Educación y Ciencia[88] se establece que Currículo es un proyecto que determina los objetivos de la educación escolar, promueve el desarrollo e incorporación de la cultura y propone un plan de acción; así se satisfacen dos tipos de funciones diferentes: explicitar las intenciones educativas, que se expresan en el Diseño del Currículo, y servir de guía para la práctica, lo cual se logra en el Desarrollo del Currículo. De este modo, el currículo responde a una serie de cuestiones fundamentales, como son: ¿qué enseñar?, ¿cuándo enseñar?, y ¿qué, cómo, cuándo evaluar?.

Nosotros hemos elaborado nuestra propia noción de currículo, que ya presentamos en el apartado II.2.5 de este Proyecto sobre la base de cinco componentes fundamentales que, a nuestro juicio, cubren toda la variedad de planes de formación y, en particular, los derivados de la Educación Matemática. Esquematizando las ideas ya presentadas, tenemos:

---

[87] Howson G., Keitel C., Kilpatrick J. (1981). Curriculum Development in Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

[88] MEC (1989). Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: Servicio Publicaciones del MEC.

Delimitar los componentes que hacen viable un plan de formación no es una actividad superflua ya que cada uno de ellos es determinante para la realización de ese plan y el cumplimiento de las metas previstas. Ya hemos visto en otro apartado de este Proyecto que la cuestión ¿Por qué se enseñan matemáticas? es clave en el campo de la Educación Matemática, situada en el centro de una red compleja de opciones y prioridades, y cuya resolución resulta problemática. La toma de decisiones que acompañan a la elección de las metas en Educación Matemática y a su puesta en práctica y realización necesitan de un marco teórico claro, que viene determinado por la Teoría Curricular.

Hay otro campo de reflexión menos general que el anterior. Una vez elegido el marco teórico la concrección del currículo tiene diferentes niveles de responsabilidad: el nivel de la práctica escolar, el nivel administrativo y el nivel político. Hay una serie de decisiones que afectan al modo concreto en que la Educación Matemática se va a poner en práctica. Hay una responsabilidad del Centro, de su Equipo Educativo y de su Consejo Escolar, hay una responsabilidad de los Profesores que constituyen el Seminario de Matemáticas, y, finalmente, hay una responsabilidad de cada Profesor singular. El esquema de trabajo sobre el que se articulan las distintas responsabilidades en la práctica escolar consta de cuatro elementos o componentes básicas:

* **Objetivos.**
* **Contenidos.**
* **Metodología.**
* **Evaluación.**

Estas cuatro componentes no se presentan aisladas, sino que entre sí están interconectadas de tal modo que cualquier modificación sobre una de ellas afecta al resto. Las cuatro componentes constituyen un sistema interno, que gestiona usualmente el Equipo Docente.

La importancia de las componentes anteriores la encontramos recogida en la LOGSE: “ Se entiende por currículo el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, cíclos, grados y modalidades del sistema educativo que regulan la práctica docente"[89] . Mucho antes, y con relación a la Educación Matemática, ya hemos indicado que encontramos esta misma idea en Steiner[90], quien señala que las cuatro dimensiones del concepto currículo son: objetivos, contenidos, método y evaluación.

Una representación esquemática de las relaciones entre estas cuatro componentes o dimensiones del concepto de Currículo a nivel docente viene dada por el siguiente tetraedro:

El sistema anterior no puede considerarse aislado, sino que se integra en otro sistema más amplio, cuya responsabilidad y gestión corresponde a la Administración educativa, y que, a su vez, tiene unos componentes o dimensiones prioritarias: Metas, Conocimientos, Profesorado y Alumnado. Esquemáticamente lo visualizamos así, destacando que el nuevo Sistema abarca al anterior.

---

[89] Ley Orgánica 1/1990 de 3 de Octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. BOE nº238 de 4 octubre de 1990. Madrid.

[90] Steiner H. (1980). Institut für Didaktik der Mathematik: Comaparative Studies of Mathematics Curricula. Change and Stability 1969-1980. Bielefeld. IDM Universität Bielefeld.

El esquema identifica cada componente del sistema exterior como dual de un componente del sistema interior; también sitúa los componentes del sistema interno en un plano determinado por tres componentes del sistema externo. Este doble sistema no lo entendemos como estático sino como dinámico, y la mayor o menor fuerza de las relaciones entre sus componentes hace que el equilibrio entre ellas tenga su centro de gravedad más o menos desplazado y condicionado.

A su vez, el tercer nivel de responsabilidad, que es el nivel de las decisiones generales sobre política educativa, viene determinado por otras cuatro componentes principales sobre las que se establecen prioridades y se toman decisiones. Estas cuatro componentes o categorías son: Ciudadano, Sociedad, Cultura y Educación y entre ellas determinan un nuevo sistema de relaciones, que se integra con los anteriores, y cuya representación esquemática es como sigue:

La Teoría Curricular proporciona un marco para el estudio detallado de los niveles de análisis, reflexión y responsabilidad en la puesta en práctica de un plan de formación; también distingue las componentes principales en cada uno de los niveles, las relaciones entre ellas y la conexión con las del nivel anterior; finalmente, proporciona un esquema para analizar detalladamente cada una de esas componentes y su intervención en Educación Matemática.

No se agota la Teoría Currícular en las aportaciones anteriores, ya que el estudio detallado de cada una de las componentes que hemos explicitado está proporcionando una información sistematizada, unos esquemas de estudio y reflexión y unos campos de estudio e investigación ricos y complejos, aún por desarrollar en Educación Matemática; pensemos solamente en los estudios sobre Evaluación en Matemática y en el interés que están provocando estos últimos años. Por no hacer este apartado excesivamente extenso nos vamos a limitar a mencionar otras dos aportaciones importantes de la Teoría Curricular a la Educación Matemática. En primer lugar queremos referirnos a la preparación de documentos curriculares que planifiquen la realización del trabajo en el aula con carácter inmediato; nos referimos a los documentos conocidos hasta ahora como Programaciones, que también se pueden denominar como Diseño de una Unidad Didáctica o de un bloque. Estos diseños deben contemplar las cuatro componentes principales de todo diseño: objetivos, contenidos, metodología y evaluación. Sin embargo, en la mayor parte de los casos, la información que transmiten estas cuatro componentes para el desarrollo de un tema concreto resulta insuficiente por esquemática y limitada. Son necesarios otros descriptores que incorporen la riqueza conceptual, procedimental y actitudinal de cada bloque de contenidos, sus potencialidades metodológicas, aplicaciones, modelos, representaciones, materiales y recursos; la concrección formativa o utilitaria de cada contenido; el modo de diagnosticar, corregir, orientar y valorar en cada caso. Estos descriptores, su sistematización y uso, constituyen también parte importante de la aportación de la Teoría Curricular a la Educación Matemática, y ya veremos su interés en el desarrollo del Programa de la Asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato.

Para concluir, queremos también indicar que gran parte de los diseños quedarían incompletos si no vinieran complementados por materiales concretos que proponen y organizan secuencias de trabajo para los alumnos. Los libros, fichas, guiones de trabajo, software educativo, juegos e instrucciones, problemas, situaciones abiertas, materiales, etc, constituyen el complemento ineludible de todo plan de formación en matemáticas. Recientemente se está tratando de sistematizar este campo de trabajo con la denominación genérica de Ingeniería Didáctica. La ingeniería de la Didáctica de la Matemática es también un campo de estudio, aún abierto, procedente de la Teoría Curricular.

II.3.3. Aportaciones de la Psicología.

En apartados anteriores de este Proyecto se ha visto la influencia destacable que ha tenido la Psicología sobre el campo de la Educación Matemática, desde el comienzo mismo de la aparición de ambas disciplinas. La Educación Matemática ofrece un campo de problemas con características bien definidas que han recibido atención por parte de la Psicología. La Psicología ha ofrecido y ofrece una variedad de marcos teóricos y metodológicos con los que plantear y estudiar cuestiones importantes para la Educación Matemática, sistematizar e interpretar datos e informaciones procedentes de la experiencia y avanzar respuestas a cuestiones planteadas. Esta relación mútua, que ha enriquecido a las dos disciplinas, la hemos apreciado desde los comienzos de la investigación en Educación Matemática; también hemos considerado el predominio de cuestiones cognitivas al tratar de establecer los principales problemas de la Educación Matemática; igualmente, hemos visto que en el desarrollo actual de la Educación Matemática es imprescindible un cierto dominio del campo de la psicología, en tanto que es obligado plantearse y tratar de buscar respuesta a cuestiones generales, de fundamentación psicológica, como las siguientes: ¿Cómo piensa la gente cuando trabaja en matemáticas?, ¿Cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?, ¿Qué hacen las personas cuando ejecutan tareas matemáticas?, ¿Cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?, ¿Qué hacen las personas cuando ejecutan tareas matemáticas?, ¿Cómo se aprende a pensar de forma matemática?.

La Psicología ha hecho aportaciones importantes a la Educación Matemática; en este apartado vamos a presentar y comentar tres áreas de dominio psicológico que tienen influencia destacable y contribuyen al avance de la Educación Matemática, señalando algunas de sus características más significativas para nuestra materia en cada caso. Nos vamos a referir a:

*** La psicología cognitiva y el modelo de procesamiento de la información.**
*** Psicología de la Educación.**
*** Constructivismo.**

II.3.31. Psicología cognitiva. Modelo de procesamiento de la información.

En este apartado seguimos las ideas y el planteamiento de Mayer.[91]

[91] Mayer R. (1981). El futuro de la Psicología Cognitiva. Madrid: Alianza Universidad.

Por **Psicología cognitiva** se entiende el análisis científico de los procesos mentales y estructuras de memoria humanas con el fin de comprender la conducta humana.

"Análisis científico" -alude al cómo-. No podemos observar los sucesos mentales privados, sólo pueden inferirse a partir de la conducta de alguien. Los psicólogos cognitivos tienen que diseñar métodos científicos para observar la vida mental indirectamente. Los principales instrumentos de la psicología cognitiva son técnicas de análisis que permiten dividir las actividades globales de la mente en componentes que se puedan medir.

"Procesos y estructuras mentales". La psicología cognitiva estudia lo que ocurre dentro de la cabeza de una persona cuando realiza una tarea determinada -es decir, procesos mentales- y el modo en que la persona almacena y utiliza su conocimiento para realizar la tarea - es decir, las estructuras mentales-.

"Comprender la conducta humana". El objetivo de la psicología cognitiva es describir los sucesos cognitivos con claridad y precisión, para predecir y comprender mejor la conducta humana.

La psicología cognitiva se caracteriza porque su objeto de conocimiento es la actividad racional o mental humana, su método es el análisis científico de las estructuras y procesos mentales y su objetivo es comprender la conducta humana.

La actividad matemática es un caso de actividad racional humana, con características bien definidas, que resulta especialmente adecuada para el análisis científico y que forma parte del campo de interés de la psicología cognitiva.

Entre los precedentes de la psicología cognitiva tenemos el conductismo, con el que conviene señalar y establecer diferencias claras.

El conductismo tiene como objetivo comprender la conducta humana pero, a diferencia de la psicología cognitiva, nunca intenta comprender ni estudiar los procesos internos que subyacen a la conducta. Sin embargo, se atiene a los métodos rigurosos de la ciencia, aún cuando las técnicas específicas son distintas. Finalmente, reduce su objeto al estudio de las leyes de la conducta, y no estudia los sucesos que no son observables directamente.

Como ya se ha indicado en otro apartado de este Proyecto, el conductismo ha tenido una influencia considerable en los primeros estudios e investigaciones en Educación Matemática, así como en la fundamentación psicológica de los procesos de instrucción, influencia que aún hoy día es fácil detectar.

Instrumentos de la psicología cognitiva. Cuatro de los instrumentos más importantes en psicología cognitiva, para el estudio de la conducta humana, son los siguientes:

i. <u>Análisis del sistema de procesamiento de información</u>. Se basa en la idea de que las personas somos procesadores de información: recibimos información, modificamos la información mediante una operación mental, aplicamos la información mediante una operación mental, aplicamos otra operación que la vuelve a modificar, y así sucesivamente hasta que se llega a un resultado disponible para almacenar en la memoria o para generar una conducta específica.

El modelo de procesamiento de la información hace referencia a las diferentes organizaciones a que se somete la información a medida que pasa a través del sistema.

ii. <u>Análisis de Procesos Cognitivos</u>. Esta técnica de análisis consiste en elegir una tarea intelectual, observar a una persona cómo resuelve el problema y preguntarle sobre lo que hace, analizar el proceso en pequeñas partes consistentes en procesos (manipulación de cosas) y decisiones (comprobaciones de algo); después hay que confrontar el modelo de proceso que se ha construido con la conducta humana real. El modelo procesal de la tarea estudiada debe poder escribirse en forma de un programa de ordenador, de un diagrama de flujo, o de algún otro modo.

iii. <u>Análisis de estructuras cognitivas</u>. Existen técnicas para representar el conocimiento de una persona que conoce una historia u otro tipo de información verbal. La información se analiza en función de grandes apartados y de las relaciones entre ellos; seguidamente se compara el modelo estructural con las actuaciones reales de los sujetos.

iv. <u>Análisis de estrategias</u>. El cuarto de los principales instrumentos de la psicología cognitiva está relacionado con la investigación de las técnicas que utilizan las personas para controlar los diferentes fragmentos de información que poseen. Estas técnicas se conocen con el nombre de estrategias cognitivas.

Veamos más en detalle algunas características de estos cuatro instrumentos y algunas contribuciones realizadas a la Educación Matemática.

Procesamiento de la información.

El instrumento cognitivo más útil para explicar y estudiar el problema de las diferencias en las aptitudes es el modelo general del procesamiento de la información. Idea fundamental es que todos los seres humanos están equipados básicamente con el mismo sistema de procesamiento de información (SPI).

Los componentes principales del sistema de procesamiento son:

i. Almacen sensorial a corto plazo (ASCP). Tiene una capacidad de memoria grande o ilimitada; el modo de almacenamiento es exacto y sensorial; la duración es muy breve ya que se desvanece en medio segundo.

ii. Memoria a corto plazo y memoria en funcionamiento (MCP-MF). Tiene una capacidad limitada (7 "chunks"); la información se transforma y se almacena por repetición y repaso; la duración es mayor: unos 18 sg. sin repaso; la información se pierde por falta de repaso o por desplazamiento debido a nueva información.

iii. Memoria a largo plazo (MLP). Tiene capacidad ilimitada; el modo de almacenamiento es organizado y significativo; la duración se supone permanente y por ello no se contempla la pérdida de la información sino el fallo en la recuperación o la interferencia de otras informaciones.

Esquemáticamente, el modelo de procesamiento de la información, tiene las siguientes etapas:[92]

Analizar las aptitudes en términos de los componentes del sistema de procesamiento de la información consiste en analizarlas en términos de las características de los almacenes de memoria y los procesos que intervienen en la ejecución de una tarea determinada.

El modelo de procesamiento de la información se ha aplicado al estudio de una variedad de tareas tales como estudios sobre Atención, Discriminación, Reconocimiento de Patrones, etc. Entre las aplicaciones de interés para las matemáticas se encuentran los estudios relativos a tareas de inducción, que pasamos a describir brevemente, siguiendo a Pellegrino[93] .

Se entiende por Inducción el desarrollo de reglas, ideas o conceptos generales a partir de grupos específicos de ejemplos. Al analizar semejanzas y diferencias entre experiencias específicas se extraen las características generales de las clases de objetos, sucesos y situaciones. Se aplican estas generalizaciones a nuevas experiencias, se refinan y modifican y así pasan a formar parte de nuestra base de conocimientos permanentes.

---

92 Mayer R. Obra citada.
Reed, S. (1988). Cognition. Brooks-Cole Pub. Comp. C.A.

93 Pellegrino J. (1986). Capacidad de Razonamiento inductivo, en R. Stenberg: Las capacidades humanas. Barcelona: Labor.

Tareas de inducción: Todas las tareas de razonamiento inductivo tienen la misma propiedad básica. Se presentan un grupo de estímulos a un sujeto y su tarea consiste en inferir el modelo o regla estructural, de forma que se pueda generar o seleccionar una continuación apropiada del modelo.

Se dan una variedad de tareas diferentes: clasificaciones, series incompletas, analogías y matrices. En las tareas de inducción se trabaja también sobre una variedad de contenidos: letras, números, palabras, figuras.

El procesamiento de la información aborda el estudio de las tareas de razonamiento inductivo planteando tres cuestiones generales:

1º. ¿Cuáles son los procesos psicológicos básicos implicados en la resolución de problemas de razonamiento inductivo?

La respuesta consiste en proponer una hipótesis sobre cuáles son los procesos mentales necesarios para enfrentarse al contenido y a la estructura de un problema. Parte de la hipótesis debe incluir suposiciones sobre la secuencia en que se presentan o ejecutan los procesos y proponer un esquema interpretativo teórico.

2º. ¿Cuáles son las predicciones de las hipótesis y el esquema teórico asociado y cómo podemos probar su validez?

Normalmente, la hipótesis debe basarse en una teoría que proporcione predicciones explicativas sobre las diferencias entre tareas de inducción. Se pueden hacer experimentos para falsar esa teoría. Se debe conseguir una teoría que explique y prediga el rendimiento.

3º. ¿Cómo se diferencian las personas?

La teoría debe proporcionar una base para analizar detalladamente las diferencias individuales en velocidad y seguridad de ejecución.

Veamos el modo en que el procesamiento de la información ha hecho el estudio de un tipo concreto de razonamiento inductivo: las series numéricas incompletas.

Se consideran tres componentes en el proceso de completar series:

* Primera componente: detección de relaciones; hay que examinar la serie y emitir una hipótesis de cómo un elemento de la serie está relacionado con otro.

En series de letras hay tres relaciones básicas: identidad, continuidad, precedencia.

En series de números hay mayor varided de relaciones: tipo de operación, variación en la magnitud de la operación, combinación de operaciones.

* Segunda componente: descubrimiento de la periodicidad.

La longitud del periodo es el número de elementos que constituyen un ciclo completo del modelo en el que actuan las relaciones detectadas.

Hay dos enfoques para descubrir la periodicidad de las series:

i. enfoque adyacente: se descubre el periodo observando las interrupciones regulares en las relaciones entre elementos adyacentes.

ii. enfoque no adyacente: se descubre la longitud del periodo observando algún intervalo regular en el que se repita una relación.

* Tercera componente: finalización de la descripción del modelo.

Localizado el periodo - su longitud- hay que determinar las relaciones establecidas entre las restantes posiciones dentro del periodo, se llega así a definir de forma completa la regla de la secuencia.

* Cuarta Componente: extrapolación.

Los resultados obtenidos de los estudios realizados sobre la base del modelo anterior han aportado las siguientes evidencias:

La solución de un problema de series no puede subdividirse en tiempos discretos para cada unos de los diferentes componentes.

Uno de los factores más importantes que afectan a a la exactitud de la solución de problemas de series numéricas es el número de espacios de la memoria que se necesitan para representar el modelo de un item.

La capacidad para manejar grandes cantidades de información y reglas más complejas también puede ser atribuible a diferencias en los conocimientos. Los adultos son más capaces en el manejo de reglas numéricas más complejas.

Los niños presentan un mejor rendimiento en problemas de series basados en relaciones de adición y sustracción que en los que se basan en relaciones de multiplicación y división. Los problemas de series incompletas son índices sensibles de la capacidad de resolución de problemas y de razonamiento inductivo.

El razonamiento inductivo es un elemento destacable en el razonamiento matemático, por ello el estudio de los procesos psicológicos implicados en la resolución de series incompletas, en particular, y de analogías, en general, tienen interés para el conocimiento e interpretación del razonamiento matemático. El procesamiento de la información aborda el problema de las habilidades y procedimientos mediante el diseño de modelos para los procesos cognitivos.

Modelos de procesos cognitivos.

Según el enfoque cognitivo las personas no aprenden conductas directamente, sino que adquieren procedimientos de orden superior o sistemas de reglas que se utilizan para generar conductas en múltiples situaciones.

Para abordar el problema de las habilidades de procedimiento los psicólogos han tenido que desarrollar instrumentos rigurosos que permitieran analizar un proceso cognitivo en sus partes; y han aplicado con éxito técnicas diferentes para analizar formalmente y especificar el conocimiento procedimental que utiliza una persona ante un problema dado.

Hay dos formas útiles de representar el conocimiento procedimental: escribir un programa y dibujar diagramas de flujo. Un programa es una lista de cosas que hay que hacer, empezando desde arriba y siguiendo paso a paso las instrucciones.

Las técnicas de análisis de procesos cognitivos se han empleado con éxito al estudio de cómo los niños ejecutan procedimientos aritméticos, permitiendo prever, detectar, diagnosticar y corregir errores en la ejecución de tareas algorítmicas en aritmética. El enfoque cognitivo contempla el aprendizaje como la adquisición de procedimientos cada vez más potentes. Este enfoque es bastante prometedor respecto del tipo de cambio que es necesario introducir en el modo de llevar a cabo la instrucción escolar.

Modelos de Estructuras Cognitivas.

El problema del conocimiento verbal. Gran parte de lo que sabemos sobre el mundo nos llega como información verbal. Cuando escuchamos o leemos información verbal siempre tendemos a recordar algo u olvidar algo y también a añadir y cambiar cosas. ¿Cuál es el proceso por el que adquirimos nueva información verbal? ¿Cómo lo almacenamos en la memoria? Estas preguntas constituyen lo que podría llamarse el problema del conocimiento verbal.

El enfoque cognitivo del problema del aprendizaje verbal consiste en intentar analizar este conocimiento verbal en sus partes e indicar la estructura en la que se enlazan éstas. Por ello, un modelo estructural del conocimiento verbal de una persona consiste generalmente en elementos y relaciones entre esos elementos. Dos de las técnicas más útiles para representar el conocimiento verbal son las redes y los árboles. Una red es un diagrama en el que los elementos principales se señalan mediante cuadros u óvalos y las relaciones entre ellos se indican con flechas. Un árbol es un diagrama que comienza en un nivel superior, se ramifica en un segundo nivel, este a su vez, se ramifica en un tercero, etc.

Una variante de la representación mediante red es la del mapa conceptual, elaborada por Novak y Gowin, que viene utilizándose recientemente con éxito para representar y analizar el conocimiento declarativo que tienen las personas en relación con el dominio conceptual del conocimiento matemático. Esta técnica permite establecer los núcleos o unidades informativas de que dispone un sujeto en relación con un contenido concreto y las relaciones que es capaz de establecer estre ellas. Las ausencias o carencias en la representación permiten detectar posibles fallos o lagunas en el dominio conceptual correspondiente. Un ejemplo de mapa conceptual sencillo puede verse en el apartado II.3.2.3, relativo a la noción de currículo.

Modelos de estrategias cognitivas.

Las personas suelen disponer de varias estrategias alternativas para abordar tareas complicadas de resolución de problemas. Especificar con claridad cuáles son esas estrategias (también llamadas heurísticas) y cómo se utilizan, es una de las tareas de los psicólogos cognitivos. Lo podemos llamar el problema de las estrategias.

Los primeros trabajos sobre el problema de las estrategias se basaban en observaciones informales de personas cuando resolvían problemas. Una de las observaciones más comunes era que las personas tienden a pasar por una serie de fases antes de alcanzar la resolución de problemas matemáticos muy similares a las señaladas por algunos psicólogos previamente.

Los psicólogos de la Gestalt observaron que las personas se fijaban metas parciales para resolver problemas. Duncker constató que las personas primero tienden a fraccionar los problemas en metas parciales y después intentan acceder a esas metas parciales o submetas.

Polya también se dio cuenta de que cuando un problema parece muy difícil de resolver, una buena estrategia es fraccionarlo en pequeños problemas que sí admiten solución. Sin embargo, los instrumentos analíticos pertinentes para predecir y describir con claridad las estrategias en la ejecución de problemas eran un tanto vagos hasta la revolución cognitiva, si bien la obra de Polya y otros autores sacaron a la luz ideas interesantes, estimulando a los psicólogos para trabajar en este tema.

Con el enfoque cognitivo, a principio de los años cincuenta se construyeron ordenadores capaces de resolver problemas muy diversos. Para dotarlos de programas que resolvieran problemas, los ordenadores necesitaban varias cosas: un conjunto de procedimientos para acceder a objetivos, un conjunto de estrategias generales, o heurísticas, que controlaran el proceso de resolución de problemas.

Para resolver un problema con ordenadores se requerían descripciones muy precisas de heurísticas; para describir las estrategias de los humanos podrían utilizarse, en principio, los mismos instrumentos de análisis que se estaban utilizando para estudiar las estrategias de los ordenadores.

Uno de los programas de ordenador más conocidos, relacionados con este tema, fue el Solucionador General de Problemas (SGP), de Ernst, Newell y Simon, que supuso una ruptura con los planteamientos limitados anteriores.

Pensamos cómo se puede representar la estrategia de resolución de problemas de una persona. Para comprender cómo lo hace el SGP hay que considerar dos ideas. La primera es que el problema tiene que representarse en un "espacio del problema". El espacio del problema contiene el estado actual del problema, el estado final (o meta) del problema y todos los estados intermedios. El espacio del problema puede tener multitud de caminos inútiles y callejones sin salida.

La segunda idea es que la resolución de un problema conlleva una búsqueda dirigida por el objetivo, a través del espacio del problema. En nuestro caso, la solución del problema consiste en encontrar el recorrido correcto desde el estado inicial al estado final, pasando por algunos de los estados intermedios. El aspecto a resaltar aquí es que el proceso de búsqueda está dirigido por una meta.

A la estrategia básica de búsqueda en el espacio del problema del SGP se la denomina análisis medios-fines. El análisis medios-fines no es más que una de las estrategias posibles que puede utilizar una persona, pero es una de las más generales y de las más potentes. El análisis de medios-fines trabaja a partir de un espacio del problema muy bien especificado; tienen que estar definidos todos los estados posibles y todos los operadores. Después el solucionador de problemas genera metas y hace ensayos para encontrar operadores que puedan satisfacer cada meta; si no puede acceder a una meta determinada creará una submeta; nunca podrá trabajar con más de una submeta simultáneamente.

El SGP utiliza tres submetas generales para llevar a cabo el análisis medios-fines. Pueden usarse repetidamente en un problema, pero nunca más de una a la vez. Las tres submetas generales son:

1. Transformar el estado A en el estado B. Para acceder a esta submeta hay que comparar el estado A con el estado B; si son iguales, ya se ha conseguido pero si son diferentes hay que especificar claramente cuál es la diferencia D.

2. Reducir la diferencia D entre el estado A y el estado B. Una vez localizada la diferencia, para reducirla hay que aplicar algún operador Q apropiado.

3. Aplicar el operador Q al estado A. Para ello debemos considerar si el operador Q es adecuado para el estado A; cuando esto ocurre lo aplicamos y damos lugar a un estado A'.

Hay dos instrumentos importantes que se pueden utilizar para resolver la cuestión de las estrategias. Estos instrumentos, son: una técnica para especificar el espacio del problema y una técnica para especificar la estructura de metas del problema.

Las submetas e instrumentos anteriores se han empleado con éxito para simular las diversas estrategias posibles en la resolución de algunos problemas. El caso más conocido es el análisis del problema de la Torre de Hanoi, pero hay muchas otras aplicaciones a tareas específicamente matemáticas.

Cuanto más se avanza en la descripción de heurísticos generales potentes, más cerca se está del diseño de métodos para enseñar directamente estas técnicas a los principiantes.

II. 3.3.2. Aportaciones de la Psicología de la Educación.

La Psicología de la Educación trata de la aplicación de los principios y explicaciones de la Psicología a la teoría y la práctica educativas. Coll[94] expresa las diferentes opciones que pueden surgir de este planteamiento general: *"Por un lado, es posible entender la Psicología de la Educación como una simple etiqueta que sirve para designar la amalgama de explicaciones y principios psicológicos que son pertinentes y relevantes para la educación y la enseñanza; en este caso la Psicología no configura un ámbito propio de conocimiento, sino que es más bien el resultado de una especie de selección de los principios y explicaciones que proporcionan otras parcelas de la Psicología. Por otro lado, la Psicología de la Educación realiza contribuciones originales teniendo en cuenta al mismo tiempo los principios psicológicos y las características de los procesos educativos; en este caso la Psicología de la Educación es una disciplina con unos programas de investigación, unos objetivos y unos contenidos propios"*. Tenemos así, en un extremo, los autores que conciben la psicología de la educación simplemente como un campo de aplicación de la psicología; bajo esta idea se encuentra la creencia de que las aportaciones de la psicología permitirán resolver, por sí solas, los problemas educativos de una manera científica y racional. En el otro extremo se encuentran los planteamientos que niegan que la Psicología de la Educación sea una disciplina independiente.

En una posición intermedia se encuentran quienes conciben la Psicología de la Educación como una disciplina puente entre Psicología y Educación, con un objeto de estudio, unos métodos y unos marcos teóricos y conceptuales propios. En esta posición se encuentran autores, como Glaser y Ausubel, que tienen una influencia destacable en Educación Matemática. Glaser defiende una psicología de la instrucción, con características de disciplina aplicada, como una ciencia del diseño o disciplina tecnológica; idea clave es que no se limita a describir su objeto de estudio sino que además elabora procedimientos para modificarlo, Ausubel señala que la diferencia básica entre Psicología y Psicología de la Educación consiste en que la primera se ocupa del estudio de las leyes del psiquismo humano, mientras que la segunda limita su estudio a las leyes del psiquismo humano que actúan durante el aprendizaje escolar.

Con carácter general, se señala como objeto de estudio de la Psicología de la Educación los procesos de formación, es decir, los procesos de cambio sistemático en el comportamiento

---

[94] C. Coll (1990). Psicología y Educación: aproximación a los objetivos y contenidos de la Psicología de la Educación, en Coll, Palacios, Marchesi: Desarrollo psicológico y educación II. Madrid: Alianza.

humano que satisfacen los siguientes criterios: son procesos de adquisición, o lo que es lo mismo, dan lugar a un aprendizaje; son intencionales y se proponen una finalidad, es decir, responden a unas intenciones u objetivos educativos; tienen lugar durante un periodo de tiempo relativamente largo; provocan efectos durables en las personas; y, finalmente, producen reestructuraciones importantes del comportamiento.

"La Psicología de la Educación estudia los procesos educativos con una triple finalidad: contribuir a la elaboración de una teoría explicativa de estos procesos, elaborar modelos y programas de intervención dirigidos a actuar sobre ellos con una finalidad determinada y dar lugar a una práxis educativa coherente con las propuestas teóricas formuladas"[95]

Al igual que ya vimos con la Didáctica, la Psicología de la Educación es también una disciplina educativa, y por tanto, de naturaleza aplicada y fuertemente vinculada con la práctica. Bajo este supuesto surge una triple consideración. En primer lugar, un conjunto de conocimientos que se aplican, a los que se denominan el núcleo teórico-conceptual; en segundo lugar, el ám bito de aplicación, en nuestro caso los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas; y en tercer lugar, los procedimientos de ajuste del conocimiento teórico a las características particulares de la Educación Matemática.

Por lo que se refiere al primer punto hay que indicar que la Psicología de la Educación no dispone de un marco teórico unificado y coherente que permita dar cuenta de los múltiples y complejos aspectos implicados en los procesos de desarrollo personal, de la influencia que la educación escolar tiene sobre ellos y, en particular, del peso real que tiene el aprendizaje de conocimientos matemáticos.

No se dispone de una teoría comprensiva de la instrucción, con apoyo empírico y teórico suficientes para utilizarla como fuente única de información en la preparación y realización del currículo escolar; tampoco existe una teoría específica de la instrucción en el campo de la Educación Matemática. Sí hay, sin embargo, múltiples teorías que proporcionan información parcial adecuada.

---

[95] Coll C. Obra citada.

Nuestro marco de referencia concreto es un conjunto de teorías y explicaciones que, si a veces mantienen entre sí discrepancias importantes en algunos puntos, participan de una serie de principios comunes o, por lo menos, no contradictorios. Estos principios son los que determinan el desarrollo actual de la Educación Matemática y vienen marcando la línea de progreso en la investigación y el diseño curricular en este campo.

El marco de referencia está delimitado por lo que se puede denominar enfoques cognitivos en sentido amplio. Entre ellos hay que destacar la Psicología genética de J. Piaget y sus colaboradores de la Escuela de Gienebra; en este caso las aportaciones más destacables se refieren a la concepción de los procesos de cambio, las formulaciones estructurales del desarrollo operativo y las elaboraciones en torno a las estrategias cognitivas. También es importante la teoría del origen socio-cultural de los procesos psicológicos superiores de Vygotsky y su desarrollo posterior, en especial lo relativo al modo de entender las relaciones entre aprendizaje y desarrollo y la importancia de los procesos de interacción interpersonal. La teoría del aprendizaje verbal significativo de Ausubel y su prolongación en la teoría de la asimilación de Mayer, tienen un interés destacable por ir especialmente dirigidas a explicar los procesos de aprendizaje de bloques de conocimientos altamente estructurados. También hemos considerado en el apartado anterior la teoría del procesamiento de la información, cuyo interés en este caso se concreta en la hipótesis de que el conocimiento previo, organizado en bloques interrelacionados, es un factor decisivo en la realización de nuevos aprendizajes.

¿Existe una teoría del aprendizaje de las matemáticas?. Aunque se han realizado intentos bastante elaborados por avanzar en la construcción de una tal teoría, no se han alcanzado resultados efectivos hasta el momento. Entre los intentos más difundidos se encuentra el trabajo de Dienes, inspirado en la obra de Piaget, Bruner y Bartlett, algunos de cuyos aspectos se han comentado ya en este Proyecto. La teoría de Dienes se resume en cuatro principios:

1. Principio dinámico.
2. Principio constructivo.
3. Principio de variabilidad matemática.
4. Principio de variabilidad perceptiva,

cuyo desarrollo puede encontrarse en las obras de este autor.

Otros autores, como Skemp y Mialaret, han desarrollado tratamientos teóricos relativos al aprendizaje de las matemáticas, siempre fundamentados en las grandes corrientes teóricas antes señaladas.

Otros autores se han ocupado con mayor interés del ámbito de aplicación de las teorías a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Orton plantea una serie de cuestiones destacables en este ámbito de aplicación y recuerda continuamente que, aunque la fundamentación teórica conductista parezca estar desprestigiada científicamente y sea excluida explícitamente en la elaboración de diseños curriculares, tiene una influencia real en el aula ya que sostiene las crencias y pautas de actuación de muchos profesores.

Entre las cuestiones planteadas por Orton[96] destacamos las siguientes:

1. ¿Necesitan teorías los profesores de matemáticas?. La respuesta es obvia: *"un profesor acepta una posición teórica al admitir un determinado punto de vista o al tomar postura respecto de una cuestión específica"*; la idea resultante es que siempre se está interpretando, es decir, empleando una teoría; la cuestión se transforma en ¿qué teoría interpreta mejor el aprendizaje escolar en matemáticas?

2. ¿Cuáles son las exigencias cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas? Sobre esta cuestión plantea algunos de los puntos más relevantes en el aprendizaje de las matemáticas; los concreta en: retención y memorización; empleo de algoritmos; aprendizaje de conceptos; y resolución de problemas.

3. Un tercer bloque lo desglosa en las siguientes cuestiones:
¿Podemos promover el aprendizaje a través de una secuencia óptima?
¿Debemos aguardar hasta que los alumnos están dispuestos?
¿Pueden los alumnos descubrir las matemáticas por sí mismos?

En cada uno de los casos se analizan las implicaciones de tres planteamientos teóricos en relación con el aprendizaje de las matemáticas.

96 Orton A. (1988). Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom practices. London: Cassell.

4. Finalmente, hay un cuarto bloque de cuestiones más concretas:
¿Por qué algunos alumnos rinden más que otros?
¿Influye el lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas?

A lo largo de la obra citada, y mediante la estructura diseñada por las cuestiones anteriores, explora sistemáticamente el ámbito de aplicación de las teorías generales a la Educación Matemática.

Gómez también estudia esta relación entre Psicología y Educación Matemática, destacando las aportaciones tanto teóricas como de desarrollo: *"Se asume que el aprendizaje de las Matemáticas tiene su propia psicología, que los estudiantes y profesores tienen ideas propias acerca de las Matemáticas en las situaciones de aprendizaje y que los profesores estarán mejor equipados para su tarea si pueden comprender cómo se ven las Matemáticas desde la perspectiva del que aprende"*[97] .

El ambito de aplicación de las teorías que fundamentan la Psicología de la Educación en el aprendizaje de las matemáticas suele estar muy conectado, en la mayor parte de los casos, con los procedimientos de ajuste: procedimientos de diseño y planificación de procesos educativos, que abarcan la dimensión tecnológico-proyectiva de la Psicología de la Educación. Estos procedimientos de diseño y planificación suelen ir precedidos por el desarrollo de investigación básica sobre el aprendizaje de tópicos matemáticos concretos en los que se debe poner de manifiesto si el modo concreto de interpretar aprendizajes específicos, bajo un esquema teórico, da los resultados previstos, necesita de alguna revisión en profundidad o de nuevos planteamientos. Todo este campo de investigación, que trata de ajustar el marco teórico general a las actividades de diseño y planificación de procesos educativos en matemáticas, es, en la actualidad, uno de los campos de estudio e investigación más fecundos en Educación Matemática y una de las aportaciones más relevantes que se realizan desde la Psicología de la Educación en el momento actual.

En resumen, el campo de problemas que se pretende clarificar mediante las aportaciones

[97] Gómez B. (1991). Las Matemáticas y el proceso educativo, en A. Gutiérrez (Edt.) Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Madrid: Síntesis.

de la Psicología Educativa está centrado en el modo de entender e interpretar las relaciones entre desarrollo, aprendizaje y enseñanza, y por tanto en la concepción misma sobre la Educación en general y la Educación Matemática en particular.

No hay discrepancias al afirmar que la finalidad última de la educación es promover el desarrollo de los seres humanos; sí las hay cuando se quiere definir y explicar en qué consiste ese desarrollo y hay que decidir el tipo de acciones educativas más adecuadas para promoverlo; mayor dificultad presenta integrar el conocimiento matemático en ese desarrollo.

La disyuntiva básica se produce entre los que entienden que el desarrollo es el resultado de un proceso endógeno, que procede de dentro a fuera y los que lo conciben como resultado de un proceso exógeno, que procede de fuera a dentro, producido por una serie de aprendizajes específicos.

En el primer caso, lo verdaderamente importante es la competencia cognitiva general, siendo finalidad de la educación reforzar esta competencia cognitiva dentro de los márgenes que permiten las leyes generales del desarrollo a las que está sometida. Las teorías estructurales del desarrollo han proporcionado un apoyo considerable a esta orientación al postular la existencia de una dirección y unos estadios o niveles universales del desarrollo que pueden adoptarse como fines educativos, es decir, que pueden tomarse como un modelo del desarrollo personal que debe promover la educación, a los que se ajusta la educación matemática.

La segunda alternativa, que interpreta el desarrollo fundamentalemente como resultado de aprendizajes específicos, critica el enfoque cognitivo/evolutivo y denuncia el carácter cíclico de sus argumentos: si los aprendizajes específicos introdujeran modificaciones en los universales del desarrollo cognitivo, dejarían de ser universales. Se argumenta que es absurdo plantearse como meta que los niños alcancen un estadio determinado pues de todos modos lo alcanzarán sin necesidad de ayudas específicas, ya que se trata de un eslabón del proceso natural del desarrollo del ser humano. En este caso, el Sistema Escolar debe seleccionar y promover el aprendizaje de parcelas específicas de conocimiento, incluidos los conocimientos matemáticos.

Las aportaciones de la Psicología de la Educación a la Didáctica de la Matemática son esenciales, como se ve, a la fundamentación y desarrollo de nuestra área de conocimiento.

II.3.3.3. Constructivismo.

Aunque el Constructivismo no se puede considerar como una teoría del aprendizaje, son varios los motivos que nos han llevado a incluir una reflexión sobre el Constructivismo y sus relaciones con la Educación Matemática, dentro del apartado dedicado a las aportaciones procedentes de la Psicología.

En primer lugar, en los documentos recientes elaborados por el Ministerio, relativos al Diseño Curricular para el Area de Matemáticas,[98] encontramos las siguientes consideraciones:

"Desde la perspectiva de su elaboración y adquisición, las matemáticas son pues más constructivas que deductivas. Desligado de la actividad constructiva que está en su origen, el conocimiento matemático corre el peligro de caer en puro formalismo y de perder toda su potencialidad como instrumento de representación, explicación y predicción.

La naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad y reflexionar sobre ellas obliga a tener especialmente en cuenta, en la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el nivel de competencia cognitiva de los alumnos. Existe un estrecho vínculo entre las relaciones que los niños pueden establecer en un momento determinado y su nivel de desarrollo intelectual"

La relación que se establece entre Constructivismo y aprendizaje de las matemáticas es una de las características innovadoras del Diseño Curricular.

[98] Ministerio de Educación y Ciencia (1989). Diseño Curricular Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: Centro de Publicaciones del MEC.

En esta misma línea Novak[99], hablando del constructivismo humano, dice:

"La creación de nuevo conocimiento es, por lo que respecta al creador, una forma de aprendizaje significativo. Implica, al mismo tiempo, el reconocimiento de nuevas regularidades en los hechos u objetos, invención de nuevos o extensión de antiguos conceptos, reconocimiento de nuevas relaciones entre conceptos y, en los saltos más creativos, una gran reestructuración de las tramas conceptuales para que incluyan relaciones de orden superior. Estos procesos pueden ser vistos como parte del proceso del aprendizaje asimilador, que implica la adición de nuevos conceptos, la diferenciación progresiva de los conceptos existentes, el aprendizaje de orden superior (en ocasiones) y una nueva reconciliación integradora significativa entre las tramas conceptuales".

También Fischbein[100], al presentar las líneas y nuevas tendencias de interés en Educación Matemática, procedentes del campo de la Psicología señala el Constructivismo como una línea de reflexión prioritaria, y hace las siguientes consideraciones:

"Aprender matemáticas significa construir matemáticas. La actividad matemática es esencialmente un proceso constructivo. El estudiante no aprende matemáticas absorbiendo conceptos, definiciones, teoremas y demostraciones, sino construyéndolos mediante sus propios esfuerzos intelectuales. Pero los individuos no hacen todo esto respondiendo a sus propios problemas y movilizando sus propios significados intelectuales naturales. Nuestro comportamiento natural se adapta a la realidad concreta en la que vivimos y no a constructos formales gobernados por reglas y definiciones formales".

Los trabajos elaborados recientemente relativos al interés que presenta el Constructivismo para la Educación Matemática y, en particular, al aprendizaje escolar de las matemáticas, las contribuciones realizadas y los debates que han tenido lugar corroboran el interés que tiene el Constructivismo en nuestro campo.

---

[99] Novak J.D. (1988). El constructivismo humano, en Porlán R., García E., Cañal P. (Edts.) Constructivismo y Enseñanza de las Ciencias. Sevilla: Diada Editoras.

[100] Fischbein E. (1990). Introduction, en Kilpatrick J. & Nesher P. (Edts.). Mathematics and Cognition. Cambridge: Cambridge University Press.

El Constructivismo puede caracterizarse simultáneamente como una posición cognitiva y como una perspectiva metodológica. Como perspectiva metodológica en las ciencias sociales, el cosntructivismo asume que los seres humanos son sujetos que conocen, que el comportamiento humano responde principalmente a propósitos y que los organismos humanos, en el momento actual, tienen una capacidad altamente desarrollada para organizar concimiento.

Como posición cognitiva, el constructivismo asume que todo el conocimiento es construido y que los instrumentos de construcción incluyen las estructuras cognitivas que son, a su vez, innatas (Chomsky) o bien resultado de una construcción evolutiva (Piaget).

La segunda interpretación es más característica del constructivismo como posición cognitiva y es la que sostienen la mayoría de los constructivistas en Educación Matemática.

Esta idea es la que sostiene Fischbein[101] cuando afirma: *"el constructivismo es una teoría del conocimiento. Nuestras conginiciones, no son duplicados de un mundo externo dado sino más bien construcciones cuyo propósito es el de garantizar los éxitos prácticos de nuestro comportamiento."*

Los orígenes del constructivismo actual se atribuyen, principalmente, al trabajo de Piaget. Noddings[102] explica la aparición y desarrollo de las ideas constructivas a partir de Piaget, que pasamos a resumir.

Al aceptar la distinción kantiana entre conocimiento empírico y lógico-matemático Piaget aceptó la difícil tarea de explicar el desarrollo de las estructuras matemáticas cognitivas. En este caso, Piaget confió en el concepto de abstracción reflexiva. La abstracción reflexiva se diferencia de la abstracción clásica en que no procede de una serie de observaciones de acontecimientos u objetos contingentes. Antes bien, es un proceso de interiorización de nuestras operaciones físicas sobre los objetos. Piaget se separó de Kant al describir las estructuras cognitivas como resultado

---

[101] Fischbein E. Obra citada.

[102] Noddings N. (1990). Constructivism in Mathematics Education, Davis R., Maher C. & Noddings N. (Edts.) Constructivist views on the Teaching and Learning of Mathematics. Journal for Research in Matematics Education. Monograph nº 4.

del desarrollo, en vez de como estructuras innatas.

No podemos forzar determinados resultados en los objetos sobre los que operamos. Nuestras operaciones están constreñidas de algún modo. Hay algo inevitable en los resultados y características de las operaciones. Esto sucede debido a que las estructuras resultantes son lógico-matemáticas y sus actuaciones están marcadas por la necesidad. Esta conclusión plantea un reto a aquellos constructivistas que enfatizan la singularidad de las construcciones individuales. Las teorías de Piaget son, en el importante sentido que acabamos de describir, completamente constructivistas. No son únicamente procesos intelectuales constructivos sino que las propias estructuras cognitivas son, ellas mismas, productos de una construcción continua. Esta construcción activa implica a la vez una estructura básica desde la que comenzar la construcción (una estructura de asimilación) y un proceso de transformación o creación que es la construcción. Finalmente el constructivismo cognitivo de Piaget conduce, lógicamente, al constructivismo metodológico.

El constructivismo en educación matemática sostiene que el constructivismo cognitivo implica el constructivismo pedagógico; es decir, la aceptación de premisas constructivas acerca del conocimiento y los sujetos que conocen implica un modo de enseñar que reconoce a los sujetos del aprendizaje como conocedores activos. Sin embargo, es cierto que se pueden aceptar los métodos pedagógicos sugeridos por el constructivismo sin aceptar las premisas constructivistas. También puede ocurrir que un constructivista filosóficamente convencido no necesite, lógicamente, emplear los llamados métodos constructivos.

Los constructivistas están, por lo general, de acuerdo en lo siguiente.

1. Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
2. Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción. Estas estructuras importan para construcción; es decir, explican el resultado de la actividad cognitiva en el sentido genérico en el que un programa de ordenador cuenta para los resultados.
3. Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes. El entorno presiona al organismo para que se adapte.

4. El reconocimiento del constructivismo como una posición cognitiva conduce a la adopción del constructivismo metodológico.

a) El constructivismo metodológico en investigación desarrolla métodos de estudio en consonancia con los supuestos del constructivismo cognitivo.
b) El constructivismo pedagógico sugiere métodos de enseñanza en consonancia con el constructivismo cognitivo.

Carpenter[103], recientemente señala algunas de las ventajas obtenidas en investigación al emplear el constructivismo metodológico:

" Hay una gran variedad de resultados prometedores en áreas específicas de investigación, pero la contribución más significativa de esta investigación consiste en que la enseñanza y el aprendizaje se describen como procesos activos en los que los profesores y aprendices construyen su propio conocimiento. Esto implica que, incluso aunque podamos no tener un mapa específico de cómo se adquieren los conceptos y destrezas particulares, podemos planificar la instrucción teniendo en cuenta lo que los estudiantes ya conocen y cómo asignan significado a los nuevos conceptos y destrezas que han aprendido, y podemos tener en cuenta el pensamiento de los profesores y la toma de decisiones. Si aceptamos seriamente estos supuestos, tienen profundas implicaciones para el tipo de soluciones que buscamos para dirigir los problemas de la educación".

Para los profesores, el constructivismo metodológico se convierte en constructivismo pedagógico. Para enseñar bien, necesitamos conocer lo que nuestros estudiantes piensan, cómo producen la cadena de marcas que vemos en sus hojas de trabajo, y qué es lo quieren hacer (o pueden hacer) con el material que les presentamos. Pero las premisas cognitivas del constructivismo pueden dictar solamente guías para una buena enseñanza. No podemos obtener de ellas, como tampoco lo podemos hacer de ninguna otra posición cognitiva, métodos específicos de enseñanza.

El constructivismo pedagógico sugiere instrumentos de diagnóstico más sofisticados,

[103] Carpenter T. (1990). Editorial. Journal for Research in Mathematics Education. Vol 21, nº 3.

herramientas que pondrán al descubierto patrones de pensamiento, errores sistemáticos y concepciones erróneas persistentes.

El método de hacer explícito el pensamiento es, o puede ser, un método potente de enseñanza tanto como una herramienta de diagnóstico, pero los profesores no deben limitarse sólo a ella debido a su carácter constructivo. Las premisas constructivas implican que puede haber muchas vías para llegar a muchas soluciones o terminales de instrucción.

Muchos educadores matemáticos reconocen el poder de los métodos constructivos en situaciones individualizadas, pero también aprecian que los escolares no pueden trabajar continuamente en tales situaciones. Las condiciones del aula nos fuerzan a pensar acerca de cierta economía en la instrucción. Los profesores constructivistas necesitan tener sus premisas básicas en la mente, pero debieran tener libertad para adaptar una amplia variedad de métodos a sus propios propósitos.

Por ejemplo, consideremos la recomendación constructiva general de que los profesores deben procurar un empleo considerable de material manipulativo. Esta recomendación fue un primer y plausible intento para aplicar la teoría de Piaget directamente a la enseñanza. Si la abstracción reflexiva proviene de las operaciones que realizamos sobre los objetos, entonces tiene sentido poner a los estudiantes a trabajar con objetos. La dificultad, por supuesto, está en que los estudiantes deben tener un propósito para implicarse en la manipulación de objetos.

Comprendiendo esta posibilidad, necesitamos quizás, proporcionar alguna instrucción directa sobre el uso de diferentes materiales y luego ponerlos a disposición de los alumnos. En las situaciones de resolución de problemas, no debieramos probablemente guiar a los estudiantes en su uso. Si lo hacemos, es posible que apartemos a los estudiantes de sus propósitos y los pongamos a trabajar ciegamente en los nuestros.

La valoración del constructivismo es, por lo general, positiva y su influencia sobre Educación Matemática considerable aún cuando se siguen planteando hoy día cuestiones importantes en relación con la aplicación del constructivismo a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Por ejemplo, debido a que los profesores tienen que trabajar con muchos niños, debemos preguntarnos si hay algún modo de trabajar en situaciones uno a uno con un grupo completo. ¿Se puede lograr un pensamiento genuino de cada alumno en situaciones en las que interviene todo el grupo?

Se han producido varios modelos, que son altamente interactivos. Los profesores, simultáneamente, aplican el modelo y dirigen los logros, pero la aplicación del modelo se debe realizar planteando cuestiones, siguiendo los ejemplos y conjeturando, más que presentando productos incompletos. Enseñar por esta vía requiere un conocimiento matemático considerable tanto como destrezas pedagógicas. ¿Cómo pueden los profesores seguir las sugerencias de los alumnos si no saben las suficientes matemáticas como para percibir hacia dónde deben conducir las sugerencias?

¿Cómo puede lograrse la implicación personal, que es esencial para realizar construcciones potentes? Una posibilidad está en incrementar la cantidad de tiempo que los alumnos emplean trabajando juntos. El uso de pequeños grupos de aprendizaje cooperativo está llegando a ser una estrategia popular, y hay buenas razones cognitivas para permitir que los estudiantes trabajen juntos. Comienzan así a retarse a sí mismos, a preguntar las razones y, en general, a conducir su propio trabajo mental mientras que otros hacen la exposición pública. Una dificultad que se presenta consiste en que, una vez más, debemos asegurarnos que la comunidad es una comunidad matemática.

La gran fuerza del constructivismo está en que conduce a pensar crítica e imaginativamente acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La creencia en las premisas del constructivismo lleva a no confiar en soluciones simples, y proporciona un potente conjunto de criterios para juzgar las posibles elecciones de métodos de enseñanza.

Sin embargo, también el constructivismo ha recibido fuertes críticas, que han originado cierta polémica en los últimos años. Entre las críticas más elaboradas encontramos la de Kilpatrick[104]. Aunque el núcleo del análisis de Kilpatrick sobre el constructivismo está centrado en su fundamentación epistemológica, las implicaciones para el aprendizaje de las matemáticas

[104] Kilpatrick J. (1987). What constructivism Migth be in Mathematics Education, en Bergeron J., Herscovics N. & Kieran C. Proceedings of the Eleventh PME Conference Vol. I, pp. 3-27, Montreal: University of Montreal.

son importantes. Resumimos a continuación algunos de los argumentos empleados por Kilpatrick en este trabajo, que nos parecen de especial interés.

Lo que el constructivismo parece ser:

Un problema epistemológico antiguo, no resuelto por la filosofía occidental, se refiere a cómo una realidad objetiva independiente puede llegar a ser conocida por el sujeto cognoscente, quien no tiene posibilidad de controlar si su conocimiento es o no conocimiento de algo. Cualquier intento para probar la veracidad de lo que es conocido debe ser, en sí mismo, un acto de conocimiento y por tanto, subjetivo. Cualquier conocimiento de una "verdad objetiva", resulta imposible. El constructivismo corta el nudo gordiano separando la epistemología de la ontología y argumentando que una teoría del conocimiento debiera ocuparse de la adaptación del conocimiento a la experiencia y no del emparejamiento entre conocimiento y realidad. La única realidad que podemos conocer es la realidad de nuestra experiencia.

El punto de vista constructivista implica dos principios:

1. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, y no recibido pasivamente desde el entorno.
2. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo de experiencias de cada sujeto; no se descubre un mundo independiente y preexistente fuera de la mente del que conoce.

El primero de estos principios es más ampliamente aceptado que el segundo entre los que se consideran a sí mismos como constructivistas; el segundo principio resulta chocante para muchas personas. Esto separa lo que se denomina constructivismo simple del constructivismo radical, que está basado en la aceptación de ambos principios.

El constructivismo radical se denomina así porque rechaza el realismo metafísico en el que aún permanecen muchos empiristas. Requiere de los que lo aceptan olvidar todos los esfuerzos por conocer el mundo tal y como es.

El constructivismo radical adopta una visión ciega hacia "el mundo real". Nunca llegaremos a conocer una realidad exterior a nosotros. En vez de eso, todo lo que podemos aprender son las limitaciones del mundo sobre nosotros, las cosas no permitidas a través de nuestra experiencia con la realidad, lo que no funciona.

En resumen, el constructivismo radical parece ser una epistemología que convierte todo el conocer en activo y todo el conocimiento en subjetivo. Siguiendo a las ciencias físicas en su rechazo de la posibilidad de llegar a conocer las realidades últimas, trata al sujeto cognoscente como organizador de su propia experiencia y constructor de su propia realidad. Considera el llegar a conocer como un proceso en el que, más que obtener información, el sujeto que conoce, mediante ensayo y error, construye un modelo viable del mundo.

Lo que el constructivismo parece no ser.

Al ser una teoría de la adquisición del conocimiento, el constructivismo no es una teoría de la enseñanza o instrucción. No hay una conexión necesaria entre cómo se considera la adquisición del conocimiento y qué procedimientos de instrucción parecen óptimos para lograr que esa adquisición suceda. La epistemología es descriptiva mientras que las teorías de la enseñanza y la instrucción deben ser, necesariamente, teorías sobre la práctica. Sin embargo, los constructivistas han tratado de obtener implicaciones para la práctica de su teoría, y en algunos casos las implicaciones parecen indicar que algunas prácticas de enseñanza y consideraciones sobre la instrucción presuponen una visión constructivista del conocimiento.

Sin embargo, Kilpatrick es rotundo con relación a esa pretensión y niega que las consecuencias que los constructivistas derivan del constructivismo radical para la práctica educativa puedan explicarse únicamente en términos de los supuestos del constructivismo. Por el contrario, argumenta con convicción que las consecuencias más importantes pueden entenderse en términos de otras hipótesis alternativas. Citando a Von Glaesersfeld señala que las consecuencias que se siguen del constructivismo radical para la práctica educativa son:

a) la enseñanza (es decir, usar procedimientos que pretenden y generan comprensión) puede distinguirse con precisión de la instrucción (es decir, usar procedimientos que pretenden un comportamiento repetido);

b) los procesos que se supone ocurren en el interior de la cabeza de los estudiantes son más interesantes que el comportamiento explícito;

c) la comunicación lingüística resulta un proceso para guiar el aprendizaje de los estudiantes, no un proceso para transferir conocimiento.

d) las desviaciones de los estudiantes de las expectativas del profesor resultan medios para entender sus esfuerzos por comprender;

e) la enseñanza por entrevista se propone como un intento no sólo de inferir las estructuras cognitivas sino también de modificarlas.

El resto del trabajo lo dedica a señalar conceptos y relaciones que los constructivistas deben clarificar para lograr mayor credibilidad y coherencia y, también, contribuir a una explicación científica de los fenómenos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En particular, señala líneas de reflexión en la conexión con las Matemáticas indicando la necesidad de profundizar y expresarse con más claridad sobre las relaciones entre el constructivismo, las matemáticas como disciplina y las matemáticas como materia escolar. Más aún, el constructivismo necesita orientar las demandas de una nueva aproximación a la filosofía de las matemáticas, cuasi-empirismo, que estudia la práctica de las matemáticas en un contexto socio-histórico y que parece ser compatible tanto con la matemática realista como con la constructivista.

También es necesario trabajar adecuadamente con las matemáticas escolares. Sola la epistemología no puede responder a la cuestión de qué matemáticas enseñar. Un análisis del conocimiento no puede producir un currículo. El currículo se basa en nuestros propósitos, en lo que valoramos, y acerca de todo ésto la epistemología no tiene nada que decir. Pensar de otro modo es caer en la "falacia epistemológica".

La crítica que realiza sobre la fundamentación constructivista del currículo es especialmente lúcida:

" Algunos constructivistas han tratado de basar el currículo sobre una fundamentación constructivista. Se ha argumentado que necesitamos en primer lugar determinar el orden moral, político o social que creemos necesario, luego expresar nuestros propósitos educativos y, a la vista de estos propósitos, escoger el contenido y los objetivos del currículo. La espistemología puede resultar útil en este momento para determinar los objetivos cognitivos, pero serán

necesarias otras ayudas para los objetivos no cognitivos."

Como se ha visto, la polémica es seria y va al fondo de las cuestiones; seguramente queda aún camino por recorrer, fundamentaciones que completar e implicaciones que establecer. Aún así, no cabe duda que la contribución actual del Constructivismo a la Educación Matemática es, hoy día, importante y merecedora de consideración.

Aportaciones de la Psicología a la Educación Matemática.

Prof. L. Rico. Proyecto Docente

La Psicología ha ofrecido y ofrece una variedad de marcos teóricos y metodológicos con los que plantear y estudiar cuestiones importantes para la Educación Matemática, sistematizar e interpretar datos e informaciones procedentes de la experiencia y avanzar respuestas a cuestiones planteadas. Esta relación mútua, que ha enriquecido a las dos disciplinas, la hemos apreciado desde los comienzos de la investigación en Educación Matemática; también hemos considerado el predominio de cuestiones cognitivas al tratar de establecer los principales problemas de la Educación Matemática; igualmente, hemos visto que en el desarrollo actual de la Educación Matemática es imprescindible un cierto dominio del campo de la psicología, en tanto que es obligado plantearse y tratar de buscar respuesta a cuestiones generales, de fundamentación psicológica, como las siguientes: ¿Cómo piensa la gente cuando trabaja en matemáticas?, ¿Cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?, ¿Qué hacen las personas cuando ejecutan tareas matemáticas?, ¿Cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?, ¿Qué hacen las personas cuando ejecutan tareas matemáticas?, ¿Cómo se aprende a pensar de forma matemática?.

La Psicología ha hecho aportaciones importantes a la Educación Matemática; en este apartado vamos a presentar y comentar tres áreas de dominio psicológico que tienen influencia destacable y contribuyen al avance de la Educación Matemática, señalando algunas de sus características más significativas para nuestra materia en cada caso. Nos vamos a referir a:

* La psicología cognitiva y el modelo de procesamiento de la información.
* Psicología de la Educación.
* Constructivismo.

1. Psicología cognitiva. Modelo de procesamiento de la información.

En este apartado seguimos las ideas y el planteamiento de Mayer.[105]

Por **Psicología cognitiva** se entiende el análisis científico de los procesos mentales y estructuras de memoria humanas con el fin de comprender la conducta humana.

"Análisis científico" -alude al cómo-. No podemos observar los sucesos mentales privados, sólo pueden inferirse a partir de la conducta de alguien. Los psicólogos cognitivos tienen que diseñar métodos científicos para observar la vida mental indirectamente. Los principales instrumentos de la psicología cognitiva son técnicas de análisis que permiten dividir las actividades globales de la mente en componentes que se puedan medir.

"Procesos y estructuras mentales". La psicología cognitiva estudia lo que ocurre dentro de la cabeza de una persona cuando realiza una tarea determinada -es decir, procesos mentales- y el modo en que la persona almacena y utiliza su conocimiento para realizar la tarea - es decir, las estructuras mentales-.

"Comprender la conducta humana". El objetivo de la psicología cognitiva es describir los sucesos cognitivos con claridad y precisión, para predecir y comprender mejor la conducta humana.

La psicología cognitiva se caracteriza porque su objeto de conocimiento es la actividad racional o mental humana, su método es el análisis científico de las estructuras y procesos mentales y su objetivo es comprender la conducta humana.

La actividad matemática es un caso de actividad racional humana, con características bien definidas, que resulta especialmente adecuada para el análisis científico y que forma parte del campo de interés de la psicología cognitiva.

Entre los precedentes de la psicología cognitiva tenemos el conductismo, con el que conviene señalar y establecer diferencias claras.

El conductismo tiene como objetivo comprender la conducta humana pero, a diferencia de la psicología cognitiva, nunca intenta comprender ni estudiar los procesos internos que subyacen a la conducta. Sin embargo, se atiene a los métodos rigurosos de la ciencia, aún cuando las técnicas específicas son distintas. Finalmente, reduce su objeto al estudio de las leyes de la conducta, y no estudia los sucesos que no son observables directamente. El conductismo ha

[105] Mayer R. (1981). El futuro de la Psicología Cognitiva. Madrid: Alianza Universidad.

tenido una influencia considerable en los primeros estudios e investigaciones en Educación Matemática, así como en la fundamentación psicológica de los procesos de instrucción, influencia que aún hoy día es fácil detectar.

Instrumentos de la psicología cognitiva. Cuatro de los instrumentos más importantes en psicología cognitiva, para el estudio de la conducta humana, son los siguientes:

i. Análisis del sistema de procesamiento de información. Se basa en la idea de que las personas somos procesadores de información: recibimos información, modificamos la información mediante una operación mental, aplicamos la información mediante una operación mental, aplicamos otra operación que la vuelve a modificar, y así sucesivamente hasta que se llega a un resultado disponible para almacenar en la memoria o para generar una conducta específica.

El modelo de procesamiento de la información hace referencia a las diferentes organizaciones a que se somete la información a medida que pasa a través del sistema.

ii. Análisis de Procesos Cognitivos. Esta técnica de análisis consiste en elegir una tarea intelectual, observar a una persona cómo resuelve el problema y preguntarle sobre lo que hace, analizar el proceso en pequeñas partes consistentes en procesos (manipulación de cosas) y decisiones (comprobaciones de algo); después hay que confrontar el modelo de proceso que se ha construido con la conducta humana real. El modelo procesal de la tarea estudiada debe poder escribirse en forma de un programa de ordenador, de un diagrama de flujo, o de algún otro modo.

iii. Análisis de estructuras cognitivas. Existen técnicas para representar el conocimiento de una persona que conoce una historia u otro tipo de información verbal. La información se analiza en función de grandes apartados y de las relaciones entre ellos; seguidamente se compara el modelo estructural con las actuaciones reales de los sujetos.

iv. Análisis de estrategias. El cuarto de los principales instrumentos de la psicología cognitiva está relacionado con la investigación de las técnicas que utilizan las personas para controlar los diferentes fragmentos de información que poseen. Estas técnicas se conocen con el nombre de estrategias cognitivas.

Veamos más en detalle algunas características de estos cuatro instrumentos y algunas contribuciones realizadas a la Educación Matemática.

Procesamiento de la información.

El instrumento cognitivo más útil para explicar y estudiar el problema de las diferencias en las aptitudes es el modelo general del procesamiento de la información. Idea fundamental es que todos los seres humanos están equipados básicamente con el mismo sistema de procesamiento de información (SPI).

Los componentes principales del sistema de procesamiento son:

i. Almacen sensorial a corto plazo (ASCP). Tiene una capacidad de memoria grande o ilimitada; el modo de almacenamiento es exacto y sensorial; la duración es muy breve ya que se desvanece en medio segundo.

ii. Memoria a corto plazo y memoria en funcionamiento (MCP-MF). Tiene una capacidad limitada (7 "chunks"); la información se transforma y se almacena por repetición y repaso; la duración es mayor: unos 18 sg. sin repaso; la información se pierde por falta de repaso o por desplazamiento debido a nueva información.

iii. Memoria a largo plazo (MLP). Tiene capacidad ilimitada; el modo de almacenamiento es organizado y significativo; la duración se supone permanente y por ello no se contempla la pérdida de la información sino el fallo en la recuperación o la interferencia de otras informaciones.

Analizar las aptitudes en términos de los componentes del sistema de procesamiento de la información consiste en analizarlas en términos de las características de los almacenes de memoria y los procesos que intervienen en la ejecución de una tarea determinada.

El modelo de procesamiento de la información se ha aplicado al estudio de una variedad de tareas tales como estudios sobre Atención, Discriminación, Reconocimiento de Patrones, etc. Entre las aplicaciones de interés para las matemáticas se encuentran los estudios relativos a tareas de inducción, que pasamos a describir brevemente, siguiendo a Pellegrino[106] .

Se entiende por Inducción el desarrollo de reglas, ideas o conceptos generales a partir de grupos específicos de ejemplos. Al analizar semejanzas y diferencias entre experiencias específicas se extraen las características generales de las clases de objetos, sucesos y situaciones. Se aplican estas generalizaciones a nuevas experiencias, se refinan y modifican y así pasan a formar parte de nuestra base de conocimientos permanentes.

---

[106] Pellegrino J. (1986). Capacidad de Razonamiento inductivo, en R. Stenberg: Las capacidades humanas. Barcelona: Labor.

Tareas de inducción: Todas las tareas de razonamiento inductivo tienen la misma propiedad básica. Se presentan un grupo de estímulos a un sujeto y su tarea consiste en inferir el modelo o regla estructural, de forma que se pueda generar o seleccionar una continuación apropiada del modelo.

Se dan una variedad de tareas diferentes: clasificaciones, series incompletas, analogías y matrices. En las tareas de inducción se trabaja también sobre una variedad de contenidos: letras, números, palabras, figuras.

El procesamiento de la información aborda el estudio de las tareas de razonamiento inductivo planteando tres cuestiones generales:

1º. ¿Cuáles son los procesos psicológicos básicos implicados en la resolución de problemas de razonamiento inductivo?

La respuesta consiste en proponer una hipótesis sobre cuáles son los procesos mentales necesarios para enfrentarse al contenido y a la estructura de un problema. Parte de la hipótesis debe incluir suposiciones sobre la secuencia en que se presentan o ejecutan los procesos y proponer un esquema interpretativo teórico.

2º. ¿Cuáles son las predicciones de las hipótesis y el esquema teórico asociado y cómo podemos probar su validez?

Normalmente, la hipótesis debe basarse en una teoría que proporcione predicciones explicativas sobre las diferencias entre tareas de inducción. Se pueden hacer experimentos para falsar esa teoría. Se debe conseguir una teoría que explique y prediga el rendimiento.

3º. ¿Cómo se diferencian las personas?

La teoría debe proporcionar una base para analizar detalladamente las diferencias individuales en velocidad y seguridad de ejecución.

Veamos el modo en que el procesamiento de la información ha hecho el estudio de un tipo concreto de razonamiento inductivo: las series numéricas incompletas.

Se consideran tres componentes en el proceso de completar series:

* <u>Primera componente</u>: detección de relaciones; hay que examinar la serie y emitir una hipótesis de cómo un elemento de la serie está relacionado con otro.

En series de letras hay tres relaciones básicas: identidad, continuidad, precedencia.

En series de números hay mayor varided de relaciones: tipo de operación, variación en la magnitud de la operación, combinación de operaciones.

* <u>Segunda componente</u>: descubrimiento de la periodicidad.

La longitud del periodo es el número de elementos que constituyen un ciclo completo del modelo en el que actuan las relaciones detectadas.

Hay dos enfoques para descubrir la periodicidad de las series:

i. enfoque adyacente: se descubre el periodo observando las interrupciones regulares en las relaciones entre elementos adyacentes.

ii. enfoque no adyacente: se descubre la longitud del periodo observando algún intervalo regular en el que se repita una relación.

* Tercera componente: finalización de la descripción del modelo.

Localizado el periodo - su longitud- hay que determinar las relaciones establecidas entre las restantes posiciones dentro del periodo, se llega así a definir de forma completa la regla de la secuencia.

* Cuarta Componente: extrapolación.

Los resultados obtenidos de los estudios realizados sobre la base del modelo anterior han aportado las siguientes evidencias:

La solución de un problema de series no puede subdividirse en tiempos discretos para cada unos de los diferentes componentes.

Uno de los factores más importantes que afectan a a la exactitud de la solución de problemas de series numéricas es el número de espacios de la memoria que se necesitan para representar el modelo de un item.

La capacidad para manejar grandes cantidades de información y reglas más complejas también puede ser atribuible a diferencias en los conocimientos. Los adultos son más capaces en el manejo de reglas numéricas más complejas.

Los niños presentan un mejor rendimiento en problemas de series basados en relaciones de adición y sustracción que en los que se basan en relaciones de multiplicación y división. Los problemas de series incompletas son índices sensibles de la capacidad de resolución de problemas y de razonamiento inductivo.

El razonamiento inductivo es un elemento destacable en el razonamiento matemático, por ello el estudio de los procesos psicológicos implicados en la resolución de series incompletas, en particular, y de analogías, en general, tienen interés para el conocimiento e interpretación del razonamiento matemático. El procesamiento de la información aborda el problema de las habilidades y procedimientos mediante el diseño de modelos para los procesos cognitivos.

Modelos de procesos cognitivos.

Según el enfoque cognitivo las personas no aprenden conductas directamente, sino que adquieren procedimientos de orden superior o sistemas de reglas que se utilizan para generar conductas en múltiples situaciones.

Para abordar el problema de las habilidades de procedimiento los psicólogos han tenido que desarrollar instrumentos rigurosos que permitieran analizar un proceso cognitivo en sus partes; y han aplicado con éxito técnicas diferentes para analizar formalmente y especificar el conocimiento procedimental que utiliza una persona ante un problema dado.

Hay dos formas útiles de representar el conocimiento procedimental: escribir un programa y dibujar diagramas de flujo. Un programa es una lista de cosas que hay que hacer, empezando desde arriba y siguiendo paso a paso las instrucciones.

Las técnicas de análisis de procesos cognitivos se han empleado con éxito al estudio de cómo los niños ejecutan procedimientos aritméticos, permitiendo prever, detectar, diagnosticar y corregir errores en la ejecución de tareas algorítmicas en aritmética. El enfoque cognitivo contempla el aprendizaje como la adquisición de procedimientos cada vez más potentes. Este enfoque es bastante prometedor respecto del tipo de cambio que es necesario introducir en el modo de llevar a cabo la instrucción escolar.

Modelos de Estructuras Cognitivas.

El problema del conocimiento verbal. Gran parte de lo que sabemos sobre el mundo nos llega como información verbal. Cuando escuchamos o leemos información verbal siempre tendemos a recordar algo u olvidar algo y también a añadir y cambiar cosas. ¿Cuál es el proceso por el que adquirimos nueva información verbal? ¿Cómo lo almacenamos en la memoria? Estas preguntas constituyen lo que podría llamarse el problema del conocimiento verbal.

El enfoque cognitivo del problema del aprendizaje verbal consiste en intentar analizar este conocimiento verbal en sus partes e indicar la estructura en la que se enlazan éstas. Por ello, un modelo estructural del conocimiento verbal de una persona consiste generalmente en elementos y relaciones entre esos elementos. Dos de las técnicas más útiles para representar el conocimiento verbal son las redes y los árboles. Una red es un diagrama en el que los elementos principales se señalan mediante cuadros u óvalos y las relaciones entre ellos se indican con flechas. Un árbol es un diagrama que comienza en un nivel superior, se ramifica en un segundo nivel, este a su vez, se ramifica en un tercero, etc.

Una variante de la representación mediante red es la del mapa conceptual, elaborada por Novak y Gowin, que viene utilizándose recientemente con éxito para representar y analizar el conocimiento declarativo que tienen las personas en relación con el dominio conceptual del conocimiento matemático. Esta técnica permite establecer los núcleos o unidades informativas de que dispone un sujeto en relación con un contenido concreto y las relaciones que es capaz de establecer estre ellas. Las ausencias o carencias en la representación permiten detectar posibles fallos o lagunas en el dominio conceptual correspondiente. Un ejemplo de mapa conceptual sencillo puede verse en el apartado II.3.2.3, relativo a la noción de currículo.

Modelos de estrategias cognitivas.

Las personas suelen disponer de varias estrategias alternativas para abordar tareas complicadas de resolución de problemas. Especificar con claridad cuáles son esas estrategias (también llamadas heurísticas) y cómo se utilizan, es una de las tareas de los psicólogos cognitivos. Lo podemos llamar el problema de las estrategias.

Los primeros trabajos sobre el problema de las estrategias se basaban en observaciones informales de personas cuando resolvían problemas. Una de las observaciones más comunes era que las personas tienden a pasar por una serie de fases antes de alcanzar la resolución de problemas matemáticos muy similares a las señaladas por algunos psicólogos previamente.

Los psicólogos de la Gestalt observaron que las personas se fijaban metas parciales para resolver problemas. Duncker constató que las personas primero tienden a fraccionar los problemas en metas parciales y después intentan acceder a esas metas parciales o submetas.

Polya también se dio cuenta de que cuando un problema parece muy difícil de resolver, una buena estrategia es fraccionarlo en pequeños problemas que sí admiten solución. Sin embargo, los instrumentos analíticos pertinentes para predecir y describir con claridad las estrategias en la ejecución de problemas eran un tanto vagos hasta la revolución cognitiva, si bien la obra de Polya y otros autores sacaron a la luz ideas interesantes, estimulando a los psicólogos para trabajar en este tema.

Con el enfoque cognitivo, a principio de los años cincuenta se construyeron ordenadores capaces de resolver problemas muy diversos. Para dotarlos de programas que resolvieran problemas, los ordenadores necesitaban varias cosas: un conjunto de procedimientos para acceder a objetivos, un conjunto de estrategias generales, o heurísticas, que controlaran el proceso de resolución de problemas.

Para resolver un problema con ordenadores se requerían descripciones muy precisas de heurísticas; para describir las estrategias de los humanos podrían utilizarse, en principio, los mismos instrumentos de análisis que se estaban utilizando para estudiar las estrategias de los ordenadores.

Uno de los programas de ordenador más conocidos, relacionados con este tema, fue el Solucionador General de Problemas (SGP), de Ernst, Newell y Simon, que supuso una ruptura con los planteamientos limitados anteriores.

Pensamos cómo se puede representar la estrategia de resolución de problemas de una persona. Para comprender cómo lo hace el SGP hay que considerar dos ideas. La primera es que el problema tiene que representarse en un "espacio del problema". El espacio del problema contiene el estado actual del problema, el estado final (o meta) del problema y todos los estados intermedios. El espacio del problema puede tener multitud de caminos inútiles y callejones sin salida.

La segunda idea es que la resolución de un problema conlleva una búsqueda dirigida por el objetivo, a través del espacio del problema. En nuestro caso, la solución del problema consiste en encontrar el recorrido correcto desde el estado inicial al estado final, pasando por algunos de los estados intermedios. El aspecto a resaltar aquí es que el proceso de búsqueda está dirigido por una meta.

A la estrategia básica de búsqueda en el espacio del problema del SGP se la denomina análisis medios-fines. El análisis medios-fines no es más que una de las estrategias posibles que puede utilizar una persona, pero es una de las más generales y de las más potentes. El análisis de medios-fines trabaja a partir de un espacio del problema muy bien especificado; tienen que estar definidos todos los estados posibles y todos los operadores. Después el solucionador de problemas genera metas y hace ensayos para encontrar operadores que puedan satisfacer cada meta; si no puede acceder a una meta determinada creará una submeta; nunca podrá trabajar con más de una submeta simultáneamente.

El SGP utiliza tres submetas generales para llevar a cabo el análisis medios-fines. Pueden usarse repetidamente en un problema, pero nunca más de una a la vez. Las tres submetas generales son:

1. Transformar el estado A en el estado B. Para acceder a esta submeta hay que comparar el estado A con el estado B; si son iguales, ya se ha conseguido pero si son diferentes hay que especificar claramente cuál es la diferencia D.
2. Reducir la diferencia D entre el estado A y el estado B. Una vez localizada la diferencia, para reducirla hay que aplicar algún operador Q apropiado.
3. Aplicar el operador Q al estado A. Para ello debemos considerar si el operador Q es adecuado para el estado A; cuando esto ocurre lo aplicamos y damos lugar a un estado A'.

Hay dos instrumentos importantes que se pueden utilizar para resolver la cuestión de las estrategias. Estos instrumentos, son: una técnica para especificar el espacio del problema y una técnica para especificar la estructura de metas del problema.

Las submetas e instrumentos anteriores se han empleado con éxito para simular las diversas estrategias posibles en la resolución de algunos problemas. El caso más conocido es el análisis del problema de la Torre de Hanoi, pero hay muchas otras aplicaciones a tareas específicamente matemáticas.

Cuanto más se avanza en la descripción de heurísticos generales potentes, más cerca se está del diseño de métodos para enseñar directamente estas técnicas a los principiantes.

2. Aportaciones de la Psicología de la Educación.

La Psicología de la Educación trata de la aplicación de los principios y explicaciones de la Psicología a la teoría y la práctica educativas. Coll[107] expresa las diferentes opciones que pueden surgir de este planteamiento general: *"Por un lado, es posible entender la Psicología de la Educación como una simple etiqueta que sirve para designar la amalgama de explicaciones y principios psicológicos que son pertinentes y relevantes para la educación y la enseñanza; en este caso la Psicología no configura un ámbito propio de conocimiento, sino que es más bien el resultado de una especie de selección de los principios y explicaciones que proporcionan otras parcelas de la Psicología. Por otro lado, la Psicología de la Educación realiza contribuciones originales teniendo en cuenta al mismo tiempo los principios psicológicos y las características de los procesos educativos; en este caso la Psicología de la Educación es una disciplina con unos programas de investigación, unos objetivos y unos contenidos propios".* Tenemos así, en un extremo, los autores que conciben la psicología de la educación simplemente como un campo de aplicación de la psicología; bajo esta idea se encuentra la creencia de que las aportaciones de la psicología permitirán resolver, por sí solas, los problemas educativos de una manera científica y racional. En el otro extremo se encuentran los planteamientos que niegan que la Psicología de la Educación sea una disciplina independiente.

En una posición intermedia se encuentran quienes conciben la Psicología de la Educación como una disciplina puente entre Psicología y Educación, con un objeto de estudio, unos métodos y unos marcos teóricos y conceptuales propios. En esta posición se encuentran autores,

[107] C. Coll (1990). Psicología y Educación: aproximación a los objetivos y contenidos de la Psicología de la Educación, en Coll, Palacios, Marchesi: Desarrollo psicológico y educación II. Madrid: Alianza.

como Glaser y Ausubel, que tienen una influencia destacable en Educación Matemática. Glaser defiende una psicología de la instrucción, con características de disciplina aplicada, como una ciencia del diseño o disciplina tecnológica; idea clave es que no se limita a describir su objeto de estudio sino que además elabora procedimientos para modificarlo, Ausubel señala que la diferencia básica entre Psicología y Psicología de la Educación consiste en que la primera se ocupa del estudio de las leyes del psiquismo humano, mientras que la segunda limita su estudio a las leyes del psiquismo humano que actúan durante el aprendizaje escolar.

Con carácter general, se señala como objeto de estudio de la Psicología de la Educación los procesos de formación, es decir, los procesos de cambio sistemático en el comportamiento humano que satisfacen los siguientes criterios: son procesos de adquisición, o lo que es lo mismo, dan lugar a un aprendizaje; son intencionales y se proponen una finalidad, es decir, responden a unas intenciones u objetivos educativos; tienen lugar durante un periodo de tiempo relativamente largo; provocan efectos durables en las personas; y, finalmente, producen reestructuraciones importantes del comportamiento.

"La Psicología de la Educación estudia los procesos educativos con una triple finalidad: contribuir a la elaboración de una teoría explicativa de estos procesos, elaborar modelos y programas de intervención dirigidos a actuar sobre ellos con una finalidad determinada y dar lugar a una práxis educativa coherente con las propuestas teóricas formuladas"[108]

La Psicología de la Educación es una disciplina educativa, y por tanto, de naturaleza aplicada y fuertemente vinculada con la práctica. Bajo este supuesto surge una triple consideración. En primer lugar, un conjunto de conocimientos que se aplican, a los que se denominan el núcleo teórico-conceptual; en segundo lugar, el ám bito de aplicación, en nuestro caso los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas; y en tercer lugar, los procedimientos de ajuste del conocimiento teórico a las características particulares de la Educación Matemática.

Por lo que se refiere al primer punto hay que indicar que la Psicología de la Educación no dispone de un marco teórico unificado y coherente que permita dar cuenta de los múltiples y complejos aspectos implicados en los procesos de desarrollo personal, de la influencia que la educación escolar tiene sobre ellos y, en particular, del peso real que tiene el aprendizaje de conocimientos matemáticos.

---

[108] Coll C. Obra citada.

No se dispone de una teoría comprensiva de la instrucción, con apoyo empírico y teórico suficientes para utilizarla como fuente única de información en la preparación y realización del currículo escolar; tampoco existe una teoría específica de la instrucción en el campo de la Educación Matemática. Sí hay, sin embargo, múltiples teorías que proporcionan información parcial adecuada. Nuestro marco de referencia concreto es un conjunto de teorías y explicaciones que, si a veces mantienen entre sí discrepancias importantes en algunos puntos, participan de una serie de principios comunes o, por lo menos, no contradictorios. Estos principios son los que determinan el desarrollo actual de la Educación Matemática y vienen marcando la línea de progreso en la investigación y el diseño curricular en este campo.

El marco de referencia está delimitado por lo que se puede denominar enfoques cognitivos en sentido amplio. Entre ellos hay que destacar la Psicología genética de J. Piaget y sus colaboradores de la Escuela de Gienebra; en este caso las aportaciones más destacables se refieren a la concepción de los procesos de cambio, las formulaciones estructurales del desarrollo operativo y las elaboraciones en torno a las estrategias cognitivas. También es importante la teoría del origen socio-cultural de los procesos psicológicos superiores de Vygotsky y su desarrollo posterior, en especial lo relativo al modo de entender las relaciones entre aprendizaje y desarrollo y la importancia de los procesos de interacción interpersonal. La teoría del aprendizaje verbal significativo de Ausubel y su prolongación en la teoría de la asimilación de Mayer, tienen un interés destacable por ir especialmente dirigidas a explicar los procesos de aprendizaje de bloques de conocimientos altamente estructurados. También hemos considerado en el apartado anterior la teoría del procesamiento de la información, cuyo interés en este caso se concreta en la hipótesis de que el conocimiento previo, organizado en bloques interrelacionados, es un factor decisivo en la realización de nuevos aprendizajes.

¿Existe una teoría del aprendizaje de las matemáticas?. Aunque se han realizado intentos bastante elaborados por avanzar en la construcción de una tal teoría, no se han alcanzado resultados efectivos hasta el momento. Entre los intentos más difundidos se encuentra el trabajo de Dienes, inspirado en la obra de Piaget, Bruner y Bartlett, algunos de cuyos aspectos se han comentado ya en este Proyecto. La teoría de Dienes se resume en cuatro principios:

1. Principio dinámico.
2. Principio constructivo.
3. Principio de variabilidad matemática.
4. Principio de variabilidad perceptiva,

cuyo desarrollo puede encontrarse en las obras de este autor.

Otros autores, como Skemp y Mialaret, han desarrollado tratamientos teóricos relativos al aprendizaje de las matemáticas, siempre fundamentados en las grandes corrientes teóricas antes señaladas.

Otros autores se han ocupado con mayor interés del ámbito de aplicación de las teorías a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Orton plantea una serie de cuestiones destacables en este ámbito de aplicación y recuerda continuamente que, aunque la fundamentación teórica conductista parezca estar desprestigiada científicamente y sea excluida explícitamente en la elaboración de diseños curriculares, tiene una influencia real en el aula ya que sostiene las crencias y pautas de actuación de muchos profesores.

Entre las cuestiones planteadas por Orton[109] destacamos las siguientes:

1. ¿Necesitan teorías los profesores de matemáticas?. La respuesta es obvia: *"un profesor acepta una posición teórica al admitir un determinado punto de vista o al tomar postura respecto de una cuestión específica"*; la idea resultante es que siempre se está interpretando, es decir, empleando una teoría; la cuestión se transforma en ¿qué teoría interpreta mejor el aprendizaje escolar en matemáticas?
2. ¿Cuáles son las exigencias cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas? Sobre esta cuestión plantea algunos de los puntos más relevantes en el aprendizaje de las matemáticas; los concreta en: retención y memorización; empleo de algoritmos; aprendizaje de conceptos; y resolución de problemas.
3. Un tercer bloque lo desglosa en las siguientes cuestiones:

¿Podemos promover el aprendizaje a través de una secuencia óptima?

¿Debemos aguardar hasta que los alumnos están dispuestos?

¿Pueden los alumnos descubrir las matemáticas por sí mismos?

En cada uno de los casos se analizan las implicaciones de tres planteamientos teóricos en relación con el aprendizaje de las matemáticas.

4. Finalmente, hay un cuarto bloque de cuestiones más concretas:

¿Por qué algunos alumnos rinden más que otros?

¿Influye el lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas?

[109] Orton A. (1988). Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom practices. London: Cassell.

A lo largo de la obra citada, y mediante la estructura diseñada por las cuestiones anteriores, explora sistemáticamente el ámbito de aplicación de las teorías generales a la Educación Matemática.

Gómez también estudia esta relación entre Psicología y Educación Matemática, destacando las aportaciones tanto teóricas como de desarrollo: *"Se asume que el aprendizaje de las Matemáticas tiene su propia psicología, que los estudiantes y profesores tienen ideas propias acerca de las Matemáticas en las situaciones de aprendizaje y que los profesores estarán mejor equipados para su tarea si pueden comprender cómo se ven las Matemáticas desde la perspectiva del que aprende"*[110] .

El ambito de aplicación de las teorías que fundamentan la Psicología de la Educación en el aprendizaje de las matemáticas suele estar muy conectado, en la mayor parte de los casos, con los procedimientos de ajuste: procedimientos de diseño y planificación de procesos educativos, que abarcan la dimensión tecnológico-proyectiva de la Psicología de la Educación. Estos procedimientos de diseño y planificación suelen ir precedidos por el desarrollo de investigación básica sobre el aprendizaje de tópicos matemáticos concretos en los que se debe poner de manifiesto si el modo concreto de interpretar aprendizajes específicos, bajo un esquema teórico, da los resultados previstos, necesita de alguna revisión en profundidad o de nuevos planteamientos. Todo este campo de investigación, que trata de ajustar el marco teórico general a las actividades de diseño y planificación de procesos educativos en matemáticas, es, en la actualidad, uno de los campos de estudio e investigación más fecundos en Educación Matemática y una de las aportaciones más relevantes que se realizan desde la Psicología de la Educación en el momento actual.

En resumen, el campo de problemas que se pretende clarificar mediante las aportaciones de la Psicología Educativa está centrado en el modo de entender e interpretar las relaciones entre desarrollo, aprendizaje y enseñanza, y por tanto en la concepción misma sobre la Educación en general y la Educación Matemática en particular.

No hay discrepancias al afirmar que la finalidad última de la educación es promover el desarrollo de los seres humanos; sí las hay cuando se quiere definir y explicar en qué consiste ese desarrollo y hay que decidir el tipo de acciones educativas más adecuadas para promoverlo; mayor dificultad presenta integrar el conocimiento matemático en ese desarrollo.

---

[110] Gómez B. (1991). Las Matemáticas y el proceso educativo, en A. Gutiérrez (Edt.) Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Madrid: Síntesis.

La disyuntiva básica se produce entre los que entienden que el desarrollo es el resultado de un proceso endógeno, que procede de dentro a fuera y los que lo conciben como resultado de un proceso exógeno, que procede de fuera a dentro, producido por una serie de aprendizajes específicos.

En el primer caso, lo verdaderamente importante es la competencia cognitiva general, siendo finalidad de la educación reforzar esta competencia cognitiva dentro de los márgenes que permiten las leyes generales del desarrollo a las que está sometida. Las teorías estructurales del desarrollo han proporcionado un apoyo considerable a esta orientación al postular la existencia de una dirección y unos estadios o niveles universales del desarrollo que pueden adoptarse como fines educativos, es decir, que pueden tomarse como un modelo del desarrollo personal que debe promover la educación, a los que se ajusta la educación matemática.

La segunda alternativa, que interpreta el desarrollo fundamentalemente como resultado de aprendizajes específicos, critica el enfoque cognitivo/evolutivo y denuncia el carácter cíclico de sus argumentos: si los aprendizajes específicos introdujeran modificaciones en los universales del desarrollo cognitivo, dejarían de ser universales. Se argumenta que es absurdo plantearse como meta que los niños alcancen un estadio determinado pues de todos modos lo alcanzarán sin necesidad de ayudas específicas, ya que se trata de un eslabón del proceso natural del desarrollo del ser humano. En este caso, el Sistema Escolar debe seleccionar y promover el aprendizaje de parcelas específicas de conocimiento, incluidos los conocimientos matemáticos.

Las aportaciones de la Psicología de la Educación a la Didáctica de la Matemática son esenciales, como se ve, a la fundamentación y desarrollo de nuestra área de conocimiento.

3. Constructivismo.

Aunque el Constructivismo no se puede considerar como una teoría del aprendizaje, son varios los motivos que nos han llevado a incluir una reflexión sobre el Constructivismo y sus relaciones con la Educación Matemática, dentro del apartado dedicado a las aportaciones procedentes de la Psicología.

En primer lugar, en los documentos recientes elaborados por el Ministerio, relativos al Diseño Curricular para el Area de Matemáticas,[111] encontramos las siguientes consideraciones:

---

[111] Ministerio de Educación y Ciencia (1989). Diseño Curricular Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: Centro de Publicaciones del MEC.

"Desde la perspectiva de su elaboración y adquisición, las matemáticas son pues más constructivas que deductivas. Desligado de la actividad constructiva que está en su origen, el conocimiento matemático corre el peligro de caer en puro formalismo y de perder toda su potencialidad como instrumento de representación, explicación y predicción.

La naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad y reflexionar sobre ellas obliga a tener especialmente en cuenta, en la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el nivel de competencia cognitiva de los alumnos. Existe un estrecho vínculo entre las relaciones que los niños pueden establecer en un momento determinado y su nivel de desarrollo intelectual"

La relación que se establece entre Constructivismo y aprendizaje de las matemáticas es una de las características innovadoras del Diseño Curricular.

En esta misma línea Novak[112], hablando del constructivismo humano, dice:

"La creación de nuevo conocimiento es, por lo que respecta al creador, una forma de aprendizaje significativo. Implica, al mismo tiempo, el reconocimiento de nuevas regularidades en los hechos u objetos, invención de nuevos o extensión de antiguos conceptos, reconocimiento de nuevas relaciones entre conceptos y, en los saltos más creativos, una gran reestructuración de las tramas conceptuales para que incluyan relaciones de orden superior. Estos procesos pueden ser vistos como parte del proceso del aprendizaje asimilador, que implica la adición de nuevos conceptos, la diferenciación progresiva de los conceptos existentes, el aprendizaje de orden superior (en ocasiones) y una nueva reconciliación integradora significativa entre las tramas conceptuales".

También Fischbein[113], al presentar las líneas y nuevas tendencias de interés en Educación Matemática, procedentes del campo de la Psicología señala el Constructivismo como una línea de reflexión prioritaria, y hace las siguientes consideraciones:

---

[112] Novak J.D. (1988). El constructivismo humano, en Porlán R., García E., Cañal P. (Edts.) Constructivismo y Enseñanza de las Ciencias. Sevilla: Diada Editoras.

[113] Fischbein E. (1990). Introduction, en Kilpatrick J. & Nesher P. (Edts.). Mathematics and Cognition. Cambridge: Cambridge University Press.

"Aprender matemáticas significa construir matemáticas. La actividad matemática es esencialmente un proceso constructivo. El estudiante no aprende matemáticas absorbiendo conceptos, definiciones, teoremas y demostraciones, sino construyéndolos mediante sus propios esfuerzos intelectuales. Pero los individuos no hacen todo esto respondiendo a sus propios problemas y movilizando sus propios significados intelectuales naturales. Nuestro comportamiento natural se adapta a la realidad concreta en la que vivimos y no a constructos formales gobernados por reglas y definiciones formales".

Los trabajos elaborados recientemente relativos al interés que presenta el Constructivismo para la Educación Matemática y, en particular, al aprendizaje escolar de las matemáticas, las contribuciones realizadas y los debates que han tenido lugar corroboran el interés que tiene el Constructivismo en nuestro campo.

El Constructivismo puede caracterizarse simultáneamente como una posición cognitiva y como una perspectiva metodológica. Como perspectiva metodológica en las ciencias sociales, el cosntructivismo asume que los seres humanos son sujetos que conocen, que el comportamiento humano responde principalmente a propósitos y que los organismos humanos, en el momento actual, tienen una capacidad altamente desarrollada para organizar concimiento.

Como posición cognitiva, el constructivismo asume que todo el conocimiento es construido y que los instrumentos de construcción incluyen las estructuras cognitivas que son, a su vez, innatas (Chomsky) o bien resultado de una construcción evolutiva (Piaget).

La segunda interpretación es más característica del constructivismo como posición cognitiva y es la que sostienen la mayoría de los constructivistas en Educación Matemática.

Esta idea es la que sostiene Fischbein[114] cuando afirma: *"el constructivismo es una teoría del conocimiento. Nuestras conginiciones, no son duplicados de un mundo externo dado sino más bien construcciones cuyo propósito es el de garantizar los éxitos prácticos de nuestro comportamiento."*

Los orígenes del constructivismo actual se atribuyen, principalmente, al trabajo de Piaget. Noddings[115] explica la aparición y desarrollo de las ideas constructivas a partir de Piaget, que pasamos a resumir.

---

114 Fischbein E. Obra citada.

115 Noddings N. (1990). Constructivism in Mathematics Education, Davis R., Maher C. & Noddings N. (Edts.) Constructivist views on the Teaching and Learning of Mathematics. Journal for Research in Matematics Education. Monograph nº 4.

Al aceptar la distinción kantiana entre conocimiento empírico y lógico-matemático Piaget aceptó la difícil tarea de explicar el desarrollo de las estructuras matemáticas cognitivas. En este caso, Piaget confió en el concepto de abstracción reflexiva. La abstracción reflexiva se diferencia de la abstracción clásica en que no procede de una serie de observaciones de acontecimientos u objetos contingentes. Antes bien, es un proceso de interiorización de nuestras operaciones físicas sobre los objetos. Piaget se separó de Kant al describir las estructuras cognitivas como resultado del desarrollo, en vez de como estructuras innatas.

No podemos forzar determinados resultados en los objetos sobre los que operamos. Nuestras operaciones están constreñidas de algún modo. Hay algo inevitable en los resultados y características de las operaciones. Esto sucede debido a que las estructuras resultantes son lógico-matemáticas y sus actuaciones están marcadas por la necesidad. Esta conclusión plantea un reto a aquellos constructivistas que enfatizan la singularidad de las construcciones individuales. Las teorías de Piaget son, en el importante sentido que acabamos de describir, completamente constructivistas. No son únicamente procesos intelectuales constructivos sino que las propias estructuras cognitivas son, ellas mismas, productos de una construcción continua. Esta construcción activa implica a la vez una estructura básica desde la que comenzar la construcción (una estructura de asimilación) y un proceso de transformación o creación que es la construcción. Finalmente el constructivismo cognitivo de Piaget conduce, lógicamente, al constructivismo metodológico.

El constructivismo en educación matemática sostiene que el constructivismo cognitivo implica el constructivismo pedagógico; es decir, la aceptación de premisas constructivas acerca del conocimiento y los sujetos que conocen implica un modo de enseñar que reconoce a los sujetos del aprendizaje como conocedores activos. Sin embargo, es cierto que se pueden aceptar los métodos pedagógicos sugeridos por el constructivismo sin aceptar las premisas constructivistas. También puede ocurrir que un constructivista filosóficamente convencido no necesite, lógicamente, emplear los llamados métodos constructivos.

Los constructivistas están, por lo general, de acuerdo en lo siguiente.

1. Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
2. Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción. Estas estructuras importan para construcción; es decir, explican el resultado de la actividad

cognitiva en el sentido genérico en el que un programa de ordenador cuenta para los resultados.

3. Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes. El entorno presiona al organismo para que se adapte.
4. El reconocimiento del constructivismo como una posición cognitiva conduce a la adopción del constructivismo metodológico.
   a) El constructivismo metodológico en investigación desarrolla métodos de estudio en consonancia con los supuestos del constructivismo cognitivo.
   b) El constructivismo pedagógico sugiere métodos de enseñanza en consonancia con el constructivismo cognitivo.

Carpenter[116], recientemente señala algunas de las ventajas obtenidas en investigación al emplear el constructivismo metodológico:

" Hay una gran variedad de resultados prometedores en áreas específicas de investigación, pero la contribución más significativa de esta investigación consiste en que la enseñanza y el aprendizaje se describen como procesos activos en los que los profesores y aprendices construyen su propio conocimiento. Esto implica que, incluso aunque podamos no tener un mapa específico de cómo se adquieren los conceptos y destrezas particulares, podemos planificar la instrucción teniendo en cuenta lo que los estudiantes ya conocen y cómo asignan significado a los nuevos conceptos y destrezas que han aprendido, y podemos tener en cuenta el pensamiento de los profesores y la toma de decisiones. Si aceptamos seriamente estos supuestos, tienen profundas implicaciones para el tipo de soluciones que buscamos para dirigir los problemas de la educación".

Para los profesores, el constructivismo metodológico se convierte en constructivismo pedagógico. Para enseñar bien, necesitamos conocer lo que nuestros estudiantes piensan, cómo producen la cadena de marcas que vemos en sus hojas de trabajo, y qué es lo quieren hacer (o pueden hacer) con el material que les presentamos. Pero las premisas cognitivas del constructivismo pueden dictar solamente guías para una buena enseñanza. No podemos obtener de ellas, como tampoco lo podemos hacer de ninguna otra posición cognitiva, métodos específicos de enseñanza.

---

[116] Carpenter T. (1990). Editorial. Journal for Research in Mathematics Education. Vol 21, nº 3.

El constructivismo pedagógico sugiere instrumentos de diagnóstico más sofisticados, herramientas que pondrán al descubierto patrones de pensamiento, errores sistemáticos y concepciones erróneas persistentes.

todo de hacer explícito el pensamiento es, o puede ser, un método potente de enseñanza tanto como una herramienta de diagnóstico, pero los profesores no deben limitarse sólo a ella debido a su carácter constructivo. Las premisas constructivas implican que puede haber muchas vías para llegar a muchas soluciones o terminales de instrucción.

Muchos educadores matemáticos reconocen el poder de los métodos constructivos en situaciones individualizadas, pero también aprecian que los escolares no pueden trabajar continuamente en tales situaciones. Las condiciones del aula nos fuerzan a pensar acerca de cierta economía en la instrucción. Los profesores constructivistas necesitan tener sus premisas básicas en la mente, pero debieran tener libertad para adaptar una amplia variedad de métodos a sus propios propósitos.

Por ejemplo, consideremos la recomendación constructiva general de que los profesores deben procurar un empleo considerable de material manipulativo. Esta recomendación fue un primer y plausible intento para aplicar la teoría de Piaget directamente a la enseñanza. Si la abstracción reflexiva proviene de las operaciones que realizamos sobre los objetos, entonces tiene sentido poner a los estudiantes a trabajar con objetos. La dificultad, por supuesto, está en que los estudiantes deben tener un propósito para implicarse en la manipulación de objetos.

Comprendiendo esta posibilidad, necesitamos quizás, proporcionar alguna instrucción directa sobre el uso de diferentes materiales y luego ponerlos a disposición de los alumnos. En las situaciones de resolución de problemas, no debieramos probablemente guiar a los estudiantes en su uso. Si lo hacemos, es posible que apartemos a los estudiantes de sus propósitos y los pongamos a trabajar ciegamente en los nuestros.

La valoración del constructivismo es, por lo general, positiva y su influencia sobre Educación Matemática considerable aún cuando se siguen planteando hoy día cuestiones importantes en relación con la aplicación del constructivismo a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Por ejemplo, debido a que los profesores tienen que trabajar con muchos niños, debemos preguntarnos si hay algún modo de trabajar en situaciones uno a uno con un grupo completo. ¿Se puede lograr un pensamiento genuino de cada alumno en situaciones en las que interviene todo el grupo?

Se han producido varios modelos, que son altamente interactivos. Los profesores, simultáneamente, aplican el modelo y dirigen los logros, pero la aplicación del modelo se debe realizar planteando cuestiones, siguiendo los ejemplos y conjeturando, más que presentando productos incompletos. Enseñar por esta vía requiere un conocimiento matemático considerable tanto como destrezas pedagógicas. ¿Cómo pueden los profesores seguir las sugerencias de los alumnos si no saben las suficientes matemáticas como para percibir hacia dónde deben conducir las sugerencias?

¿Cómo puede lograrse la implicación personal, que es esencial para realizar construcciones potentes? Una posibilidad está en incrementar la cantidad de tiempo que los alumnos emplean trabajando juntos. El uso de pequeños grupos de aprendizaje cooperativo está llegando a ser una estrategia popular, y hay buenas razones cognitivas para permitir que los estudiantes trabajen juntos. Comienzan así a retarse a sí mismos, a preguntar las razones y, en general, a conducir su propio trabajo mental mientras que otros hacen la exposición pública. Una dificultad que se presenta consiste en que, una vez más, debemos asegurarnos que la comunidad es una comunidad matemática.

La gran fuerza del constructivismo está en que conduce a pensar crítica e imaginativamente acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La creencia en las premisas del constructivismo lleva a no confiar en soluciones simples, y proporciona un potente conjunto de criterios para juzgar las posibles elecciones de métodos de enseñanza.

Sin embargo, también el constructivismo ha recibido fuertes críticas, que han originado cierta polémica en los últimos años. Entre las críticas más elaboradas encontramos la de Kilpatrick[117]. Aunque el núcleo del análisis de Kilpatrick sobre el constructivismo está centrado en su fundamentación epistemológica, las implicaciones para el aprendizaje de las matemáticas son importantes. Resumimos a continuación algunos de los argumentos empleados por Kilpatrick en este trabajo, que nos parecen de especial interés.

Lo que el constructivismo parece ser:

Un problema epistemológico antiguo, no resuelto por la filosofía occidental, se refiere a cómo una realidad objetiva independiente puede llegar a ser conocida por el sujeto cognoscente, quien no tiene posibilidad de controlar si su conocimiento es o no conocimiento de algo. Cualquier intento para probar la veracidad de lo que es conocido debe ser, en sí mismo, un acto de conocimiento y por tanto, subjetivo. Cualquier conocimiento de una "verdad objetiva", resulta

---

[117] Kilpatrick J. (1987). What constructivism Migth be in Mathematics Education, en Bergeron J., Herscovics N. & Kieran C. Proceedings of the Eleventh PME Conference Vol. I, pp. 3-27, Montreal: University of Montreal.

imposible. El constructivismo corta el nudo gordiano separando la epistemología de la ontología y argumentando que una teoría del conocimiento debiera ocuparse de la adaptación del conocimiento a la experiencia y no del emparejamiento entre conocimiento y realidad. La única realidad que podemos conocer es la realidad de nuestra experiencia.

El punto de vista constructivista implica dos principios:

1. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, y no recibido pasivamente desde el entorno.
2. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo de experiencias de cada sujeto; no se descubre un mundo independiente y preexistente fuera de la mente del que conoce.

El primero de estos principios es más ampliamente aceptado que el segundo entre los que se consideran a sí mismos como constructivistas; el segundo principio resulta chocante para muchas personas. Esto separa lo que se denomina constructivismo simple del constructivismo radical, que está basado en la aceptación de ambos principios.

El constructivismo radical se denomina así porque rechaza el realismo metafísico en el que aún permanecen muchos empiristas. Requiere de los que lo aceptan olvidar todos los esfuerzos por conocer el mundo tal y como es.

El constructivismo radical adopta una visión ciega hacia "el mundo real". Nunca llegaremos a conocer una realidad exterior a nosotros. En vez de eso, todo lo que podemos aprender son las limitaciones del mundo sobre nosotros, las cosas no permitidas a través de nuestra experiencia con la realidad, lo que no funciona.

En resumen, el constructivismo radical parece ser una epistemología que convierte todo el conocer en activo y todo el conocimiento en subjetivo. Siguiendo a las ciencias físicas en su rechazo de la posibilidad de llegar a conocer las realidades últimas, trata al sujeto cognoscente como organizador de su propia experiencia y constructor de su propia realidad. Considera el llegar a conocer como un proceso en el que, más que obtener información, el sujeto que conoce, mediante ensayo y error, construye un modelo viable del mundo.

Lo que el constructivismo parece no ser.

Al ser una teoría de la adquisición del conocimiento, el constructivismo no es una teoría de la enseñanza o instrucción. No hay una conexión necesaria entre cómo se considera la adquisición del conocimiento y qué procedimientos de instrucción parecen óptimos para lograr que esa adquisición suceda. La epistemología es descriptiva mientras que las teorías de la enseñanza y la instrucción deben ser, necesariamente, teorías sobre la práctica. Sin embargo, los constructivistas han tratado de obtener implicaciones para la práctica de su teoría, y en algunos casos las implicaciones parecen indicar que algunas prácticas de enseñanza y consideraciones sobre la instrucción presuponen una visión constructivista del conocimiento.

Sin embargo, Kilpatrick es rotundo con relación a esa pretensión y niega que las consecuencias que los constructivistas derivan del constructivismo radical para la práctica educativa puedan explicarse únicamente en términos de los supuestos del constructivismo. Por el contrario, argumenta con convicción que las consecuencias más importantes pueden entenderse en términos de otras hipótesis alternativas. Citando a Von Glaesersfeld señala que las consecuencias que se siguen del constructivismo radical para la práctica educativa son:

a) la enseñanza (es decir, usar procedimientos que pretenden y generan comprensión) puede distinguirse con precisión de la instrucción (es decir, usar procedimientos que pretenden un comportamiento repetido);
b) los procesos que se supone ocurren en el interior de la cabeza de los estudiantes son más interesantes que el comportamiento explícito;
c) la comunicación lingüística resulta un proceso para guiar el aprendizaje de los estudiantes, no un proceso para transferir conocimiento.
d) las desviaciones de los estudiantes de las expectativas del profesor resultan medios para entender sus esfuerzos por comprender;
e) la enseñanza por entrevista se propone como un intento no sólo de inferir las estructuras cognitivas sino también de modificarlas.

El resto del trabajo lo dedica a señalar conceptos y relaciones que los constructivistas deben clarificar para lograr mayor credibilidad y coherencia y, también, contribuir a una explicación científica de los fenómenos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En particular, señala líneas de reflexión en la conexión con las Matemáticas indicando la necesidad de profundizar y expresarse con más claridad sobre las relaciones entre el constructivismo, las matemáticas como disciplina y las matemáticas como materia escolar. Más aún, el constructivismo necesita orientar las demandas de una nueva aproximación a la filosofía de las matemáticas, cuasi-empirismo, que estudia la práctica de las matemáticas en un contexto socio-histórico y que parece ser compatible tanto con la matemática realista como con la constructivista. También es necesario trabajar adecuadamente con las matemáticas escolares. Sola la epistemología no puede responder a la cuestión de qué matemáticas enseñar. Un análisis del conocimiento no puede producir un currículo. El currículo se basa en nuestros propósitos, en lo que valoramos, y acerca de todo ésto la epistemología no tiene nada que decir. Pensar de otro modo es caer en la "falacia epistemológica".

La crítica que realiza sobre la fundamentación constructivista del currículo es especialmente lúcida:

" Algunos constructivistas han tratado de basar el currículo sobre una fundamentación constructivista. Se ha argumentado que necesitamos en primer lugar determinar el orden moral, político o social que creemos necesario, luego expresar nuestros propósitos educativos y, a la vista de estos propósitos, escoger el contenido y los objetivos del currículo. La espistemología puede resultar útil en este momento para determinar los objetivos cognitivos, pero serán necesarias otras ayudas para los objetivos no cognitivos."

Como se ha visto, la polémica es seria y va al fondo de las cuestiones; seguramente queda aún camino por recorrer, fundamentaciones que completar e implicaciones que establecer. La contribución actual del Constructivismo a la Educación Matemática es, hoy día, importante y merecedora de consideración.

II.3.4. Aportaciones de la Sociología de la Educación.

La Sociología de la Educación es una disciplina relativamente reciente, que surge de especializar una disciplina más amplia, como es la Sociología, incorporando la perspectiva educativa a un campo de estudios ya existente. Aun cuando la mayor parte de los autores coinciden en considerar los trabajos de Durkheim como el comienzo de la Sociología de la Educación, hasta después de la segunda Guerra Mundial no se produce el despegue de esta disicplina.

El objeto de la Sociología de la Educación consiste en el estudio sistemático de las relaciones entre el Sistema Educativo y la sociedad; de la relación de cada grupo social con el Sistema Educativo; y de los procesos sociales que tienen lugar dentro de las instituciones educativas, sus centros, etapas, ciclos y prácticas cotidianas. Como se ve, el panorama que abarca la Sociología de la Educación es muy amplio y suceptible de enfoques muy variados.

Históricamente, y en relación explícita con el Sistema Educativo, han sido varias las corrientes de pensamiento que han desarrollado este campo. Los autores consultados nos remiten a varias corrientes prioritarias.

En primer lugar se considera el funcionalismo, que contempla la educación como un mecanismo de distribución y asignación de las posiciones sociales y, también, como un proceso de producción que modifica a los individuos. Estas son las dos funciones prioritarias que se suponen asignadas a la Escuela, y cuya realización - en términos generales- se considera adecuada. Sin embargo, sus críticos echan en falta dos ideas básicas: la noción de conflicto y el carácter de actividad humana, ambas presentes en la acción escolar. Como reacción a algunas de las carencias del funcionalismo surgen las teorías de la reproducción, que consideran que la función de la escuela no consiste simplemente en integrar a los individuos en una sociedad no problemática, sino reproducir las relaciones sociales de productividad, división del trabajo, clases sociales e ideología dominante, para organizar y mantener el dominio de una minoría sobre la mayoría.

También surge como reacción al funcionalismo la sociología interaccionista, que subraya el papel social de los agentes educativos.

La tercera corriente sociológica surgida para superar las deficiencias funcionalistas es la denominada credencialista, para la cual la escuela es un lugar donde, simplemente, se adquieren títulos que luego van a ser utilizados por los individuos y los grupos como instrumento legítimo en el logro de ventajas relativas dentro de la vida adulta y profesional.

El estado actual de la Sociología de la Educación trata de integrar en un único cuerpo teórico la estructura social y la actividad humana, la reproducción y las contradicciones y conflictos que se derivan de ello.

Para realizar el estudio de los hechos e instituciones sociales que delimitan el Sistema Educativo, la Sociología de la Educación, en términos generales, analiza su objeto empleando tres niveles diferentes de análisis, que se suelen denominar macrosociológico, intermedio y microsociológico. Vamos a presentar varias cuestiones relevantes en cada uno de estos niveles y, junto con ello, algunas contribuciones realizadas a la Educación Matemática empleando los conceptos y métodos de la Sociología Educativa.

El **nivel macrosociológico** estudia las relaciones del Sistema Educativo con la Sociedad. Guerrero[118] considera que las cuestiones más importantes que se plantean, en este

---

[118] Guerrero A. (1989). La Sociología de la Educación: objeto y perspectivas teóricas, en Ortega F. y otros Manual de Sociología de la Educación. Madrid: Visor.

nivel, son:

¿En qué medida el sistema educativo está conformado por la sociedad?.
¿Hasta qué punto los cambios que se producen en el sistema educativo proceden de cambios y necesidades de la sociedad en la que se inserta?
¿ Qué grupos sociales y por qué mecanismos determinan qué contenidos deben extraerse del conocimiento del área científica, para divulgarse entre los diferentes ciclos y niveles del proceso escolar?
¿En qué medida contribuye el Sistema Educativo al mantenimiento de la sociedad como un todo o a su transformación y cambio?
¿Hasta qué punto los cambios en el Sistema Educativo producen cambios en la Sociedad?

Por supuesto, esta lista de cuestiones no es exhaustiva y caben muchas otras preguntas importantes sobre el sistema educativo desde un nivel macrosociológico. Pero no es nuestro objetivo en este trabajo ampliar el campo de temas de estudio en las disciplinas que fundamentan la Didáctica de la Matemática, sino considerar las aportaciones realizadas a nuestra área de conocimiento desde cada una de ellas. En este sentido queremos destacar que todas las cuestiones anteriores también se han planteado en Educación Matemática, han servido para orientar y dirigir trabajos de estudio y reflexión, y han proporcionado esquemas teóricos válidos para orientar la práctica docente en matemáticas. Veamos algunos ejemplos.

Abraham y Bibby[119] presentan la Institución Social de las Matemáticas, destacando algunas relaciones que conforman socialmente el conocimiento matemático; dentro de este esquema consideran la Educación Matemática como un elemento predominante:

---

[119] Abraham J., Bibby N. (1988). Mathematics and Society: ethnomathematics and a public education curriculum. For the learning of Mathematics Vol. 8, nº 2 págg. 2- 11.

Se pone de manifiesto que la Educación Matemática está fuertemente condicionada por la sociedad.

Esta misma idea se puso de manifiesto en el Simposio celebrado en Valencia en

1987[120]:

> *"Los valores, los conflictos, las expectativas, los temores, las conductas y reglas de actuación que una sociedad tenga estarán también en su sistema escolar. Las destrezas, las habilidades y los conocimientos que la sociedad estime necesarios se impulsarán por medio del sistema escolar.*
>
> *La finalidad última de la escuela consiste (en su vertiente positiva) en integrar al alumno en el entramado y funcionamiento de una sociedad cada vez más compleja en sus formas de organización, en sus conocimientos y en sus relaciones de cooperación y convivencia; y (en su vertiente negativa) en limar las tendencias a la disgregación así como a la marginación voluntaria o involuntaria. La estructura escolar asienta y difunde concepciones éticas, sociales e ideológicas de una sociedad determinada."*

La idea de cambio también se encuentra presente dentro de las cuestiones abiertas a la discusión y análisis en Educación Matemática:

> *"El cambio educativo depende de que miles de individuos adquieran nuevas competencias, acepten nuevos valores y objetivos y, a menudo, acepten también alteraciones en la balanza de poder. No puede llevarse a cabo a poco precio"*[121]

Es muy probable que haya que considerar como un hecho, independiente de filosofías y de grados de desarrollo, el que los cambios en la escuela se produzcan siempre con algún retraso, o con más lentitud, que los cambios en la sociedad. Pero aun teniéndolo en cuenta, no deja de ser elocuente que al comparar los ritmos de la sociedad y la educación españolas sea más fácil hacer, a grandes rasgos, una enumeración de desencuentros que de armonías. Por esto mismo, los profesores de matemáticas presentes en Valencia en el año 87, al analizar al Sistema Educativo Español del momento y

---

[120] Alonso y otros (1987). Aportaciones al debate sobre las Matemáticas en los 90. Valencia: Mestral.

[121] Howson G. y otros (1987). Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los noventa. Valencia: Mestral.

compararlo con la sociedad, señalaron las siguientes diferencias:

1. En el medio social hay un mayor respeto hacia los individuos, aceptando las peculiaridades y dándoles un valor positivo. En el medio escolar, sin embargo, no se termina de asumir las capacidades y peculiaridades de alumnos y profesores.
2. El medio social admite la pluralidad política, la diversidad de proyectos y la variedad de estrategias para ponerlos en práctica; el medio escolar promueve un modelo jerárquico en el que predomina la uniformidad de lo que debe ser aprendido.
3. El medio social evoluciona tecnológicamente y responde con agilidad a las necesidades planteadas; en el medio escolar -por lo general- los recursos didácticos y los materiales educativos parecen todavía un lujo.
4. El medio social promueve la idea de que hay que obtener de cada individuo el máximo de sus capacidades; en el medio escolar los alumnos y profesores ven limitadas sus posibilidades por cuestiones de edad, pertenencia a un grupo o de perspectiva globalizadora.
5. El medio social considera a cada individuo como responsable y actor de su propia vida y de su pensamiento; en el medio escolar se promueve una actitud sumisa en los alumnos y rutinaria en los profesores.
6. La sociedad favorece las interacciones y remodela sus ideas; el medio escolar, sin embargo, se encuentra aislado, constituido por unas aulas aisladas entre sí y unos profesores poco habituados al trabajo en equipo.

Este análisis no se limitó a detectar deficiencias en el Sistema Escolar como un todo, sino que también se extendió a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas:

> *"Al trabajar sobre procesos de razonamiento, las matemáticas imponen unas determinadas características sobradamente conocidas: rigor, precisión, razonamiento lógico, equilibrio, concisión, etc. Además de estas características propias del pensamiento matemático, la educación matemática debe consistir primordialmente en desarrollar en los escolares un pensamiento y una actitud activos y creativos. Una educación matemática fosilizada en contenidos inmutables se contradice a sí misma.*
>
> *La educación matemática ha experimentado una evolución muy rápida*

en los últimos años y se está consolidando como disciplina autónoma en el conjunto de los estudios que tienen por objeto la educación. Hay que conseguir incorporar al aula los resultados relevantes de las investigaciones educativas, mejorar las técnicas docentes y facilitar el aprendizaje de los alumnos.

La evolución normal de la sociedad obliga a una reflexión permanente acerca del papel de las matemáticas y acerca de los contenidos que han de transmitirse:

- *El conocimiento matemático básico debe estar más generalizado y a la vez más extendido en unos determinados temas, sin que nos asuste su aparente simplicidad.*
- *Los desarrollos más especializados corresponderán a subgrupos específicos de alumnos y lo serán en virtud de opciones que se justifiquen por razones varias y no sólo por su utilidad"*[122]

La determinación de los contenidos para los currículos de matemáticas de los diferentes niveles del Sistema Educativo, los grupos sociales implicados y los mecanismos seguidos para determinar esos contenidos también han sido objeto de múltiples debates en la comunidad de Educadores Matemáticos. Recientemente la reflexión se ha intensificado empleando categorías y métodos de neto carácter sociológico. Esta aportación la vemos desarrollada en Ernest[123]

"Los valores sociales también se manifiestan en las metas del currículum matemático, metas que corresponden a los intereses de los distintos grupos sociales. Pueden distinguirse tres metas:

* *La meta utilitaria, que afecta a la adquisición de destrezas matemáticas utilitarias; el logro de funcionalidad matemática.*

---

[122] Alonso F. y otros. Obra citada.

[123] Ernest P. (1986). Valores Sociales y Políticos. Mathematics Teaching nº 116, págs. 16-18.

* *La meta del desarrollo personal, afecta a la contribución de la educación matemática hacia el aumento, desarrollo y educación general del individuo completo.*
* *La meta matemática, afecta a la transmisión del conocimiento matemático; la comunicación de la disciplina académica de las matemáticas a los estudiantes.*

Estas metas reflejan los valores de la sociedad como un todo (especialmente relativos al gobierno y al empleo), los de los pensadores humanistas y liberales y de los educadores, y los de la comunidad matemática, respectivamente.

El poder de estos grupos sobre el currículum matemático se refleja en la prioridad dada a estas metas. El currículum matemático está dominado por las metas matemáticas, seguido por las utilitarias con algunas concesiones ocasionales hacia las metas del desarrollo personal".

También Howson, Keitel y Kilpatrick[124] , al señalar las causas que impulsan el cambio y desarrollo curricular, entre otras, indican causas sociales y políticas, tales como los movimientos igualitarios - que han fundamentado las corrientes de las matemáticas para todos (mathematics for all)-; las demandas socio-profesionales, que han venido impulsadas por las reclamaciones del comercio y de la industria hacia una mayor cualificación profesional desde la educación obligatoria; el desarrollo económico y tecnológico con unas nuevas necesidades en el comercio, los transportes, los medios de comunicación, etc; y, finalmente, las motivadas por las propias autoridades educativas.

E, igualmente, al señalar las barreras que se oponen a este desarrollo, enumeran razones de:

i) valoración; las diferentes ideologías e intereses pueden ser debidas a causas políticas, religiosas, educativas y sociales; todas ellas provocan distintas reacciones

[124] Howson G., Keitel C., Kilpatrick J. (1981). Currículum Development in Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

ante las innovaciones.

ii) poder; toda modificación implica un cambio en la balanza de poder que suele provocar rechazos.

Finalmente, y para concluir nuestra revisión de trabajos y estudios desarrollados en relación con las grandes cuestiones del nivel macrosociológico, queremos indicar que las modificaciones relativas a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas se han considerado socialmente comprometidas y opuestas al mantenimiento de los valores sociales y políticos de comunidades culturales distintas a la nuestra. Esta idea es expresada en toda su crudeza por M. Jurdak[125] , de la Universidad de Beirut.

> *"La incompatibilidad entre los valores de la enseñanza de la matemática y los de la cultura materna no constituye una mera posibilidad teórica sino más bien una realidad histórica. Las décadas pasadas han sido testigo de la conversión de los llamados paises en vías de desarrollo en estados independientes. Partiendo en clara desventaja, consecuencia de un bajo nivel de desarrollo socio-económico, estos países se volvían a mirar hacia las antiguas potencias, con las que se hallaban vinculados por lazos de intercambios culturales y educativos, buscando en ellos modelos y fuentes de ciencia y de tecnología. Ya fuera acertadamente o no, las matemáticas se percibían en primer lugar como la herramienta fundamental de la ciencia y de la tecnología, y en segundo lugar como una disciplina de revelación divina, universal e independiente respecto de culturas determinadas."*

Aún cuando esta situación parezca no afectarnos no cabe duda que las aportaciones de la Sociología de la Educación al estudio y fundamentación de la Educación Matemática deben contribuir a que las matemáticas -su enseñanza y aprendizaje- se conviertan en factor educativo e integrador de primer orden en la Europa multicultural que se diseña para un futuro inmediato.

---

[125] Jurdak M. (1989). La religión y el lenguaje, medios de transmisión cultural y obstáculos en la enseñanza de las Matemáticas. En Keitel C. y Damerow P. : Mathematics, Education and Society. París: Unesco.

El **nivel intermedio** de los estudios sociológicos es aquel en el que se analizan la composición y características de los diferentes grupos -actores y agentes- que integran el sistema educativo, así como las relaciones entre ellos, los demás grupos sociales y la educación. En este nivel se estudia cómo afecta a los diferentes grupos de alumnos y alumnas su paso por el sistema educativo y cómo este sistema los inserta en la sociedad. En este nivel se tienen en cuenta los diferentes sistemas de estratificación: género, clase y etnia o cultura. Socialmente, se entiende por género la construcción social de las diferencias entre los sexos; por clase, los grupos producidos por las diferencias económicas; por etnia o cultura las diferencias sociales establecidas en torno a orígenes culturales y/o geográficos diferentes.

En el apartado I.3.3 de este proyecto hemos hecho referencia a la caracterización de la Comunidad de Educadores Matemáticos, cuando propusimos que **educador matemático** es toda persona que pretende formar o instruir a otra, u otras, mediante las matemáticas. Sin embargo, también es un hecho socialmente cierto que no todos los profesores de matemáticas tienen en cuenta las dimensiones sociales y educativas de su profesión y que, por tanto, no se consideran a sí mismos como educadores matemáticos. Esto no modifica las necesidades y funciones a los que debe satisfacer, pero sí es posible que la calidad de sus actuaciones quede profundamente disminuida, entendiendo en este caso por calidad no solamente el dominio de destrezas por parte de los alumnos, sino la comprensión conceptual, el desarrollo de estrategias y la adquisición de actitudes positivas hacia las matemáticas. En este nivel una aportación sociológica relevante es la relativa al proceso de concienciación de un educador matemático, tal y como la ponen de manifiesto Abraham y Bibby.[126]

[126] Abraham J. y Bibby N. (1988). Obra citada.

En el diagrama vemos las distintas fases en el mencionado proceso así como las consideraciones sociológicas que intervienen.

También hemos comentado en otros apartados del Proyecto los estudios e investigaciones realizados sobre diferencias relativas al género, clase social o cultura en el rendimiento en matemáticas. Quizás sea este el campo de aportaciones de la Sociología de la Educación más conocido y desarrollado en Educación Matemática, razón por la que no vamos a reiterar aquí las ideas y argumentos ya presentados anteriormente.

Finalmente, consideraremos el **nivel microsociológico**. En este nivel se estudia lo que sucede en la escuela, colegio o centro educativo, qué pasa en las aulas, seminarios, sala de profesores, junta de evaluación y patios. Se trata en este caso de la disciplina denominada Sociología del Centro Escolar, que estudia este ámbito particular, su relación con el medio social, la relación entre los estamentos, la organización y dotación de profesorado, la organización y dotación de infraestructura y materiales, etc. La Sociología del Centro Escolar trata de responder a cuestiones como las siguientes:

¿qué tipo de profesorado se necesita en los centros?

¿qué composición, según sus diferentes formaciones y competencias, deben componer básicamente la dotación de un centro escolar?

¿se dan algunas formas de diferenciación relativas a los conocimientos por grupos de edad, género o procedencia social?

Algunas de estas cuestiones han sido tratadas en el ámbito de la Educación Matemática. Así, en la ya mencionada obra de Howson, Keitel y Kilpatrick, se hace un análisis de las estrategias educativas usuales para modificar las actitudes, técnicas y valores del profesorado, con el fin de orientarlos hacia un determinado tipo de modelo de actuación. Los mencionados autores distinguen tres tipos de estrategias; a las primeras las denominan estrategias de poder coercitivo y en ellas se considera al profesor como carente de autonomía y, simplemente, al servicio de las programaciones hechas por los especialistas y técnicos cualificados. Las segundas las denominan estrategias de presiones, y en ellas se considera a los profesores como semiautónomos y manipulables. El tercer tipo de estrategias son las denominadas racionales y educativas, en ellas el profesorado se considera formado por profesionales cualificados y con capacidad de decisión. A partir de estas categorías los autores mencionados analizan los distintos papeles que puede desempeñar un profesor de matemáticas dentro del Sistema Escolar. Llegaron a considerar que el papel del Profesor no está definido claramente ni de modo único, dependerá de cómo asuma su propio trabajo y de cual sea su talante para que lo podamos considerar en una u otra clase.

Otro análisis en la misma línea es el realizado por Ernest[127] y que está teniendo influencia

[127] Ernest P. (1989). La influencia de las creencias en la enseñanza de las matemáticas, en C. Keitel y P. Damerow (Edts.). Mathematics Education and Society. París: Unesco.

destacable en la formación del Profesorado de Matemáticas en el Reino Unido. En el contexto de reformas en la enseñanza de las matemáticas derivado del Informe Cockcroft, este autor considera que:

"Las reformas en la enseñanza no podrán prosperar a no ser que el profesorado posea profundas convicciones y creencias sobre las matemáticas y sobre los cambios necesarios en su aprendizaje y enseñanza. Más aún, estos cambios en las creencias se asocian con el aumento de la capacidad de reflexión del profesor y de su grado de autonomía. Así, las cosas se puede plantear que la enseñanza de las matemáticas va a depender de una serie de elementos clave, sobre todo:

- *Los contenidos o esquemas mentales del profesor, en particular su conjunto de creencias sobre las matemáticas, su aprendizaje y enseñanza.*
- *El contexto social en el que se desarrolla la enseñanza.*
- *El nivel del profesor en relación con los procesos de pensamiento y de reflexión.*

Es por ello que estos factores determinan el grado de autonomía del profesor de matemáticas, y por ende, el resultado de sus innovaciones en la enseñanza -como lo es la resolución de problemas- que a su vez depende de la autonomía del profesor para que se pueda desarrollar con éxito."

Y, más adelante, continúa:

"los elementos claves que aparecen en el pensamiento del profesor y en sus relaciones con la práctica, desde esta perspectiva, son:

- *El convencimiento de haber adoptado una serie de planteamientos y de asunciones sobre la naturaleza de las matemáticas, así como de su didáctica y aprendizaje.*
- *La capacidad de justificación de tales planteamientos y asunciones.*
- *El conocimiento de la existencia de otras alternativas posibles.*
- *Sensibilidad para el contexto social a la hora de seleccionar y llevar a la práctica determinadas estrategias didácticas y de aprendizaje, que presenten situaciones adecuadas y que sean acordes con sus propios planteamientos.*

- Reflexión: preocuparse de reconciliar y de integrar las prácticas en el aula con aquellas de sus propias creencias con las que pudieran estar en conflicto."

Toda orientación al profesorado teniendo en cuenta las reflexiones anteriores participa considerablemente de instrumentos y conceptos microsociológicos para el estudio de las tareas del profesor de amtemáticas.

Algunas de las aportaciones de especialistas de la denominada escuela francesa de Didáctica de la Matemática tienen una fundamentación sociológica considerable, como es el caso de las realizadas por el Prof. Chevallard. Los planteamientos fuertemente impregnados de estructuralismo, el empleo de una metodología sistémica exhaustiva y excluyente, y el predominio de claves propias de la cultura francesa, hacen de lectura difícil sus trabajos, llegando a correrse el peligro de que partes aisladas de sus estudios se tomen de manera descontextualizada para enmascarar y dotar de respetabilidad teórica a los trabajos realizados por principiantes en el Area de Didáctica de la Matemática. Sería muy conveniente una clarificación teórica en profundidad y unos mecanismos de validación para evitar abusos.

En otro orden de ideas conviene considerar que aunque el aprendizaje de las matemáticas se percibe usualmente como una actividad solitaria, la mayor parte del mismo tiene lugar dentro del aula. Las escuelas son entornos sociales, con muchas personas implicadas en varias relaciones. En el aula, el comportamiento social es una necesidad y los estudiantes que tienen una fuerte habilidad social tienden a actuar mejor. Las metas de la interacción social para los estudiantes pueden ordenarse desde el simple contacto con un compañero hasta alcanzar comportamientos cooperativos complejos con profesores y compañeros. Los compañeros y profesores son potencialmente buenas ayudas en el aula. La eficacia con la que los estudiantes se comunican sus necesidades influirá en el empleo de estas ayudas.

En la clase hay reglas, a veces enunciadas y otras veces no, acerca del tipo de lenguaje que resulta apropiado en situaciones específicas. Situaciones diferentes tienen reglas de participación diferentes. Los estudiantes hablan de manera distinta con sus compañeros que con sus profesores. Hablar con un buen amigo es distinto de hacerlo con un extraño. Hablar fuera del aula es distinto que hablar dentro. Con frecuencia está prohibido hablar en el aula incluso cuando se trata de matemáticas. Los estudiantes que mejor entiendan las reglas de un lenguaje apropiado en el aula tendrán mayores posibilidades de comunicarse efectivamente con sus profesores y compañeros.

Además de su función puramente social las destrezas de comunicación también son importantes para el aprendizaje académico. Los estudiantes que puedan comunicar mejor con sus compañeros y profesores tienen acceso a los recursos más potentes para el aprendizaje académico en el aula y, además, tienen mayor oportunidad de aprender.

Para concluir queremos señalar algunos desafíos que se presentan en el momento actual tanto a la Sociología de la Educación como a la Educación Matemática, y para cuyo estudio será necesario emplear argumentaciones y fundamentaciones teóricas y metodológicas conjuntas.

En primer término nos referimos a los cambios sociales recientes de mayor entidad ocurridos en el entorno de la escuela. El primero de ellos es el debido a la aceleración del cambio tecnológico, la reorganización empresarial y la inestabilidad del mercado de trabajo; no se puede pensar que la escuela prepare a las personas para desempeñar papeles estables en la vida; cabe concebir la escuela como una formación inicial que capacite a las personas para un proceso de readaptación permanente, incluidos sus conocimientos matemáticos.

En segundo lugar, debido a la influencia de los medios de comunicación de masas, la movilidad geográfica y social, y la interpretación cultural, la escuela no es ya la institución que define la realidad de los alumnos; hay una redefinición permanente, a menudo conflictiva, debida a otras ideas y fuentes de información.

Tercero, el crecimiento del desempleo juvenil. Los jóvenes no pueden tener el mismo interés instrumental en la enseñanza cuando su incorporación al mercado de trabajo se ve dificultada. El interés mayor o menor por aprender matemáticas tendrá siempre un componente de aplicabilidad de lo aprendido.

También hay que considerar los cambios importantes producidos en el interior mismo de la escuela. Primero, la prolongación del periodo obligatorio, que supone la retención de los alumnos en los centros cuando se acercan a su madurez física e intelectual y las expectativas de futuro importan tanto como sus condiciones de origen.

Segundo: el acceso de nuevos sectores sociales a niveles de enseñanza de los que antes estaban excluidos conduce a los que pierden su monopolio a buscar nuevas formas de distinción, lo que se manifiesta como expansión de la escuela privada, demanda de diversificación curricular, etc. Conviene estar atentos en este sentido para impedir que el conocimiento matemático sea empleado como criterio discriminador entre alumnos durante el periodo obligatorio de la enseñanza, como ya ha ocurrido en ocasiones anteriores.

Finalmente, hay un nuevo discurso ideológico en el terreno de la teoría y política educativas. Se ha pasado de hablar de igualdad, igualdad de oportunidades, oferta de puestos escolares, etc, a hablar de calidad, excelencia o eficiencia. Esto puede suponer el paso de una preocupación por la educación de todos a una atención centrada en la educación de una minoría presuntamente más dotada. También este discurso tiende a culpar a la escuela de los problemas que encuentran los jóvenes para conseguir empleos estables. El análisis sociológico debe permitir poner de manifiesto las deficiencias estructurales del sistema que provocan las situaciones mencionadas.

Aun cuando pueda parecer que hay muchos puntos de encuentro entre Sociología y Educación Matemática es mucho mayor el campo de posibilidades abiertas esperando un tratamiento y desarrollo sistemáticos. A diferencia de lo que ocurre con las conexiones entre Pedagogía y Educación Matemática, o las que hay con la Psicología, la necesidad de establecer una fundamentación sociológica adecuada a la Didáctica de la Matemática es uno de los retos abiertos más interesantes en nuestra área de conocimiento.

II.3.5. Aportaciones de la Metodología de la Investigación.

Tradicionalmente, los medios que emplea el hombre para alcanzar conocimiento de su medio ambiente y de los fenómenos que ante él se presentan, se clasifican en tres categorías generales: experiencia, razonamiento e investigación. Aunque el conocimiento científico utiliza ampliamente las dos primeras categorías, no cabe duda que es la tercera la que mejor caracteriza el moderno conocimiento científico. La investigación, lo hemos dicho con anterioridad, es la búsqueda sistemática, controlada, empírica y crítica de proposiciones hipotéticas acerca de las relaciones que suponemos entre fenómenos naturales. Se concibe la investigación como el proceso de llegar a soluciones fiables para los problemas a través de la obtención, análisis e interpretación planificadas y sistemáticas de los datos. El término investigación se puede aplicar legítimamente a una variedad de contextos, por ello en este apartado nos vamos a limitar a considerar la investigación educativa. Por investigación educativa se entiende el tipo de indagación dirigido a mejorar el conocimiento en el campo de la educación así como a lograr mejoras en el mismo.

La investigación se distingue de la experiencia por tres rasgos particulares. En primer lugar, la investigación es sistemática y controlada, no trata con hechos que se producen por azar o de modo casual. Basa sus operaciones en un modelo hipotético-deductivo, que en términos generales puede describirse así: el investigador trabaja primero inductivamente de observaciones a hipótesis y, despues, deductivamente, desde las hipótesis hasta sus implicaciones con el fin de comprobar su validez; después de revisarlas, y cuando sea necesario, se somenten las hipótesis a ensayos posteriores diseñando pruebas que aporten datos específicos para comprobar o rechazar la validez a nivel empírico. Esta es la segunda característica de la investigación: es empírica. Y en tercer lugar, la investigación es autocorrectora. El método científico no sólo cuenta con mecanismos incorporados para proteger al científico del error, tanto como sea humanamente posible, sino que los procedimientos y resultados están abiertos al examen público de los colegas profesionales.

La investigación educativa se ha enfrentado con problemas epistemológico-conceptuales derivados de las diferentes consideraciones en relación con las ciencias sociales. Una consideración primitiva, pero aún vigente, sostiene que las ciencias sociales son, en esencia, como las ciencias naturales y por tanto hay que tratar de descubrir las leyes naturales y universales que regulan y determinan el comportamiento humano sobre la base de la experiencia y la naturaleza única y personal del conocimiento, destaca el carácter humano y, en particular, la relación entre los seres humanos y su entorno. Un problema destacable en la investigación educativa es el denominado de la autonomía-dependencia.

"Por una parte la investigación educativa toma prestados conceptos y métodos de otras ciencias: naturales, médicas en tanto que clínico-experimentales; del comportamiento individual y psicosocial; del funcionamiento social y específicamente organizativo; de la filosofía, la historia y la antropología; de las ciencias y tecnologías congitivas; de la estadística y de la tecnología de la evaluación, etc. Pero por otra parte, se reconocen unas exigencias específicas del proceso educativo, que imponen condicionamientos en la investigación, relacionados con la imposibilidad de aplicar radicalmente el control de la investigación natural, de laboratorio, en el análisis y medida de las situaciones educativas. En consecuencia, la investigación educativa tiende a producir generalizaciones intermedias como solución de compromiso entre la necesidad de superar las meramente descriptivas y la extrema dificultad de formular y verificar generalizaciones teoréticas"[128]

Los planteamientos epistemológicos tienen implicaciones directas sobre cuestiones metodológicas. Cuando se considera el mundo social como semejante al mundo natural - como una realidad dura, externa y objetiva, entonces la investigación científica se dirige a analizar las relaciones y regularidades entre elementos destacables de ese mundo y el método será predominantemente, cuantitativo. Los temas metodológicos de importancia son, en este caso, los conceptos por sí mismos, su medida y la identificación de los temas subyacentes. Esta perspectiva se expresa más fuertemente en una búsqueda de leyes universales que expliquen y gobiernen la realidad que se está observando.

Sin embargo, si se favorece la visión alternativa de la realidad social que acentúa la importancia de la experiencia subjetiva de los individuos en la creación del mundo social, entonces la búsqueda se enfoca sobre temas diferentes y aproximaciones diversas. La preocupación principal está en entender el modo en que el individuo crea, modifica e interpreta el mundo en el que se encuentra. Ahora el método adopta un aspecto cualitativo, aun cuando no abandone la información cuantitativa.

[128] Santillana (1991). Tecnología de la Educación. Léxicos Ciencias de la Educación. Madrid: Santillana.

Cada una de las dos perspectivas en el estudio del comportamiento humano tiene profundas implicaciones para la investigación educativa, para el estudio de aulas y escuelas. La elección del problema, la formulación de las cuestiones para responder, la caracterización de alumnos y maestros, las inquietudes metodológicas, las clases de datos buscados y su modo de tratarlos, todo esto se ve influido por el punto de vista con el que se contempla.

Tres son los métodos generales utilizados hoy día en investiación educativa: el método experimental, el método de encuestas y el método observacional. Aunque estos tres métodos no tienen ni han tenido el mismo peso en la investigación en Educación Matemática, todos ellos se emplean productivamente en el momento actual, razón por la que vamos a hacer una breve descripción de sus características más importantes.

Métodos experimentales, en sentido estricto son los enfoques de investigación científica basados en el uso del experimento. El experimento implica manipulación y control de una o más variables independientes y observar las variaciones concomitantes que se producen en las variables dependientes y la aleatorización del proceso de selección y asignación de sujetos a los distintos grupos experimentales. Esquemáticamente, podemos señalar las siguientes etapas en la realización de una investigación y la organización científica del conocimiento con este método:

"1. Definición del problema a estudiar e identificación de los fenómenos que se van a considerar.
2. Observación, en la que se identificarán y etiquetarán los factores, variables y elementos relevantes y donde se desarrollaran categorías y taxonomías.
3. Investigación correlacional, en la que se relacionan variables y parámetros entre sí y la información se integra sistemáticamente.
4. Manipulación sistemática y controlada de variables para ver si los experimentos pueden producir los resultados esperados, desplazándose así de la correlación a la causalidad.
5. Establecimiento de un cuerpo teórico según se acumulan resultados de los primeros pasos. Dependiendo de la naturaleza de los fenómenos a examen, pueden formularse y sistematizarse leyes.

6. Empleo del cuerpo establecido de teoría para la resolución de problemas o como fuente de hipótesis posteriores"[129]

La estructura básica del método experimental es simple:

i) se enuncia la hipótesis: si p entonces q.
ii) se elige y utiliza un método adecuado para manipular p.
iii) se observa si ocurre la variación concomitante en q, es decir, la variación esperada o prevista como consecuencia de la variación producida en p.
iv) si sucede lo anterior, se considera como evidencia suficiente de la validez de la proposición "si p entonces q".

Método de encuestas, es la metodología de investigación que estudia poblaciones grandes y pequeñas mediante la selección y análisis de muestras, para conocer la frecuencia, la distribución e interrelaciones de variables psicológcias y sociológicas a partir de la información recogida en las encuestas aplicadas a los sujetos que forman la muestra. La información que recogen las encuestas es de dos tipos:

i) variables sociológicas, como la edad, el sexo, nivel socioeconómico y otras;
ii) variables directamente relacionadas con los hechos que interesa conocer al investigador:
opiniones, actitudes, preferencias y conductas.

El método de encuesta utiliza como técnica de recogida de información tanto la entrevista personal estructurada o semiestructurada - como el cuestionario.

Los pasos que siguen en el método de encuestas son, esquemáticamente, los siguientes:

1. Definir los objetivos de la encuesta y deducir la información necesaria.
2. Definir la población objeto de estudio.
3. Establecer los recursos disponibles.
4. Elegir la técnica de encuesta y diseñar el cuestionario.

---

[129] Cohen L. & Manion L. (1990). Métodos de investigación educativa. Madrid: La Muralla.

5. Planificar el método de análisis de datos.
6. Realizar una prueba piloto y revisar el instrumento.
7. Seleccionar la muestra de sujetos y realizar la encuesta.
8. Codificar los datos.
9. Tabular y analizar los resultados.
10. Elaboración del informe.

Metodología observacional: *"observar es advertir los hechos como espontáneamente se presentan y consignarlos por escrito; en primer lugar se perciben los hechos, los cuales, después, se expresan mediante palabras, signos u otros hechos; el fundamento de la observación científica reside en la comprobación del fenómeno que se tiene frente a la vista, con la única preocupación de evitar y precaver los errores de observación que podrían alterar la percepción de un un fenómeno o su correcta expresión""*[130]

Observación científica es aquella que utiliza hipótesis expresas y manifiestas; el observador se distingue de un testigo ordinario, en que éste no intenta llegar al diagnóstico de los hechos y, además, en que muchos de los sucesos le pasan desapercibidos.

La observación se convierte en técnica científica en la medida en que:

"1. Sirve a un objetivo ya formulado de investigación.
2. Es planificada sistemáticamente.
3. Es controlada y relacionada con proposiciones más generales, en vez de ser presentada como una serie de curiosidades.
4. Está sujeta a comprobaciones de validez y fiabilidad"[131]

Las técnicas más usuales de observación son: las listas de control, los registros de

[130] Anguera T. (1989). Metodología de la observación en las Ciencias Humanas. Madrid: Cátedra.

[131] Anguera T. Obra citada.

interacción, las escalas de valoración o calificación y los relatos.

Los métodos descritos se pueden utilizar aisladamente o en combinación. Algunos investigadores comienzan siempre con el supuesto de que su tarea consiste en relacionar, experimental o descriptivamente, las variaciones observadas por medición en el rendimiento o las actitudes de los alumnos con las variaciones en la conducta observada de los enseñantes.

Otros especialistas se centran en formulaciones diferentes, que pueden incluir el discurso en el aula, las cogniciones del maestro, el sentido que los alumnos le dan a la instrucción, o la organización social de las aulas a través de las estructuras de trabajo.

Una vez comprometido con determinada línea de investigación, el estudioso rara vez se desvía de ella. Se ha adoptado un programa de investigación.

Tres son los programas de investigación educativa predominantes hoy en día: el programa normativo o proceso-producto; el programa naturalista-interpretativo y el programa crítico. En el apartado II-2 de este Proyecto, al hacer el recorrido por la historia de la investigación en Educación Matemática vimos el predominio del primer tipo de programas naturalista y crítico y la necesidad de intensificar las investigaciones sobre un mismo tópico utilizando diferentes técnicas y métodos. La disparidad conclusiones no debe ser, en principio, un inconveniente. Kilpatrick[132] asume estas ideas y estimula a trabajar en esta línea:

> *"El desacuerdo entre resultados son datos valiosos para explotarlos; las técnicas cualitativas y cuantitativas deben emplearse mediante una síntesis y la precisión estadística no puede reemplazar a la claridad conceptual. La anécdota podría sugerir que a la vista de resultados en conflicto procedentes de 19 estudios, podría elaborarse un vigésimo trabajo bien diseñado para resolver la cuestión. Siguiendo un camino más serio podemos decir que proporcionando un contexto adecuado para cada estudio un buen compilador*

[132] Kilpatrick J. (1985). Editorial. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 16, nº2.

puede ofrecer un cuadro que ningún estudio individual puede ofrecer. Rechazamos firmemente el mito del estudio singular decisivo".

La metodología de la investigación no tiene interés solamente porque proporciona criterios válidos de conocimiento sobre los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas y una sistemática bien estructurada para obtener y organizar esos conocimientos sino que, mediante los métodos empleados en investigación educativa, establecemos relaciones que influyen en las decisiones sobre la práctica educativa.

Carpenter[133] deja constancia de estas ideas en el debate actual sobre las relaciones entre la investigación y la práctica en Educación Matemática:

"Los paradigmas que utilizamos para estudiar la enseñanza y el aprendizaje se reflejan en cómo pensamos acerca de los estudiantes y la instrucción. Estudios de larga escala diseñados para evaluar la efectividad relativa de diferentes tratamientos instructivos sugieren concepciones diferentes de cómo mejorar la educación que el estudio de casos, dirigido a la comprensión de las causas que subyacen en la conducta de los estudiantes o de los profesores. Por encima de los resultados de estudios específicos, los diferentes paradigmas de investigación articulan diferentes conjuntos de cuestiones y sirven para dar forma al debate sobre cómo cambiar la educación por diferentes caminos.

Sería forzar mucho la cuestión el decir que nuestras concepciones de las cuestiones importantes en educación matemática están dirigidas por la investigación, pero la investigación juega un papel importante al conformar nuestros pensamientos. Este papel es minusvalorado cuando se considera la contribución de la investigación educativa."

La metodología de la investigación educativa ha evolucionado muy rápidamente en los últimos años, desde un predominio exclusivo de las técnicas cuantitativas y un peso considerable de los estudios correlacionales, hasta los diseños cuasi-experimentales, la

[133] Carpenter T. (1990). Editorial. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 21, nº3.

investigación en la acción, los métodos etnográficos y el empleo del análisis factorial, que se están comenzando a desarrollar sistemáticamente en Educación Matemática. Sin que consideremos la metodología de la investigación como un factor determinante en la fundamentación de nuestra área de conocimiento, no cabe duda que la consolidación de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica va a depender ineludiblemente de un empleo adecuado de los diversos métodos y técnicas de investigación en educación para producir, obtener y organizar conocimientos válidos en este campo. La metodología de la investigación ha realizado ya aportaciones considerables a la Educación Matemática, pero el campo de posibilidades abierto es aún mucho mayor.

III. PLAN PARA LA FORMACION INICIAL DE PROFESORES EN LA ESPECIALIDAD DE METODOLOGIA DE LA LICENCIATURA DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD DE GRANADA. ASIGNATURAS DEL AREA DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA.[134]

III.1. PLAN PARA LA FORMACION INICIAL DE PROFESORES DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD DE GRANADA.

III.1.1. Situación actual de la formación inicial del Profesorado.

Para ejercer la docencia en los Centros de Enseñanza Secundaria, Bachillerato o Formación Profesional como Profesor de Matemáticas es necesario estar en posesión del título de Licenciado, Arquitecto o Ingeniero, o estar en posesión de un título equivalente a efectos de docencia.

> *"Para impartir las enseñanzas de la Educación Secundaria será necesario además estar en posesión de un título profesional de especialización didáctica. Este título se obtendrá mediante la realización de un curso de cualificación pedagógica, con una duración mínima de un año académico, que incluirá, en todo caso un periodo de prácticas docentes.*
>
> *Para impartir el bachillerato se exigirán las mismas titulaciones y la*

[134]Capitulo III del Prpyecto Docente del Prof. L. Rico para el Concurso a Cátedra de Universidad. 1992

misma cualificación pedagógica que las requeridas para la educación secundaria obligatoria.

Para la formación profesional específica se exigiran los mismos requisitos de titulación que para la educación secundaria." [135]

Estas son las condiciones recientemente establecidas por la LOGSE, aún sin desarrollar, para el ejercicio de la docencia en los niveles de Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional. Estos planteamientos no resultan innovadores, continúan la línea ya iniciada en 1970 por la Ley General de Educación, que establecía que el Profesorado de Bachillerato debía reunir las siguientes condiciones:

"Primero: titulación mínima de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto;

Segundo: una formación adecuada a cargo de los Institutos de Ciencias de la Educación, obtenida despues de la titulación científica mediante cursos intensivos desarrollados en los mencionados Institutos." [136]

Desarrollos posteriores establecieron el certificado de Aptitud Pedagógica (CAP), como sistema para habilitar el ejercicio de la docencia en los distintos niveles educativos, mediante cursos específicos a desarrollar en los Institutos de Ciencias de la Educación[137] .

En el momento actual es el Certificado de Aptitud Pedagógica el que permite acceder a la función docente, y por ello vamos a centrar nuestras observaciones sobre él. En la mayoría de las Universidades, el CAP se ha convertido en un trámite formal, de carácter genérico, desvinculado de la especialización didáctica en las disciplinas correspondientes, y cuya función

---

[135] Boletín Oficial del Estado (1990). Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. BOE nº 238, págs 28927-28942.

[136] Boletín Oficial del Estado (1970). Ley 4/1970 de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa BOE nº 187.

[137] Boletín Oficial del Estado (1971). Orden de 14 de julio de 1971 sobre clasificación de las actividades docentes de los Institutos de Ciencias de la Educación. BOE nº 176 de 26-VII-71.

orientativa e informadora se resume en una primera toma de contacto con la práctica docente bajo la supervisión de un tutor. La oferta que, actualmente, hace la Universidad para la formación inicial del Profesorado de Enseñanzas Medias está centrada en la obtención del título correspondiente de Licenciado, Arquitecto o Ingeniero, que es el que realmente habilita para ejercer la docencia en Secundaria y Bachillerato. La formación del licenciado tiene como meta lograr el dominio conceptual y metodológico sobre las disciplinas que configuran cada titulación; la preparación del licenciado no incluye, por lo general, ninguna materia didáctica ni otros componentes para su formación inicial como Profesor. En la orientación profesional que la Universidad oferta en las diferentes licenciaturas no es usual incluir ninguna referencia a futuras actuaciones docentes. Como formación post-grado aparecen los Cursos de Aptitud Pedagógica antes mencionados.

El plan de formación inicial vigente en el momento actual adolece, a nuestro juicio, de las siguiente deficiencias:

1º. Los Cursos de Aptitud Pedagógica se sitúan al margen de la Organización Docente de la Universidad ya que no aparecen adscritos a Departamentos concretos, no se consideran dentro de la carga Docente de los mismos y no forman -por tanto- parte de la enseñanza reglada. En la estructura actual de los estudios universitarios, los Cursos de Aptitud Pedagógica mantienen un status especial, diferente de la enseñanza reglada y de las titulaciones propias de cada Universidad que es expresión, a nuestro entender, de un escaso interés institucional de la Universidad por la formación inicial del Profesorado de Secundaria y Bachillerato en el campo de la Didáctica.

2º. Como consecuencia de lo anterior puede afirmarse que los mencionados cursos están dirigidos a satisfacer principalmente las necesidades formales impuestas por la ley. Ni la estructura de los cursos, ni sus contenidos, ni su duración, ni los resultados - conocimientos y destrezas- que se logran a su conclusión, responden a las necesidades reales de formación inicial del Profesorado, al menos en el caso del Profesorado de Matemáticas.

En el capítulo anterior de este Proyecto hemos visto la complejidad de problemas que se presentan en el campo de la Educación Matemática; la diversidad de estudios e investigaciones, realizados o en curso, que se han abordado para resolver o clarificar algunos de estos problemas; también hemos considerado algunos de los marcos teóricos y metodológicos que permiten organizar, interpretar y hacer propuestas en relación con los problemas indicados. Ninguno de los Cursos de Aptitud Pedagógica diseñados para la capacitación pedagógica del Profesor de Matemáticas está en condiciones de ofrecer formación en estas materias y conocimientos, al menos en los conocidos por nosotros.

3º. Causa destacable de las deficiencias del sistema actual es la desvinculación de los Cursos de Aptitud Pedagógica de las Didácticas de las disciplinas correspondientes. El esquema sobre el que están diseñados los cursos da por supuestas la preparación científica del profesor en formación en su disciplina junto con un desconocimiento pedagógico; por ello se limita a proporcionar unas consideraciones genéricas sobre Teoría de la Educación, Pedagogía y Didáctica General, junto con unas sesiones de prácticas docentes. La conexión entre el conocimiento de la disciplina, Matemáticas en nuestro caso, y los procesos de su enseñanza y aprendizaje, todo el campo de la Didáctica de la Matemática, quedan excluidos de los Cursos de Aptitud Pedagógica. Se crea de esta manera un desnivel formativo e informativo insuperable entre las competencias científicas del profesor en formación y sus competencias profesionales, con consecuencias muy discutibles para el ejercicio de la docencia y para el aprendizaje de los alumnos.

Las condiciones generales establecidas en la LOGSE no suponen una variación significativa en relación con la situación actual. Se establece un título profesional de especialización didáctica, pero no se indica qué institución va a responsabilizarse del mismo; es posible que se obtenga dentro de la Universidad, pero parece claro que va a seguir configurándose mediante cursos de carácter atípico y, en principio, desvinculados de los Departamentos Universitarios. Las dos características afirmativas de este título son su obtención mediante la realización de un curso de un año de duración y la inclusión en el mismo de un periodo de prácticas; pero esto no debe hacernos olvidar que no está definida una troncalidad, que no hay una valoración en créditos o en horas para estos cursos, que no aparece una atribución de responsabilidades, un esquema organizador o una orientación para sus programas ni para la evaluación y promoción de quienes los siguen.

Con estas condiciones no previsible que la futura regulación y desarrollo de la formación inicial del Profesorado supongan un avance y una mejora del marco establecido mediante el Certificado de Aptitud Pedagógica.

III.1.2. Especialidad de Metodología en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada y formación inicial del Profesorado de Matemáticas.

En el apartado I.2.1 de este Proyecto se describió el Plan de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada, las distintas especialidades y la distribución de asignaturas por cursos. Al realizar este análisis observamos las coincidencias entre la Especialidad de Matemática Fundamental y la Especialidad de Metodología, que permite considerar la segunda como una variedad de la primera ya que comparten las asignaturas obligatorias, diferenciándose en que las opcionalidades de la primera se convierten en un grupo fijo de materias de orientación Didáctica para la segunda. Además de esta diferencia queremos destacar otro dato: la Especialidad de Matemática Fundamental se desarrolla mediante 8 asignaturas que necesitan de 40 horas semanales durante dos cursos; la Especialidad de Metodología se desarrolla mediante 11 asignaturas que necesitan de 45 horas semanales durante dos cursos.

Reiteramos así nuestra opinión de que la Especialidad de Metodología es una opción de Matemáticas Fundamentales, con una orientación específica hacia la Didáctica que se concreta en las cuatro asignaturas propias de la Especialidad:

Supuestos de la Educación.
Métodos Estadísticos aplicados a la Educación.
Didáctica de la Matemática en el Bachillerato.
Prácticas de Enseñanza en Instituto.

Los alumnos que realizan esta Especialidad no necesitan cursar el CAP ya que, automáticamente, se les convalida. De este modo compensan el excedente de asignaturas y horas de clase semanales que tienen en relación con sus compañeros de Matemáticas Fundamentales.

Queda claro que la Universidad de Granada ofrece a los licenciados en Matemáticas dos posibilidades distintas para su formación inicial como Profesores: la opción general del Certificado de Aptitud Pedagógica y la opción particular de la Especialidad de Metodología.

En este sentido hay que considerar que una de las prioridades de esta Especialidad consiste en atender a la preparación de los estudiantes de Segundo Ciclo de la Licenciatura de

Matemáticas como Profesores en formación. Las cuatro asignaturas específicas constituyen el núcleo de esa preparación y cada una de ellas aporta un componente diferenciado. La asignatura Supuestos de la Educación proporciona la base teórica que incluye componentes axiológicos, reflexiones filosóficas, planteamientos epistemológicos e información sobre el desarrollo histórico de la educación. También informa sobre movimientos educativos, sus fundamentaciones, los modelos educativos existentes en nuestra sociedad y los esquemas de su organización y desarrollo. Esta Asignatura está adscrita al Departamento de Pedagogía.

La asignatura Métodos Estadísticos aplicados a la Educación aporta conocimientos necesarios para el estudio e investigación en Educación Matemática, así como el fundamento de tales conocimientos. El desarrollo metodológico en Ciencias de la Educación ha experimentado un fuerte crecimiento en los últimos años, motivo por el que una Asignatura que introduzca al Profesor en formación en este campo resulta de especial interés. Esta Asignatura está adscrita al Departamento de Estadística e Investigación Operativa.

La Asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato proporciona al Profesor en formación un conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas dentro del Sistema Educativo en sus etapas Obligatorias y Postobligatorias, sobre la transmisión y aprendizaje de conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas, sobre la detección y tratamiento de errores, organización de contenidos, alternativas metodológicas, evaluación de los aprendizajes y, en general, sobre los sistemas conceptuales construidos para el estudio de los problemas derivados de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

La Asignatura Prácticas de Enseñanza en Instituto aporta el contacto con el aula y con los alumnos, permite controlar y valorar la utilidad de los planteamientos teóricos, aporta la dimensión del conocimiento directo y las limitaciones de la realización de los programas; esta materia proporciona información directa sobre los Centros de Secundaria, los Seminarios de Profesores y sus dinámicas de trabajo, ofrece un espacio para la puesta en práctica de las Programaciones y Diseños de Unidades Didácticas y para el análisis y revisión de las actuaciones del Profesor en el aula. Estas dos Asignaturas se encuentran adscritas al Departamento de Didáctica de la Matemática.

Las cuatro materias, conjuntamente, contribuyen a la formación inicial del Profesor de Matemáticas, que es una de las funciones que se logran mediante esta especialidad. Es posible señalar algunas deficiencias importantes en la configuración de la especialidad de Metodología, pero no cabe duda que, comparativamente con el sistema establecido por el CAP, el plan de formación inicial de Profesores de Matemáticas que proporciona esta Especialidad presenta ventajas incontestables. Vamos a señalar algunas de ellas.

En primer lugar, las materias están adscritas a Departamentos Universitarios y, por tanto, están sometidas a un control académico en la elaboración y revisión de Programas, en la realización de prácticas y en el sistema de evaluación para los alumnos; por otra parte no son una responsabilidad complementaria para un profesor concreto objeto de un contrato temporal, sino que entran dentro de la carga docente global cuya responsabilidad compete a todos los miembros del Departamento, lo que proporciona estabilidad y continuidad en el tratamiento de las materias.

En segundo lugar, al formar parte de la enseñanza reglada, estas asignaturas están sometidas al control organizativo general y aparecen dentro de los planes y organizaciones docentes de la Facultad y de los Departamentos; cada asignatura tiene un horario semanal, de carácter regular para todo el curso.

En tercer lugar, los Programas elaborados por el Departamento forman parte de un plan conjunto de formación, han sido remitidos a la Comisión Docente de la Facultad y evaluados por la misma; son publicados por la Facultad y sometidos a los controles y revisiones periódicas establecidos con carácter institucional.

La coincidencia y simultaneidad de esta formación profesional inicial con el segundo ciclo de formación en disciplinas matemáticas, pese a la ausencia casi total de conexión entre ambas, nos parece ventajosa ya que permite recibir formación e información de ambos campos y obliga al profesor en formación a realizar una reflexión y algún tipo de integración entre ambas orientaciones.

También la especialidad de Metodología, a nuestro entender, proporciona a los futuros licenciados en Matemáticas una formación adecuada sobre el amplio campo de trabajo que organiza, estudia e investiga la disciplina que venimos denominando Didáctica de la Matemática. Esta función se realiza muy deficientemente en el momento actual. Sin embargo entendemos que, incluso para los licenciados que no se van a dedicar a la docencia, es un conocimiento útil y necesario ya que la Didáctica de la Matemática forma parte destacable de esa gran corriente de pensamiento que, por un lado, promueve y sostiene el conocimiento matemático y que, por otro, entra dentro del campo de actuación derivado de la necesidad de comunicar y transmitir los logros y producciones matemáticas, antiguos o nuevos.

El desconocimiento casi absoluto que sobre Didáctica de la Matemática tienen hoy día la mayor parte de los licenciados en matemáticas entendemos que no es beneficioso para la extensión y difusión de una cultura matemática en nuestra sociedad; para captar, interesar e ilusionar a los jóvenes en el estudio y profundización de las matemáticas; ni para mejorar la capacidad de comunicación profesional de cualquier titulado en matemáticas.

III.1.3. Nuevo marco legal y necesidades derivadas.

El momento actual se caracteriza, por lo que a formación inicial del Profesorado se refiere, por dos datos determinantes. En primer lugar la transformación en curso de los niveles de Educación Infantil, Primaria, Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional derivados de la reforma que se establece en la LOGSE. Esta transformación va acompañada de unas nuevas metas generales para cada uno de los niveles, que determinan nuevos diseños curriculares, nuevos programas y orientaciones docentes y, lo que es más importante, nuevos perfiles y necesidades profesionales, que demandan un tipo de formación más completo, sistemático y profundo para el Profesorado.

En segundo lugar, la elaboración de nuevos planes de estudios para las titulaciones y carreras universitarias, con lo que se trata de agilizar y modernizar la organización de los estudios universitarios[138] . Rasgos característicos de la ordenación y estructura del nuevo sistema son la delimitación por créditos de las titulaciones y de las disciplinas; el establecimiento de un grupo reducido de materias troncales que permiten un amplio margen para la autonomía de cada Universidad, de cada Centro e, incluso de cada alumno, incorporando la idea de currículo autodiseñado; la división en ciclos, la potenciación de carreras de ciclo corto con pasarelas a otras titulaciones e, incluso, entre titulaciones diferentes; la necesidad de una actualización y

---

[138] Boletín Oficial del Estado (1987). Real Decreto 1497/1987 de 27 de noviembre, por el que se establecen las Directrices Generales de los Planes de Estudio y de los Títulos Universitarios de carácter Oficial y validez en todo el territorio nacional. BOE nº 298 de 14 de diciembre.

formación permanentes, con la realización de cursos de ampliación, programas de tercer ciclo, programas de experto o master u obtención de titulaciones propias de cada universidad, la necesaria potenciación de las características específicas y los equipos docentes e investigadores más prestigiosos.

Con este marco general de referencia, cada Universidad debe promocionar aquellos estudios en los que puede hacer una oferta de calidad autóctona y diferenciada. Por ello, entendemos que en la Universidad de Granada se dan las condiciones para promover y desarrollar un plan de Formación de Profesorado de Matemáticas, cuya etapa inicial debiera constituir una Especialidad dentro de la nueva Licenciatura de Matemáticas, cuya denominación más adecuada, en el momento actual, nos parece que debiera ser Especialidad de Educación Matemática.

No consideramos aquí asignaturas troncales propias del título de Licenciado en Matemáticas ni la oferta de asignaturas optativas que en todo caso debieran ajustarse a lo establecido en el Real Decreto que regula el título de Licenciado en Matemáticas[139] . Nuestro diseño y propuesta para las asignaturas específicas de esta Especialidad, es como sigue:

TERCER CURSO

Supuestos de la Educación...8 créditos.

Psicología cognitiva.. ....10 créditos.

Fundamentos culturales y sociológicos de la Educación Matemática.....8 créditos.

Modelización Matemática... ...8 créditos.

CUARTO CURSO

Currículo de matemáticas en Educación Secundaria..........................8 créditos.

Métodos estadísticos aplicados a la Educación............................... 8 créditos.

Historia de la Matemática y de la Educación Matemática..................... 6 créditos.

Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas................ 8 créditos.

[139] Boletín Oficial del Estado (1990). Real Decreto 1416/1990 de 26 de octubre, por el que se establece el título universitario oficial de Licenciado en Matemáticas. BOE nº 278, 20-XI-90, págs 34342-34343.

QUINTO CURSO

Teoría de la Educación Matemática... 8 créditos.

Currículo de matemáticas en Bachillerato....................................... 8 créditos.

Creación matemática y resolución de problemas.............................. 6 créditos.

Prácticas de enseñanza.. 10 créditos.

En resumen:

Si a estos 96 créditos de Especialidad se añaden los 45 de troncalidad, establecidos por el Real Decreto, dan un total de 141 créditos; queda así un margen de, al menos 40 créditos para completar la formación de los futuros licenciados en Matemáticas por esta Especialidad.

Esta opción nos parece que cubre de manera óptima la formación específica de un Profesor de Matemáticas y ofrece un complemento adecuado a su preparación matemática. Con ella se quiere hacer una aportación al objetivo marcado por los Organos de Gobierno de la Universidad de Granada:

> *"conseguir unos estudios que tengan la adecuación, calidad y carácter que corresponde a la Universidad de Granada, acordes con nuestras posibilidades actuales y que a su vez supongan una apuesta de futuro"*[140]

Aún cuando sabemos que las condiciones actuales no van a permitir un desarrollo completo de esta propuesta, estamos convencidos de que todo avance en la línea de profesionalización del Profesor de Matemáticas pasa por desarrollar una formación psicodidáctica profunda, simultáneamente con su formación matemática, y creando puentes de conexión y reflexión didáctica entre los dos campos. Esa dirección de dominio profesional pasará necesariamente, cuando se alcance, por un currículo de formación no muy diferente del que aquí presentamos.

---

[140] Boletín Informativo de la Universidad de Granada (1991). Monográfico Planes de Estudio. Nº 38. Secretario de Comunicación y Documentacion. Universidad de Granada.

Una condición importante de nuestra propuesta incluye la convalidación automática del Curso para la especilización didáctica establecido en el Artículo 24.2 de la LOGSE.

La situación actual de cambio en los planes de estudios junto con las necesidades derivadas de la nueva estructura del Sistema Educativo ofrecen una oportunidad importante para avanzar en esta línea, que no se debiera desaprovechar.

III.1.4. Las Asignaturas de Didáctica de la Matemática en el Plan de estudios actual.

Volviendo a la situación presente y dejando las propuestas anteriores como un esquema sobre el que tendremos que trabajar reiteradamente para convertirlo en un plan viable, hemos de considerar las Asignaturas adscritas al Departamento en el Plan de Estudios aún vigente. Aún cuando no las consideremos como la mejor alternativa, ni siquiera como una opción a la que haya que limitarse en el futuro, no cabe duda que (como ya hemos considerado) la Especialidad de Metodología de la Licenciatura de Matemáticas presenta una opción cualitativamente más completa que el Certificado de Aptitud Pedagógica, en relación con la formación inicial de Profesores de matemáticas.

En lo que sigue vamos a presentar nuestra propuesta de Programa para las dos Asignaturas mencionadas: Didáctica de la Matemática en el Bachillerato y Prácticas de Enseñanza en Institutos.

Hemos limitado nuestros Programas a estas dos asignaturas por una cuestión de coherencia y honestidad: son estas dos materias las que hemos venido impartiendo en estos últimos cursos y su conocimiento no es únicamente teórico y especulativo. Conocemos las necesidades y problemas que se plantean en el trabajo con ambas; nuestras propuestas no se limitan a un listado de contenidos sino que se señalan unas líneas metodológicas y para la evaluación, se establecen conexiones entre ambas y entre los diferentes temas enumerados. Toda afirmación o propuesta viene respaldada por la práctica y ha sido contrastada previamente. Muchas de las ideas que nos han llevado a proponer el plan del apartado anterior se han obtenido de la experiencia con estas dos materias en los últimos años, pero hemos preferido mantener su unidad y desarrollarlas en extenso y con detalle en vez de abrir nuevos programas, cuya organización pudiera resultar excesivamente teórica y desvinculada de su realización y puesta en práctica en el aula.

Esta es la opción que desarrollamos ampliamente en lo que sigue. No obstante hemos asumido una serie de limitaciones que queremos comentar.

La primera limitación exige presentar Programas viables que puedan llevarse a cabo en el tiempo y condiciones realmente disponibles. Ya hemos señalado que el campo de necesidades es muy amplio. Por ello mismo, cabe la tentación de intentar introducir a pequeña escala todos los conocimientos en las dos asignaturas existentes en el Plan de Estudios. Hemos reunido este planteamiento y nos hemos centrado en cada caso en los contenidos específicos que mejor responden, a nuestro juicio, a los objetivos de cada Asignatura.

Estas consideraciones nos han llevado a centrarnos en los intereses que la Didáctica de la Matemática tiene para el Profesor de Enseñanza Media y a conceder prioridad a los contenidos que, actualmente, aparecen en el Diseño elaborado por el Ministerio de Educación para Secundaria y Bachillerato y su desarrollo posterior por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. Aunque defendemos que el conocimiento de la Didáctica de la Matemática debe alcanzar también al nivel universitario, no es este el lugar ni el momento para desarrollar una propuesta en este sentido.

En segundo lugar, queda también fuera del Programa una reflexión extensa sobre las características de las matemáticas escolares para dentro de una o dos décadas, aunque sí se hacen algunas consideraciones en el estudio que se propone sobre las Metas de la Educación Matemática.

Una última limitación de estos Programas procede de su falta de conexiones explícitas con el resto de las Asignaturas que comprenden la Licenciatura de Matemáticas. Las dos materias que proponemos podrían desarrllarse a partir de Tercer Curso, si bien es conveniente que se haya cursado previamente la Asignatura Supuestos de la Educación. Esta falta de conexiones explícitas responde claramente a la propia conceptualización de la Especialidad antes comentada. Conexiones implícitas son, sin embargo, muy frecuentes; cada vez que se comienza el análisis didáctico de un tema del Currículo de Secundaria o Bachillerato para matemáticas, los alumnos de estas asignaturas, que están concluyendo su formación como licenciados en matemáticas, comienzan por recordar sus conocimientos e información relativos a cada uno de los temas.

Los alumnos para los que están diseñados los Programas que a continuación se presentan son alumnos de 5º Curso de la Licenciatura de Matemáticas, con una preparación previa en matemáticas amplia y sólida pero, en su mayor parte, estos Programas podrían trabajarse con alumnos de 3º o 4º Curso de la Licenciatura de Matemáticas e incluso, con alumnos de los dos últimos cursos de la Licenciatura de Físicas. Alumnos sin una formación considerable en matemáticas tendrían dificultades para seguir con provecho estas asignaturas.

Hechas estas reflexiones de carácter general, pasamos a presentar los Programas de las Asignaturas:

*** Didáctica de la Matemática en el Bachillerato.**
*** Prácticas de Enseñanza en Instituto.**

que son las dos materias adscritas al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, de las que componen el Plan de Estudios actual para la Licenciatura de Matemáticas que se imparte en esta Universidad.

III.2. ASIGNATURA: DIDACTICA DE LA MATEMATICA EN EL BACHILLERATO.

III.2.1. Fundamento del Programa:

Ya hemos comentado anteriormente la estructura y organización del Plan de Estudios para la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Granada y, en particular, el correspondiente a su especialidad de Metodología. Parece conveniente retomar los datos que allí se exponen y destacar el hecho siguiente: la formación recibida en el Primer Ciclo de la Licenciatura ha consistido en 30 horas semanales durante tres cursos, en los que se le han impartido 13 materias, todas ellas de especialización matemática, excepto Física General. En cuarto curso el alumno ha empleado 20 horas semanales en 4 asignaturas de especialización matemática y sólo 3 horas en la asignatura Supuestos de Educación. La formación matemática global del alumno que accede a la Asignatura Didáctica de la Matemática en Bachillerato ha tenido un desarrollo previo a lo largo de unas 2750 horas de docencia, mientras que su formación pedagógica se reduce a 75 horas, es decir, un 2% del total. No puede resultar extraño que apreciemos en estos alumnos un desconocimiento abrumador sobre Didáctica de la Matemática, sobre las competencias necesarias para ejercer como Profesor de Matemáticas, sobre las condiciones institucionales y sociales que establecen su campo de trabajo y, en general, sobre las relaciones y medios de comunicación existentes en la comunidad de educadores matemáticos.

Esto lo hemos comprobado varias veces a comienzos de curso con una pequeña encuesta que hemos pasado a los alumnos para valorar el nivel de información de que disponían en una serie de puntos relacionados con el Area. Presentamos la encuesta y los datos obtenidos en los Cursos 88-89, 89-90 y 90-91.

1. Escribe el nombre de las revistas que conozcas sobre Educación Matemática.
2. Escribe el título de los libros que has leido sobre Educación Matemática o relacionados.
3. Escribe el nombre de las Sociedades de Profesores de Matemáticas que conozcas.
4. Nombra los grupos de trabajo en Renovación para Educación Matemática de los que hayas oido hablar.
5. Nombra las Jornadas o Congresos a los que hayas asistido.
6. Valora el número de conferencias que has escuchado sobre Educación Matemática.
7. Valora de 0 a 10 la importancia que concedes a la Formación Pedagógica de un Profesor de Matemáticas.
8. Valora de 0 a 10 la importancia que concedes al trabajo en equipo entre los Profesores de Matemáticas.

Los resultados, en promedio, de cada cuestión en los tres cursos fueron:

La encuesta, que se realiza durante la primera semana de clase, pone de manifiesto que la formación e información previas que tienen los alumnos de la Asignatura de Didáctica de la Matemática es mínima, y que la valoración global que asignan a la preparación pedagógica del Profesor en formación es escasamente de notable.

Mi valoración como profesor de esta materia, en los cinco cursos que la vengo impartiendo, es que nos encontramos con unos alumnos que consideran que el nivel de su formación matemática es más que suficiente para ser Profesores de Matemáticas, que desconocen la existencia de un campo de trabajo denominado Educación Matemática y de las actividades que en él se realizan y que no imaginan otros contenidos para la Didáctica de la Matemática que una colección de recomendaciones generales, trucos y reglas que permitan hacer las clases más activas y agradables. No obstante, su receptividad para recibir información sistemática relativa a Educación Matemática, su capacidad para utilizarla, su interés por conseguir más y mejores conocimientos y por profundizar en los mismos hacen que el desarrollo de la Asignatura permita un considerable avance en esta materia.

Para establecer el programa de esta Asignatura hemos tenido en cuenta: el Plan de Estudios que siguen los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas; las necesidades actuales del Sistema Educativo derivadas de la LOGSE y de la reforma del currículo de Matemáticas en Secundaria; las carencias formativas e informativas de los alumnos que se matriculan en la materia; sus expectativas en relación con la Didáctica de la Matemática; nuestra experiencia profesional con profesores en formación y en activo; y el actual desarrollo de la comunidad de educadores matemáticos en busca de autonomía intelectual y profesional, cada vez más amplia y mejor fundada.

Metas generales de esta asignatura son conseguir una visión global del campo de la

Didáctica de la Matemática y articular el conocimiento matemático sobre los contenidos de la educación secundaria y bachillerato a través de una reflexión didáctica sistemática.

Para cubrir estas dos metas se organiza el programa de la Asignatura en dos bloques temáticos o líneas de desarrollo principales.

En primer lugar, consideramos un estudio de aquellos temas de Didáctica más adecuados para organizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los Centros de Secundaria y Bachillerato: una iniciación a la Teoría Curricular; una información general sobre teorías del Aprendizaje conectadas con el aprendizaje de las matemáticas; una sistematización sobre las condiciones que producen una enseñanza efectiva; y, finalmente, una información sobre las condiciones generales en las que trabajan los profesores, los modos de organización profesional y las actividades de investigación, experimentación o difusión que se realizan sobre las tareas docentes. Con esta línea de trabajo se proporcionan una serie de conocimientos teóricos, informaciones, esquemas organizativos y experiencias prácticas realizadas, que permiten avanzar en su formación a los futuros profesores de matemáticas. Aunque la mayor parte de estos contenidos están tomados de estudios generales de Psicología y Didáctica, es obligada una conexión permanente con las matemáticas, para que tengan sentido y sean útiles. No obstante, los conceptos y métodos que se presentan son psicológicos y pedagógicos, lo cual influye en el modo de trabajo, la bibliografía que se emplea, el modo de exposición, e incluso la propia terminología. Aún cuando es un campo de estudio nuevo en la Licenciatura de Matemáticas tiene un interés evidente para los alumnos de esta materia, que se manifiesta al trabajar con regularidad en sus contenidos.

La segunda línea de desarrollo es complementaria de la anterior. Se trata en este caso de realizar el análisis didáctico de cada uno de los bloques de conocimientos que forman el currículo de matemáticas en la enseñanza secundaria y el bachillerato. Los alumnos de esta asignatura tienen, en su mayoría, un conocimiento exhaustivo de las matemáticas en las que se apoyan los contenidos del programa, pero, incluso cuando no tienen información previa sobre un tema, pueden obtenerla y asimilarla con relativa facilidad y rapidez.

Las limitaciones con las que los alumnos de esta asignatura se encuentran surgen por su falta de información y sistematización para realizar alguna consideración sobre los contenidos, distinta de su organización formal y sus procedimientos deductivos. Los modos de organización posibles para un tópico; los errores y dificultades que se suelen producir; la fenomenología de los conceptos implicados; los estilos de enseñanza adecuados; los problemas de aprendizaje más importantes que se plantean en cada caso; la evolución histórica de cada campo; los materiales y recursos que pueden utilizarse en su estudio; las aplicaciones prácticas; y, seguramente, muchas otras cuestiones importantes para la didáctica de un contenido matemático concreto, forman parte del tipo de trabajo que los profesores de matemáticas en formación deben realizar. En este caso el núcleo central de estudio es el conocimiento matemático, y los instrumentos y técnicas que se emplean son variados y proceden de diversas disciplinas. Algunas de ellas, como la Pedagogía y la Psicología, se han considerado en el apartado anterior; otras son nuevas, pero asequibles desde una formación matemática, como la Filosofía e Historia de las Matemáticas, e incluso la fenomenología didáctica de los contenidos. Hasta no lograr una cierta maestría en la organización didáctica de los temas del programa de matemáticas, el alumno de esta materia no va a sentirse cómodo y seguro en este campo. El progreso en esta parte del programa es mucho más lento que en la parte anterior, ya que se trata de obtener una organización didáctica sobre cada tema de un nivel comparable a su desarrollo formal, lo cual no resulta sencillo en la mayoría de los casos. La variedad de temas incluidos en los programas hacen muy difícil el estudio en profundidad de todos ellos. No obstante, se puede hacer una selección adecuada o un estudio con diferentes niveles, de modo que se contemplen los aspectos más importantes a lo largo del curso, pero debe quedar claro que un estudio completo exigiría más tiempo del asignado a esta materia.

En atención a las dos líneas de desarrollo que hemos comentado, estructuramos el programa de esta Asignatura en dos partes:

A. Fundamentación y marco de referencia.

B. Análisis didáctico y diseño de unidades para los contenidos del Currículo de Educación Secundaria y Bachillerato en Matemáticas.

Cada una de estas partes tiene un desarrollo diferente en temas, y la organización de los temas en cada una responde a un esquema distinto, que se precisará en su presentación.

III.2.2. Programa de la Asignatura.

OBJETIVOS:

1. Establecer fundamentos para el currículo de Matemáticas en la Enseñanza Obligatoria y Bachillerato.
2. Conocer y analizar las diferentes funciones de las matemáticas en el sistema educativo.
3. Contextualizar el aprendizaje matemático según las teorías cognitivas que sirven de fundamento a la educación.
4. Establecer los diferentes elementos, fases y etapas en los que se integra el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de Matemáticas.
5. Estudiar los Programas de Matemáticas en Secundaria y Bachillerato.
6. Conocer los materiales y recursos usuales en la enseñanza de las matemáticas, así como métodos e instrumentos de evaluación.
7. Conectar a los Profesores en Formación con las organizaciones de la comunidad de Educadores Matemáticos y sus medios de comunicación.

CONTENIDOS:

A. Fundamentación y Marco de Referencia:

1. Enseñanza de las matemáticas y sistema educativo.
2. Educación matemática y educadores matemáticos.
3. Currículo de matemáticas en Educación Obligatoria y Bachillerato.
4. Metas generales de la Educación Matemática.
5. Aprendizaje de las matemáticas.
6. Contenidos del currículo de matemáticas.
7. Objetivos de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato.
8. Estilos de enseñanza. Métodos, medios, materiales y recursos.
9. Evaluación en el aula de matemáticas.
10. Resolución de Problemas.

B. Análisis didáctico y diseño de unidades.

11. Números y Operaciones en Educación Secundaria Obligatoria.
12. Iniciación al Algebra.
13. Funciones y representaciones.
14. Estudio y clasificación de los cuerpos en el espacio.
15. Elementos y figuras en el plano. Sistemas de referencia.
16. Transformaciones en el plano.
17. Magnitudes y medida.
18. Estadística.
19. Combinatoria.
20. Probabilidad.
21. Patrones numéricos. Sucesiones. Convergencia.
22. Sistema de los números reales.
23. Funciones. Límites. Continuidad.
24. Derivación.
25. Trigonometría.

26. Estudio y representación de funciones.
27. Resolución de ecuaciones.
28. Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales.
29. Integración.
30. Números complejos.
31. Geometría Analítica en el plano.
32. Geometría Analítica en el espacio.

METODOLOGIA:

Con carácter general, el trabajo en el aula consta de:

* Exposición de elementos relevantes de la bibliografía básica y documentos complementarios.
* Presentación de materiales curriculares, incluidos los instrumentos de evaluación.
* Debate sobre los temas y materiales presentados.

La presentación y exposición del tema o de las cuestiones a debatir la realiza el Profesor, un equipo de alumnos o Profesores invitados para temas específicos.

Se fomenta el trabajo en equipo, promoviendo el análisis y discusión en grupo de los documentos y cuestionarios de trabajo; se promueve la preparación de materiales y redacción conjunta de programaciones.

Los temas y trabajos elaborados por los alumnos se exponen en clase y van seguidos por un debate, dirigido por el Profesor. La asistencia a clase es esencial en esta metodología. Aquellos temas que necesiten de consideraciones metodológicas más detalladas la llevan explícita en su programación.

El trabajo bibliográfico y documental es muy importante en esta materia, por ello, además de las horas de clase, es necesario el uso del horario de tutorías para trabajo de consulta y seminario.

EVALUACION:

A lo largo del curso cada alumno debe:

i. Intervenir en la preparación y redacción de, al menos, cinco documentos de trabajo.
ii. Preparar y desarrollar en clase un tema concreto relativo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
iii. Diseñar un material o recurso didáctico que sirva para el aprendizaje de un tópico.
iv. Programar un tema de matemáticas adecuado para los alumnos de Secundaria o Bachillerato.

Los criterios para la valoración de cada tema concreto están explícitos en su programación.

La evaluación de los alumnos se realiza sobre la base de los cuatro elementos anteriores, considerando que la ausencia de uno de ellos conlleva no superar la evaluación. La irregularidad en la asistencia a clase implica el pase inmediato a una prueba oral final única. La calificación final tendrá en cuenta la participación e intervención de cada alumno en el aula.

CARGA DOCENTE: Tres horas semanales, curso completo.

III.2.3. Desarrollo del Programa. Parte A: Fundamentos y Marco de Referencia.

Hemos ajustado la Programación de cada uno de los temas de esta primera parte a los siguientes puntos:

Título.	**Otros Materiales.**
Objetivo General.	**Actividades.**
Contenidos.	**Metodología.**
Bibliografía Básica.	**Evaluación**

En cada tema aportamos información básica en el listado de contenidos, en la bibliografía básica y en otros materiales. Las actividades que se indican son sugerencias para organizar el trabajo, de las cuales no hay que poner todas en práctica con todos los alumnos; en algunos casos se asignan actividades diferentes a grupos de alumnos distintos, en otros casos se seleccionan algunas de las actividades y se dejan otras sin realizar o quedan como trabajos de ampliación; también puede trabajarse simultáneamente sobre varios temas con una o dos actividades.

El esquema de organización que se propone trata de ofrecer un modelo de diseño curricular a los profesores en formación, por ello está organizado en Objetivos, Contenidos, Metodología y Evaluación; la Bibliografía básica es un dato imprescindible así como la referencia a otros materiales; con las Actividades pretendemos concretar las consideraciones sobre Metodología y Evaluación.

El tiempo correspondiente a esta parte del Programa no debiera superar un cuatrimestre, lo cual da una media de 4 horas lectivas por tema, tiempo realmente escaso e insuficiente para su desarrollo. Sólo esta parte del programa necesita del tiempo asignado a toda la materia, 9 créditos aproximadamente. Las condiciones reales de trabajo obligarán a reducir el desarrollo en algunos casos, a trabajar en algunos aspectos sobre varios temas a la vez, o bien a remitir algunos otros aspectos a la documentación básica. Bajo estas condiciones, debemos procurar que los alumnos dispongan de un esquema general sobre el que se vayan determinando los diferentes aspectos tratados, el grado de desarrollo de cada uno de ellos y las limitaciones o carencias que se produzcan.

Pasamos a la programación de los temas de este apartado:

Tema 1

Título: Enseñanza de las Matemáticas y Sistema Educativo.

Objetivo General: Conocer la estructura y organización general actuales del Sistema Educativo Español y sus antecedentes; conocer las etapas y niveles en los que se enseña matemáticas.

Contenidos:

* Planes de estudio de Enseñanza Media. Antecedentes: 1938, 1953, 1957.
* Ley General de Educación de 1970.
* Plan de estudios de 1975. Curso de Orientación Universitaria de 1978 y Programas de 1988.
* Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo de 1990.
* Ley de Reforma Universitaria de 1983.
* La enseñanza de las matemáticas en las etapas y niveles del Sistema Educativo.

Bibliografía Básica:

B.O.E. (1975); B.O.E. (1978); B.O.E. (1988); L.G.E. (1970); L.O.G.S.E. (1990); L.R.U. (1983); Utan de Igualada (1964).

Otros Materiales:

Libros de texto correspondientes a planes de estudio a partir del año 53, de diversos autores y editoriales aprobados oficialmente por el Ministerio de Educación.

Actividades:

* Explicitar los contenidos de matemáticas de cada plan de estudio por cursos y disciplinas matemáticas.
* Establecer las regularidades observadas en cada plan.
* Señalar las variaciones entre los sucesivos planes de estudio.
* Indicar las discontinuidades que se aprecian entre los distintos niveles del Sistema educativo, en relación con la enseñanza de las matemáticas.

Metodología:

Panorámica del tema en relación con el contenido, las actividades y la búsqueda de bibliografía opcional. Realización en grupo pequeño de las actividades indicadas; presentación en clase del trabajo de los grupos y comparación de los resultados.
Caracterización de la enseñanza de las matemáticas en la actualidad a lo largo del sistema Educativo mediante trabajo de Seminario, con aportación de documentos y bibliografía en cada caso.
Breve valoración individual sobre la enseñanza de las matemáticas actualmente.

Evaluación:

La valoración atenderá a: la participación de cada alumno en las exposiciones y debates en el aula; la capacidad de sintetizar la información de los distintos programas y su organización mediante un esquema, tabla o cuadro; la búsqueda bibliográfica realizada; los trabajos realizados.

Tema 2

Título: Educación Matemática y Educadores Matemáticos.

Objetivo General: Reconocer los valores educativos de las matemáticas en los diferentes niveles del sistema docente; conocer la composición y modos de organización de la comunidad de educadores matemáticos.

Contenidos:

* Las Profesiones que se derivan de las matemáticas. Profesores de Matemáticas.
* La Educación Matemática. Valores educativos de las matemáticas.
* La Comunidad de Educadores Matemáticos.
* Sociedades de Profesores y Comisiones Internacionales.
* Movimientos y Sociedades de Profesores en España. Actividades.
* Infraestructura de servicios profesionales y de coordinación en España.
* Congresos internacionales. Reuniones, encuentros y jornadas en España.
* Difusión de la información: revistas, libros, actas y otros documentos.

Bibliografía Básica:

Balbuena L.(1990); González J. (1991); Hodson, B. (1991); Howson G. (1984);Otte M. (1979); Pérez Fernández J. (1991); Pérez Jiménez A. (1990); Rico L. (1988); Rico L. y Sierra M. (1991); Sierra M. (1990).

Otros Materiales:

Estadística de la Enseñanza en España, niveles de Preescolar, General Básica y Enseñanzas Medias. Anuario Estadística Universitaria. Ejemplares de Actas de Congresos y Jornadas de Educación Matemática. Estatutos de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Disposiciones legales y reglamentos relativos a Departamentos Universitarios, Centros de Profesores y desarrollo de actividades de formación permanente de profesores.

Actividades:

* Explicitar individualmente los valores educativos que se transmiten mediante la enseñanza de las matemáticas, destacando aquellas características formativas que se consideran más importantes. Realizar un debate y elaborar un documento de síntesis en el que se distingan valores específicos en cada uno de los niveles docentes y valores generales. Aportar documentación de apoyo.
* Localizar en las estadísticas del Ministerio datos relativos al profesorado que enseña matemáticas en los diferentes niveles y de los alumnos por nivel. Calcular algunos índices que expresen el grado de atención a la Educación Matemática mediante el sistema escolar.
* Elaborar un breve informe sobre las actividades desarrolladas por una Sociedad de Profesores de Matemáticas o Comisión Internacional.
* Realizar una visita informativa a un Centro de Profesores de la Provincia.

Metodología:

La explicitación de los valores educativos se realizará mediante un trabajo previo individual de búsqueda de documentación y selección de información, seguido de un trabajo en grupo en el que se establezcan criterios para valorar la información obtenida y redactar un documento conjunto.
La obtención de los índices de atención a la educación matemática se hará en grupos pequeños, seguidos de una presentación posterior a la clase.

El resto de los informes se hará también en grupos pequeños pero sobre documentos e informaciones diferentes en cada caso; cada grupo hará solo un trabajo, del que se comunicará el contenido al resto de los grupos.

Evaluación:

Cada alumno realizará tres trabajos, uno individual y dos en grupo pequeño, que servirán para su evaluación. Se valorará también la participación en el debate y redacción del documento inicial común.

Tema 3

Título: Currículo de Matemáticas en Educación Obligatoria y Bachillerato.

Objetivo General: Elaborar un concepto personal de la noción de currículo, de sus elementos y de las relaciones entre ellos; conocer la estructura de Diseños Curriculares Base elaborados por el Ministerio para la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, y la relativa al Area de Matemáticas.

Contenidos:

* Concepciones sobre el currículo.
* Niveles de análisis y elementos del currículo.
* Los procesos de cambio y el desarrollo del currículo.
* Estímulos curriculares para la Educación Matemática.
* Diseño Curricular Base en Educación Secundaria Obligatoria.
* Estructura del Bachillerato y currículo de matemáticas.
* Diseño del Currículo de Matemáticas en la Comunidad Autónoma Andaluza.
* Diseños Curriculares de Matemáticas en otras Comunidades Autónomas.
* Estudio comparativo del Currículo de Matemáticas en España con el de los Paises de las Comunidades Europeas y Estados Unidos.

Bibliografía Básica:

Alonso F. y otros (1987); Howson G. (1979); Howson G. (1991); Howson G., Keitel C. & Kilpatrick J. (1983); Howson G. & Wilson B. (1987); M.E.C. (1989); M.E.C. (1991); Romberg T. (1991); Rico L. (1990); Stenhouse L. (1984).

Otros Materiales:

Diseños de la Junta de Andalucía para el Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato. Diseños del Currículo de Matemáticas de otras Comunidades Autónomas. Revista Suma Nº 8, Monográfico dedicado a los Currículos de Matemáticas. Revista Thales Nº 8, 1ª y 2ª partes. Diseños y documentos curriculares de paises de las Comunidades Europeas y U.S.A.

Actividades:

* Comparar diferentes concepciones de currículo. Distinguir los elementos que se consideran permanentes en las diferentes concepciones.
* Representar mediante un esquema los elementos y relaciones que se consideran relevantes en la propia noción de currículo.
* Distinguir los diferentes niveles de análisis que se pueden considerar sobre un currículo y los componentes que aparecen en cada nivel.
* Estudiar la estructura de los documentos del Ministerio de Educación para el D.C.B. de Secundaria y Bachillerato; hacer un resumen de ambos documentos.
* Estudiar la estructura de los documentos de la Junta de Andalucía para Matemáticas en Secundaria y Bachillerato; resumir sus características principales.
* Conocer los diferentes modelos de Sistema Educativo de los paises de las Comunidades Europeas y U.S.A., señalando las semejanzas y diferencias.
* Conocer los rasgos generales del currículo de matemáticas en los paises antes citados.
* Resumir las características principales de los diferentes estilos de diseños curriculares conocidos para matemáticas.

Metodología:

La noción de currículo y su esquematización se realiza individualmente, previa lectura y comentario en clase de las concepciones de, al menos seis especialistas en el tema. El estudio de los documentos del Ministerio y de la Junta de Andalucía y los resúmenes posteriores se realizarán en pequeño grupo, con exposición posterior en clase. Los diferentes estilos de diseños se presentarán por el profesor en clase. El estudio de los currículos de otros paises y los desarrollos de otras comunidades autónomas se realizará dividiendo los documentos en pequeños grupos e intercambiando la información posteriormente.

Evaluación:

Cada alumno realizará un trabajo individual y dos en pequeño grupo, el primero de los cuales dará lugar a un debate común.

La valoración se realizará sobre los trabajos elaborados, en los que se tendrá en cuenta la capacidad de síntesis y de representación esquemática de la información relevante.

Tema 4

Título: Metas Generales en la Educación Primaria.

Objetivo General: Analizar y clasificar las funciones generales a las que satisface la enseñanza de las matemáticas; reconocer la complejidad cultural de las matemáticas y su incidencia en educación.

Contenidos:

* Concepciones de Cultura. Función de la escuela en la transmisión de la cultura.
* Fundamentación antropológica de la teoría curricular.
* Matemáticas como fundamento de nuestra cultura.
* Historicidad del conocimiento matemático.
* Valores sociales, políticos, económicos y religiosos en conexión con la educación matemática.
* Matemáticas y valores estéticos; conexión con las manifestaciones artísticas.
* Matemáticas y conocimiento; el problema de los fundamentos.
* Las matemáticas en la vida cotidiana.
* Orientación cultural del currículo de matemáticas.

Bibliografía Básica:

Bishop A. (1988); Burton L. (1989); Childe G. (1982); Davis P. y Hersh R. (1988); Ernest P. (1989); Fasheh M. (1989); Geertz C. (1987); Jurdak M. (1989); Murray A. (1982); Pont C. (1984); Racionero L. (1986); Rico L. (1990a); Shapiro H. (1980); Skousmose O. (1990); Spengler O. (1958); Stenhouse L. (1984).

Otros Materiales:
Cualquiera de las manifestaciones humanas culturales puede aportar una selección de materiales sobre los que estudiar la presencia y empleo de conceptos y procedimientos matemáticos. Esta lista de materiales puede hacerse tan extensa como queramos; sugerimos como campos de interés los siguientes: artesanías, dibujo/pintura, arquitectura, diseño, escultura, fotografía, prensa, medios audiovisuales, historia, economía familiar, deportes y competiciones, juegos de mesa, viajes, medio natural, música. Algunos aspectos de esta lista se muestran a través de vídeos.

Actividades:

* Trabajo en gran grupo: lectura individual y discusión colectiva de documentos que ponen de manifiesto la dependencia de las matemáticas actuales de la cultura occidental y las contradicciones que implica para los miembros de otras culturas.
* Trabajos en pequeño grupo: realizar la lectura de un documento en el que se destaquen las relaciones de las matemáticas con una actividad cultural clásica (música, pintura, historia, arquitectura, etc); establecer relaciones entre las matemáticas y una actividad cotidiana (prensa, fotografía, economía doméstica, etc.). En ambos casos, hay que destacar la implicaciones educativas que pueden obtenerse de las relaciones encontradas.

Metodología:

Exposición teórica de la fundamentación antropológica sobre los aspectos profundamente culturales del conocimiento y la actividad

matemáticas. Presentación de diversos autores y discusión de los planteamientos realizados.
Debate en grupo de una serie de documentos breves que planteen las conexiones entre matemáticas y religión, política, historia, epistemología, arte y sociología. Cada alumno elaborará un documento con sus conclusiones personales.
Los trabajos en pequeño grupo abordarán parcelas diferentes de las relaciones entre las matemáticas y otros elementos culturales, incluyendo un elemento clásico y otro actual. Los trabajos realizados se presentarán en clase, seguidos de un debate.

Evaluación:

La valoración del alumno considerará la profundidad y sistematicidad de los juicios elaborados en los trabajos propuestos. Se procurará no sobrevalorar los aspectos anecdóticos del uso de las matemáticas en otras realizaciones humanas y se insistirá en destacar los aspectos conceptuales y procedimentales más complejos. El carácter histórico del conocimiento matemático y las implicaciones educativas de las relaciones estudiadas son otros dos datos importantes para evaluar a los alumnos sobre este tema.

Tema 5

Título: Aprendizaje de las matemáticas.

Objetivo General: Proporcionar información sobre las aportaciones de la psicología cognitiva a la explicación de los procesos y etapas mediante los que se adquiere/construye el conocimiento matemático.

Contenidos:
* Funciones de una teoría del aprendizaje.
* El planteamiento asociacionista. El conductismo. Transferencia y jerarquías.

* El planteamiento cognitivo. Las etapas o niveles.
* El constructivismo.
* El modelo del procesamiento de la información. El conocimiento matemático.
* La resolución de problemas.
* Aprendizaje significativo y aprendizaje por descubrimiento.
* Las diferencias individuales.

Bibliografía Básica:
Claxton G. (1987); Davis R. (1984); Fischbein (1990); Gómez B. (1991); Hiebert J. y Lefevre P. (1987); Mayer R. (1985); Mayer R. (1986); Novak J. (1988); Orton A. (1990); Pellegrino J. (1986); Resnick L. & Ford W. (1990); Sternberg R. (1986); Vergnaud G. (1983); Wertheimer M. (1991).

Otros Materiales:
El campo de la psicología cognitiva resulta excesivamente amplio, por un lado, mientras que la información previa de los profesores en formación sobre este campo es muy escasa por no decir inexistente. Los materiales que se emplean deben ir dirigidos a clarificar el esquema interpretativo que ofrece cada teoría, el tipo de cuestiones que aborda, la metodología que emplea y sus resultados más destacables. Por tanto el uso de cuadros y esquemas es un material importante en este tema. Los ejemplos de estudios realizados sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos así como el modo en que las distintas teorías interpretan la resolución de problemas son también materiales importantes.

Actividades:

Dos son las tareas a realizar en este caso: lectura de un libro o capítulo, en el que se trata una teoría general concreta con cierto detalle, y selección de un estudio sobre aprendizaje de un tópico matemático.
Cada una de estas tareas dará lugar a un resumen por escrito, que se presentará en clase.

Metodología:

Las dos actividades de lectura se realizarán en pequeño grupo, junto con la redacción del resumen posterior. La presentación de los trabajos se hará en gran grupo y la discusión y debate hará referencia explícita a las implicaciones educativas que tiene la teoría estudiada y el ejemplo analizado. Se establecerán las conexiones o la forma de interpretar, en cada caso, el conocimiento, el aprendizaje, la memoria, la instrucción, la clase, el libro de texto y otros materiales, el profesor , la motivación, la programación y la evaluación.

Evaluación:

En este tema se valorará la capacidad de resumir los conceptos, supuestos y métodos de la teoría considerada y su expresión mediante cuadros, gráficos y esquemas. El análisis del ejemplo tendrá que destacar las implicaciones educativas posibles del estudio considerado.

Tema 6

Título: Contenidos del Currículo de Matemáticas.

Objetivo General: Conocer los diferentes contenidos matemáticos que forman parte del currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, su clasificación y distribución por cursos o niveles.

Contenidos:

* El problema de la selección de contenidos para el currículo. Grupos de referencia. Organización del currículo en torno a las disciplinas.
* Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas. Actitudes en el aprendizaje de las matemáticas.
* Campos conceptuales en las matemáticas de la Enseñanza Secundaria; esquema de organización.
* Otras organizaciones de las matemáticas de secundaria: documentos de la Junta de Andalucía y otras comunidades autónomas.
* Campos conceptuales en las matemáticas de Bachillerato; organización en las distintas modalidades.
* Documentos de la Junta de Andalucía y otras comunidades sobre las matemáticas en el Bachillerato.
* Los estándares curriculares del N.C.T.M.

Bibliografía Básica:

Campbell P. & Grinstein L. (1991); Consejería Educación Junta Andalucía (1989a); Consejería Educación Junta Andalucía (1989b); Cockcroft W. (1985); Costello J. (1991); Grupo Cero (1984); Hiebert J. y Lefevre P. (1986); M.C.E. (1989); M.E.C. (1991); Romberg T. (1991); Stenhouse L. (1984).

Otros Materiales:

Hay una variedad de documentos que presentan y organizan los contenidos de matemáticas para la enseñanza secundaria, tanto obligatoria como no obligatoria. Entre estos documentos vamos a utilizar los siguientes: diseños curriculares de otras Comunidades Autónomas del Estado español: diseños curriculares de otros paises de las Comunidades Europeas; desarrollos realizados por los equipos de diferentes Editoriales; y desarrollos realizados por Seminarios de Centro o Grupos de Renovación.

Actividades:

Cada una de las organizaciones del conocimiento matemático admite un modo de representación: diagrama de árbol o listas de tópicos para la organización en disciplinas; mapas conceptuales para el conocimiento conceptual; diagramas de flujo para el conocimiento procedimental; y, en general cuadros y esquemas.

* Una primera actividad consistirá en esquematizar en un cuadro o tabla la organización de los contenidos de matemáticas de Secundaria y Bachilleratos, poniendo de manifiesto alguna regularidad importante y las conexiones principales entre sus partes.
* Una segunda actividad consistirá en organizar los contenidos de un tópico concreto, señalando los diferentes niveles y elementos conceptuales y procedimentales que lo forman, así como las actitudes que se promueven.
* Finalmente, una tercera actividad consistirá en valorar el desarrollo y organización de los contenidos de un tópico que realiza un grupo de trabajo concreto, poniendo de manifiesto las deficiencias observadas.

Metodología:

La organización y representación general de contenidos se hará individualmente y se debatirán en clase las diferentes propuestas, explicitando sus ventajas e inconvenientes.

El desarrollo de los contenidos de un tópico se hará en pequeño grupo y con tópicos diferentes; con posterioridad, se irán exponiendo sucesivamente cada uno de ellos , con la participación crítica de los grupos.

Evaluación:

Se valorarán de modo particular la capacidad: para diferenciar entre los aspectos conceptuales y procedimentales del conocimiento matemático; para considerar todos los niveles conceptuales y procedimentales de un tópico; para realizar una representación adecuada de los elementos considerados y de sus relaciones; para criticar las organizaciones y representaciones realizadas por otros grupos, en especial destacando las incoherencias o limitaciones que se aprecian. También se valorará la capacidad para determinar las actitudes que se desarrollan en los diferentes contenidos.

Tema 7

Título: Objetivos de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato.

Objetivo General: Conocer las competencias generales que se pretende que consigan los jóvenes mediante el aprendizaje de las matemáticas de Secundaria y Bachillerato, así como las específicas para cada uno de los tópicos.

Contenidos:
* Objetivos conductuales y competencias generales: diversas organizaciones del currículo.
* Taxonomías. Objetivos Generales según la organización cognitiva de los contenidos.
* Crítica al modelo de objetivos operativos.
* Relaciones entre los objetivos y los demas componentes del currículo de Matemáticas.
* Objetivos generales para las matemáticas en el Diseño Curricular Base para la Enseñanza Secundaria y para el Bachillerato.
* Objetivos generales para las matemáticas en el Diseño Curricular de la Junta para la Enseñanza Secundaria y para el Bachillerato.
* Objetivos en los estándares curriculares del N.C.T.M.
* Análisis crítico de los objetivos.

Bibliografía Básica:
Bloom B. (1972); Cockroft W. (1985); Consejería Educación Junta Andalucía (1989a); Consejería Educación Junta Andalucía (1989b); Gimeno J. (1984); M.E.C. (1989a); M.E.C. (1989b); Sthehouse L. (1984); Tourneur Y. (1972); Tyler R. (1986); Romberg T. (1991).

Otros Materiales:

Libros de texto de diferentes autores y editoriales; diseños de otras comunidades Autónomas y otros paises de las Comunidades Europeas; programaciones realizadas por Seminarios de Centro y grupos o equipos de renovación.

Actividades:

* Formar un archivo con los objetivos de las matemáticas para la Educación Secundaria procedentes de planes de estudio anteriores, planes de estudio de otros paises o documentos elaborados por especialistas.
* Establecer las semejanzas y diferencias entre los objetivos de los diferentes documentos.
* Enumerar los objetivos relacionados con un tópico, estableciendo diferentes niveles de análisis en sus enunciados.
* Diferenciar entre objetivos de distinto grado de generalidad.
* Redactar una colección de objetivos adecuada para un determinado tópico, incluyendo una justificación crítica de las decisiones adoptadas.

Metodología:

* Enumerar las competencias o capacidades terminales que se espera que adquieran los alumnos sobre un conocimiento matemático o un conjunto de ellos en una tarea compleja que requiere no sólo una buena capacidad de análisis conceptual sino también una valoración adecuada de procedimientos y actitudes. Por otro lado, la determinación de objetivos se puede realizar a muchas escalas: desde niveles muy básicos en los que se quieren determinar conductas singulares muy específicas, hasta niveles más generales en los que se describen conductas más elaboradas.

La metodología de este tema debe encaminarse a distinguir diversos niveles de complejidad en la determinación de objetivos; distinguir distintos tipos de competencias derivadas del conocimiento matemático; y determinar distintas formas de manifestar el dominio en cada competencia.

El trabajo se realizará mediante localización, elaboración y crítica de documentos en pequeños grupos con debate posterior en gran grupo.

Evaluación:

Cada alumno redactará un breve informe final sobre sus conclusiones más destacables en relación con los objetivos del currículo de matemáticas en Secundaria, proporcionando un ejemplo de redacción personal de los objetivos de un tópico.

Tema 8

Título: Estilos de Enseñanza. Métodos, medios, materiales y recurso.

Objetivo General: conocer las orientaciones metodológicas usuales en el aula de matemáticas de Secundaria así como medios, materiales y recursos, junto con las orientaciones correspondientes.

Contenidos:
* La enseñanza de las matemáticas.
* Métodos de trabajo en el aula de matemáticas. Funciones del profesor.
* Organización de las actuaciones de los alumnos. Secuencias Metodológicas.
* Medio escolar y educación matemática.
* Materiales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
* Nuevas tecnologías y educación matemática.
* Recursos para el aula de matemáticas.
* El Departamento o Seminario de Matemáticas. Trabajo en equipo.

Bibliografía Básica:
Campbell P. & Grinstein L. (1991); Cockcroft (1985); Consejería Educación Junta Andalucía (1989a); Consejería Educación Junta Andalucía (1989b); Costello J. (1991); Fielker D. (1986); Grupo Cero (1984); Mathematics Association (1991); M.E.C. (1989); Morris R. (1983); Pinn D. (1990); Puig Adam P. (1960); Rico L. (1990); Stenhouse L. (1984).

Otros Documentos:

Se pueden considerar una variedad de documentos, que concretamos en: diseños curriculares elaborados por comunidades Autónomas y paises de las Comunidades europeas; guías didácticas o libros del Profesor de distintas editoriales; catálogos de materiales didácticos de casas comerciales; películas y vídeos matemáticos; software para la enseñanza, el aprendizaje o la instrucción en matemáticas; calculadoras, programables o no; cuadernos de orientación y materiales elaborados por los Centros de Profesores, equipos de investigación o profesores individualmente; libros de juegos de ingenio y de divulgación de las matemáticas; archivos de materiales de aula.

Actividades:

Elaborar una secuencia metodológica para el desarrollo de un tema especificando todos los elementos organizativos, espaciales, temporales, documentales y materiales que se necesitan así como las interconexiones entre ellos y las actividades previstas para el profesor y los alumnos en cada caso.

Localizar al menos cinco materiales que puedan emplearse en el diseño metodológico anterior y estudiar sus características.

Localizar al menos cinco recursos del medio natural y social que puedan emplearse en el diseño metodológico anterior e indicar el modo de empleo en cada caso.

Localizar al menos un programa informático que pueda emplearse en el diseño metodológico elegido.

Metodología:

A cada grupo de cuatro o cinco alumnos se le asignará un tópico del currículo de matemáticas de Secundaria sobre el cuál se diseñará una unidad didáctica. Los elementos metodológicos de esa unidad se ajustarán a las Actividades descritas en el apartado anterior. Cada grupo redactará un documento con su diseño y lo expondrá en clase durante una hora, seguida de un pequeño debate.

Evaluación:

Se valorará en este caso la capacidad para organizar una secuencia didáctica, destacando en ella el uso de materiales y recursos. El ajuste a un diseño formal junto con el desarrollo completo y la riqueza del análisis serán elementos importantes para la valoración del aprendizaje hecho en este tema.

Tema 9

Título: Evaluación en el Aula de Matemáticas.

Objetivo General: Conocer los métodos e instrumentos de evaluación más difundidos y establecer cuáles son más adecuados para evaluar las matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria.

Contenidos:
* Concepto de evaluación. Funciones de la evaluación.
* La evaluación con relación a norma. Los tests estandarizados.
* La evaluación con relación a criterio. Las pruebas objetivas.
* La evaluación de los procesos. Evaluación formativa.
* Metodología y registro de la evaluación.
* Instrumentos para evaluar.
* Creencias de los profesores sobre la evaluación.
* La promoción de los alumnos y las pruebas de acceso.
* Evaluación del profesorado.

* Evaluación del currículo y del centro.

Bibliografía Básica:
Cockcroft W. (1985); Howson G., Keitel C., & Kilpatrick J. (1983); Gimeno J. y Pérez A. (1985); Kilpatrick J. (1979); Martínez J. y Salinas D. (1988); M.E.C. (1989); Niss M. (1992); Rico L. (1991); Ridway J. (1989); Romberg T. (1988); Romberg (1991); Stufflebeam D. & Shinkfield A. (1987); Suydan M. (1986).

Otros Materiales:
Disposiciones del Ministerio de Educación y de las Consejerías de Educación de las Comunidades Autónomas sobre Evaluación. Distintos modelos de pruebas para evaluar el conocimiento matemático en los diferentes niveles del Sistema Educativo. Estudios e informes realizados sobre el rendimiento de niños y jóvenes en distintas etapas del Sistema Escolar, en especial al final de ciclo o cambios de nivel educativo. Estudios realizados sobre rendimiento logrado siguiendo una determinada metodología o para la consecución de unos objetivos explícitos.

Actividades:
* Realizar una selección de pruebas y ejercicios de evaluación para matemáticas.
* Realizar un listado de actividades en las que se pueda evaluar el trabajo de los alumnos en la clase de matemáticas.
* Redactar pruebas de evaluación para un tópico determinado con indicación de los aspectos que se pretenden evaluar.
* Proponer actividades que permitan diagnosticar dificultades en el aprendizaje matemático de los alumnos en un determinado nivel y sobre un determinado tópico. Establecer criterios para orientar a los alumnos y remediar los errores.
* Evaluar en clase la marcha de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas.
* Enjuiciar estudios o investigaciones realizados sobre la evaluación en

matemáticas.

Metodología:
El trabajo de buscar información y redacción de propuestas se puede realizar en dos fases: trabajo individual con propuesta posterior al grupo pequeño, en la que se haga una primera depuración y redacción de documento conjunto, y presentación de los trabajos anteriores en el grupo total con nueva revisión de criterios e instrumentos y preparación de propuesta común. En cada caso hay que explicitar los criterios de valoración que se están empleando para aceptar o rechazar el material preparado.

Evaluación:
Cada grupo emitirá una valoración sobre el trabajo de los demás grupos, indicando el criterio utilizado y las modificaciones que se aconsejan. Cada grupo será valorado en función de los juicios que reciba y de los que emita.

Tema 10

Título: Resolución de Problemas.

Objetivo General: Presentar una organización del currículo de matemáticas fundamentada en la resolución de problemas.

Contenidos:

* Noción de problema. Tipos de problemas y problemas matemáticos.
* Resolución de Problemas y aprendizaje de las matemáticas.
* Distintas funciones de la resolución de problemas en el curriculo de matemáticas. Clasificación de problemas.
* Los heurísticos o estrategias de pensamiento para la resolución de problemas.
* Habilidades metacognitivas y resolución de problemas.
* Estrategias del pensamiento matemático.
* Las matemáticas en el aula como resolución de problemas.
* El arte de enunciar problemas; matemáticas dentro de un contexto.

Bibliografía Básica:
Bransford J., Stein D. (1986); Coriat M. y otros (1989); Charles R. & Silver E. (1989); Goldin G. & McClintock (1979); Grupo Cero (1984); Guzmán M. (1987); Guzmán M. (1991); Kilpatrick J. (1987);Krulik S. & Reys R. (1980); Kruteskii V. (1976); Lester F. K. (1983); Mason J., Burton L. & Stacey R. (1988); Mayer R. (1986); Nesher P. (1980);Polya G. (1972); Polya G. (1979); Romberg T. (1991); Schoenfeld A. (1985).

Otros Materiales:
Hay colecciones de libros con enunciados de problemas clasificados por tópicos, por estrategias de resolución, por niveles de dificultad o por otros criterios. Entre las colecciones más conocidas se encuentran las obras de M. Gardner, las de B. Bolt, las de M. Mataix o las de Rodríguez Vidal. Todas estas colecciones son un material importante. También encontramos materiales de trabajo para el alumno organizados como colecciones de problemas , algunos de los trabajos del Shell Center y muchos otros responden a esta idea. Libros y revistas de pasatiempos adivinanzas y juegos de ingenio, puzzles y otros materiales entran dentro de este campo. También conviene incluir algunos libros de texto especialmente orientados a este tópico.

Actividades:
El trabajo sobre resolución de problemas es un tópico muy atractivo para

trabajar en esta asignatura; por ello mismo conviene controlarlo con el fin de que su desarrollo no llegue a ocupar un tiempo excesivo en relación con la extensión del curso.

Actividades básicas a realizar son:

* Trabajar sobre problemas de distintos niveles y explicitar las estrategias utilizadas.
* Comparar las estrategias seguidas por varios resolutores sobre un mismo problema.
* Resolver problemas anotando a la vez el proceso de resolución.
* Comparar y analizar los protocolos seguidos por diversas personas sobre un mismo problema.
* Seleccionar problemas para: iniciar un tópico; poner a prueba el dominio sobre unos conocimientos; aplicar conocimientos aprendidos.
* Enunciar problemas adecuados a un contexto.
* Leer un capítulo de un libro dedicado a enseñar la resolución de problemas, anotando los procesos de resolución seguidos.

Metodología:

El trabajo individual, acompañado de la comparación de los procesos individuales en pequeño grupo, es la dimámica más adecuada para trabajar en este tema. El trabajo con el grupo completo se limitará a la presentación de las ideas y esquemas generales por parte del profesor y a la puesta en común final de los resultados de cada grupo. Destacar ideas como la multiplicidad de interpretaciones que pueden presentarse, la variedad de procesos, los diferentes usos dentro del aula y la necesidad de control de la solución obtenida forman parte importante en el trabajo de este tema.

Evaluación:

La valoración destacará la capacidad de los profesores en formación para emplear este método y para promover estrategias de pensamiento.

III.2.4. Desarrollo del Programa: Parte B.

Análisis didáctico y diseño de unidades.

La parte B del Programa de la Asignatura (temas 11 a 32) está dedicada al trabajo didáctico sobre los programas de matemáticas en Secundaria y Bachillerato. La estructura que seguimos para la programación de estos Temas es, necesariamente, distinta a la utilizada con los Temas de la parte A.

Los Temas 11 a 32 están organizados según los contenidos que se marcan para la Asignatura de Matemáticas en el Currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en sus diversas modalidades. En este sentido, como Contenidos que son de los Programas escolares de Matemáticas, se ajustan a la estructura curricular general y comparten un mismo Objetivo general, Actividades, Metodología y Evaluación. Se diferencian unos de otros por tratar de tópicos distintos. Por ello, antes de pasar a describir el criterio seguido para organizar los Temas, vamos a explicitar esa estructura curricular común.

El Objetivo General, en todos los casos, consiste en disponer y utilizar unos elementos de información adecuados que proporcionen una base suficiente para el desarrollo curricular completo del tópico a que se refiere el tema; este desarrollo posterior deberá comprender objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

Las Actividades se dirigirán a localizar la documentación y referencias necesarias para el diseño del tema; a seleccionar y estructurar la información más conveniente y a elaborar un resumen. Con este material se prepara un documento teórico para el desarrollo del tema, que se presenta en clase para su explicación, discusión y valoración.

La Metodología consistirá en la distribución de los temas en grupos pequeños (4 o 5 alumnos), proporcionar un guión de referencia, realizar la búsqueda y selección de información, elaborar y redactar el diseño del tema, exponer el tema en clase y debatirlo, corregir el diseño realizado. Por lo que se refiere a las funciones del Profesor de la Asignatura señalamos las siguientes tareas: coordinar los trabajos de los diferentes grupos, proponer la realización de actividades, ayudar en las principales dificultades y en su superación, supervisar la realización de los trabajos, moderar las intervenciones y debates, valorar a los alumnos antes y después de realizar una tarea, buscar condiciones adecuadas para la realización y desarrollo de los trabajos.

La Evaluación. En la realización de los trabajos por los alumnos nos centraremos en valorar tres momentos. En primer lugar, se evaluará el documento teórico preparado para el diseño del tema; antes de su conclusión se realizará una sesión de trabajo con el Profesor para comprobar su grado de ejecución. En segundo lugar, se valorará su presentación en clase al resto de los compañeros: la selección realizada, la motivación, las ideas que se destacan y la capacidad para comunicarlas. En tercer lugar, se valorará la capacidad para aceptar críticas e integrarlas en el propio trabajo.

Por otra parte, durante la participación de los alumnos en los debates, se observará su capacidad crítica, la profundidad de sus juicios y la habilidad para coordinar sus reflexiones con las del resto de los compañeros.

La programación de todos los Temas de esta parte está fijada por unos **Elementos Organizadores**, que permitan a los alumnos buscar y organizar la información para que ellos, posteriormente, puedan realizar el desarrollo curricular de cada tópico. Estos elementos organizadores son:

1. Ubicación y tratamiento de los contenidos del tema en el Diseño Curricular del Ministerio y en los documentos elaborados por la Comunidad Autónoma Andaluza.
2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.
3. Fenomenología de los conocimientos.
4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.
5. Errores y dificultades.
6. Desarrollo histórico del tópico.
7. Bibliografía de Referencia.

La información en torno a los Organizadores se presenta como un guión que sirve para organizar el trabajo de los alumnos, junto con algunas indicaciones explícitas, no cerradas.

El primer organizador, **Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza** trata, obviamente, de situar cada uno de los Temas dentro de los documentos sobre Diseño Curricular editados por el Ministerio y la

Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

En el momento de redactar esta Memoria los documentos disponibles son:

* M.E.C. (1989). Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria I y II.
* Junta Andalucía. Consejería Educación y Ciencia (1989). Diseño Curricular de Matemáticas. Educación Secundaria 12-16.
* Junta Andalucía. Consejería Educación y Ciencia (1989). Diseño Curricular de Matemáticas. Educación Secundaria 16-18.
* M.E.C. (1991). Bachillerato. Estructura y Contenidos.
* B.O.E. Real Decreto 1345/1991 de 6 de Septiembre sobre Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.
* Junta Andalucía. Consejería Educación y Ciencia (1992). Borrador Proyecto de Decreto Educación Secundaria Obligatoria. Area de Matemáticas.

La ubicación de cada Tema se realizará, prioritariamente, con relación a estos documentos. En segundo término se podrán citar otras fuentes documentales.

El segundo organizador: **Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes** presenta la organización de los contenidos desde el punto de vista cognitivo de organización de los conocimientos matemáticos que ha adoptado el Diseño Curricular. En algunos temas incorporamos el tratamiento que realiza el Real Decreto 1345/1991 en el Anexo que desarrolla los contenidos, matizado con algunas indicaciones de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía y algunas aportaciones nuestras. Cuando el tema no tiene tratamiento explícito en el Currículo nosotros hacemos el desarrollo de los apartados de este punto.

El tercer organizador, **Fenomenología de los conocimientos**, proporciona un resumen de aquellos fenómenos a cuya comprensión y dominio contribuyen los conocimientos matemáticos tratados en el Tema. Los contextos y las situaciones en las que se presentan y emplean los diferentes conceptos y procedimientos y las funciones que en cada caso se destacan, constituyen una dimensión importante en el tratamiento didáctico del conocimiento matemático como ya pusiera de manifiesto Freudenthal.[141]

Las necesarias conexiones con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento; las diferentes utilizaciones que se hacen de los conocimientos matemáticos; son otros tantos fenómenos que conviene considerar en el momento de seleccionar y organizar los contenidos y de diseñar las secuencias metodológicas, ejemplos, motivaciones y materiales para su transmisión.

El cuarto punto se refiere a **Modelos, representaciones, materiales y recursos**. Fischbein[142] afirma que

> *"los modelos representan una herramiento esencial para dar forma a conocimientos intuitivamente más aceptables. A tales sustitutos se les llama comunmente modelos.*
>
> *Hablando en general, un sistema B representa un modelo del sistema A si, sobre la base de cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede reflejarse consistentemente en términos de B, y viceversa."*

La noción de representación hace referencia al modo en que los sujetos organizan su información sobre un tópico para poder utilizarla bien en situaciones o problemas prácticos o bien en situaciones escolares convencionales. Los modelos utilizados en la presentación y desarrollo de un determinado concepto se pueden utilizar, total o parcialmente, como representaciones de dichos conceptos. Por eso la importancia de elegir adecuadamente los modelos para trabajar sobre cada concepto.

Los materiales son concrecciones de modelos realizadas por casas comerciales o por el profesor. Así, las regletas de Cuisenaire son una concrección del modelo con medidas para el

---

[141] Freudenthal H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel Publi. Comp.

[142] Fischbein E. (1987). Intuition in Science and Mathematics. Dordrecht: Reide Publi-Comp.

aprendizaje de los números naturales, pero no es la única concrección de ese modelo. Los recursos proporcionan situaciones, o ayudas para trabajar en una situación, en la que el concepto estudiado se emplea significativamente y permite desarrollar algunos procedimientos. La noción de recurso es más amplia e imprecisa, ayuda a evocar el concepto y a trabajar sobre él empleandolo en situaciones prácticas. Dentro de los recursos actuales encontramos los materiales derivados de las nuevas tecnologías de los que conviene hacer mención explícita cada vez que resulte adecuado.

El quinto organizador, **Errores y dificultades**, tiene por finalidad poner en contacto al profesor en formación con los resultados de las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes. Uno de los datos que surgen en estos estudios son los errores cometidos por los alumnos, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales.

También se observa que hay determinados conocimientos que lleva más tiempo comprender o en los que hay un mayor número de alumnos que no comprenden correctamente; a estos conocimientos es a los que consideramos difíciles o de mayor dificultad. Al realizar la programación de un tema el Profesor debe disponer de información sobre cuales son aquellos errores o conocimientos insuficientes en los que sus alumnos se pueden encontrar, así como aquellos puntos que van a tener una dificultad especial. No sólo es necesaria esa información sino que también el Profesor debe saber cómo diagnosticar los errores de sus alumnos y qué tratamiento debe seguir con ellos para remediar sus deficiencias. Aunque no es mucho lo que aún se sabe sobre técnicas correctivas, sí es conveniente disponer de la información ya contrastada conocida.

El sexto organizador, **Desarrollo histórico del tópico**, tiene por finalidad señalar algunos momentos a lo largo de la historia de la matemática en los que el conocimiento matemático considerado tuvo un desarrollo especial o desempeñó algún papel de interés. Esta información puede servir en la programación para motivaciones, ejemplos y también para proponer algún ejercicio curioso. Los alumnos se sienten especialmente interesados cuando se les proporciona información adecuada sobre historia de las matemáticas y los antecedentes de un contenido. Se trata de poner el énfasis en la dimensión cultural e histórica del conocimiento matemático, pero no se pretende hacer un estudio exhaustivo y completo de la evolución histórica de cada uno de los tópicos.

Con la información recibida, los alumnos organizarán el Tema desde la perspectiva de su desarrollo currícular y realizarán las Actividades propuestas en su caso. Para preparar el desarrollo de cada tema tendrán en cuenta el siguiente marco práctico, que es imperativo (y, opcionalmente, ampliable):

1. Obejtivos, que harán referencia a:

1.1. Dominio Conceptual.

1.2. Procesos.

1.3. Aplicaciones.

1.4. Actitudes.

2. Contenidos, en donde se presentará una selección razonada para cada tópico y se hará referencia a:

2.1. Organización.

2.2. Temporalización.

2.3. Preconceptos y errores previsibles.

2.4. Niveles convenientes de dominio.

3. Metodología prevista, con referencia a:

3.1. Situaciones.

3.2. Modo de trabajo.

3.3.. Secuencia.

3.4. Materiales y recursos.

4. Evaluación, con referencia a:

4.1. Diagnóstico y corrección de errores.

4.2. Cuestiones relevantes que controlar.

4.3. Métodos en la valoración.

4.4. Datos y registro.

5. Bibliografía.

5.1. Del Profesor, para preparar el Tema.

5.2. De aula.

El esquema de la página siguiente resume los diferentes niveles de estudio y análisis que se consideran y las relaciones entre los mismos. Una vez presentadas las carácterísticas comunes de los Temas de la parte B procede mostrar las particularidades de cada uno de ellos; éstas, como ya se ha dicho, derivan de la necesaria variedad engendrada por los organizadores citados en la Programación.

Tema 11

Título: Números y Operaciones en Educación Secundaria Obligatoria.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

- Dentro de los contenidos marcados por el Ministerio (B.O.E. 13-Septiembre-91) el primer bloque de contenidos se denomina: Números y operaciones: significados, estrategias y símbolización.
- En el proyecto de decreto de la Junta de Andalucía el primer bloque de contenidos se denomina: Números y Medida.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Los **conceptos**, relativos a este tema, son:

1. Números naturales, enteros, decimales y fraccionarios.
   * Significados y usos de los diferentes tipos de números: contar, medir, ordenar, codificar, expresar cantidades o particiones.
   * Números fraccionarios: identificación entre decimales sencillos, fracciones y porcentajes.
2. Notaciones numéricas: Sistema de numeración decimal; notación científica; jerarquía de las operaciones; paréntesis.
3. Las operaciones: significados y usos de la suma, resta, multiplicación y división en distintos contextos y con distintas clases de números: significado y uso de las potencias de exponente entero y de la raiz cuadrada.
4. Relaciones entre los números: Orden y representación de los números en la recta; la relación múltiplo-divisor.
5. Aproximación y estimación de cantidades: aproximación de un número por otro más sencillo, diversos métodos; margen de error en las estimaciones y aproximaciones.
6. Algoritmos básicos e instrumentos de cálculo: algoritmos para operar con números enteros, decimales y fraccionarios sencillos y para el cálculo con porcentajes; significado y uso de las propiedades de las operaciones para la elaboración de estrategias de cálculo

mental y escrito; reglas de uso de la calculadora; otros instrumentos de cálculo disponibles.

Los **procedimientos** relativos a este tema se clasifican en dos apartados:

a) Utilización de distintos lenguajes.

1. Interpretación y utilización de los números y operaciones en diferentes contextos eligiendo la notación más adecuada en cada caso.
2. Interpretación de códigos y tablas numéricas y alfanuméricas para gestionar o transmitir informaciones.
3. Representación, sobre una recta o mediante diagramas y figuras, de números enteros, fraccionarios y decimales sencillos; representación de los datos y relación en problemas numéricos.
4. Formulación verbal de problemas numéricos, de los términos en los que se plantean y del proceso y cálculos utilizados para resolverlos, confrontándolos con otros posibles.

b) Algorítmos y destrezas:

5. Comparación de números mediante la ordenación, la representación gráfica y el cálculo de porcentajes.
6. Clasificación de conjuntos de números y construcción de series numéricas de acuerdo con una regla dada.
7. Sustitución de un número por otro más sencillo, de acuerdo con la precisión que requiera su uso.
8. Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo mental.
9. Utilización de los algoritmos convencionales de suma, resta, producto y división con números enteros, decimales, y fracciones sencillas.
10. Utilización de diferentes transformaciones o conversiones numéricas para efectuar cálculos de manera más sencilla.
11. Utilización de la calculadora u otros instrumentos de cálculo para la realización de cálculos numéricos.

Estrategias:

1. Utilización de diversas estrategias para contar o estimar cantidades, teniendo en cuenta la precisión requerida.

2. Búsqueda y espresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números.
3. Identificación de problemas numéricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
4. Reducción de problemas numéricos complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución.
5. Decisión sobre qué operaciones son adecuadas en la resolución de problemas numéricos.
6. Formulación de conjeturas sobre situaciones y problemas numéricos y comprobación de las mismas mediante el uso de ejemplos y contraejemplos, método de ensayo y error.
7. Utilización del método de análisis-síntesis para resolver problemas numéricos.

Actitudes, también clasificadas en dos apartados:

Referentes a la apreciación de las matemáticas:
1. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
2. Incorporación del lenguaje numérico, del cálculo y de la estimación de cantidades a la forma de proceder habitual.
3. Sensibilidad, interés y valoración crítica ante las informaciones y mensajes de naturaleza numérica.
4. Reconocimiento y valoración crítica de la utilidad de la calculadora y otros instrumentos para la realización de cálculos e investigaciones numéricas.
5. Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números o códigos numéricos.
6. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones numéricas.

Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
7. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas numéricos.
8. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier conteo, cálculo o

problema numérico.
9. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas numéricos distintas de las propias.
10. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos numéricos.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Reconocer y distinguir mediante ejemplos los diferentes fenómenos y situaciones en los que se utilizan cada uno de los conceptos numéricos considerados. Entre los más significativos, señalamos:

1. Números naturales: Secuencia, recuento, cardinalidad, medida, ordinalidad, código o símbolo, representación figurativa, operatividad.
2. Números enteros: situaciones relativas mediante comparaciones y transformaciones entre números naturales; situaciones lógico-duales, basadas en el concepto de opuestos; situaciones de cambio de origen y estructura relativa local; situaciones prealgebraicas; situaciones métricas.
3. Números fraccionarios: fracción como parte de un objeto físico; fracción de un segmento o polígono regular; fracción de las unidades fundamentales del sistema internacional de medidas, fracciones de unidades de tiempo; fracciones en situaciones de contrato, convenio o reparto; fracciones en situaciones culturales o históricas; fracción como razón de dos cantidades, porcentaje, frecuencia relativa o probalidad; fracción como ley o relación entre conjuntos.
4. Modelos decimales: números decimales: números con coma; expresión decimal de una división entera; expresión decimal de una raiz cuadrada; decimales en la calculadora.

4. Modelos; representaciones; materiales y recursos.

Entre los **modelos** usuales en el trabajo con números y operaciones encontramos los siguientes:

a) Modelos lineales: la recta numérica es un modelo adecuado en el trabajo con los distintos conceptos numéricos aquí considerados, naturales, enteros, decimales y fraccionarios. En todos los casos hay unas reglas para representar los números sobre una línea recta.

b) Modelos cardinales: estos modelos bien como cantidades desordenadas o bien como configuraciones puntuales que se ajustan a algún patrón geométrico, son usuales para números naturales; también hay modelos cardinales para números fraccionarios, aunque se utilizan menos. Los números enteros y los decimales no utilizan estos modelos.

c) Modelos métricos: todos los conceptos numéricos emplean modelos de esta clase.

d) Modelos funcionales: los modelos funcionales se utilizan para las operaciones con números naturales, por ello mismo también se emplean para los conceptos de número entero y fraccionario. No es usual emplear modelos funcionales con números decimales, salvo casos muy concretos como los porcentajes.

e) Modelos de superficies y volúmenes. Las superficies, y en menor grado los volúmenes, se emplean para representar números fraccionarios. Los números poligonales y poliédricos son modelos poco utilizados para los números naturales.

f) Hay otros modelos, como son los combinatorios en forma de cuadros de doble entrada o de diagrama en árbol, que permiten modelizar las operaciones producto y división.

Las **representaciones** matemáticas usuales de los conceptos numéricos son, fundamentalmente, la notación simbólica y la recta numérica. Pero a niveles más elementales la mayor parte de los conceptos numéricos se representan también como acciones y como comparaciones en contextos establecidos.

Materiales y recursos. Las situaciones métricas, tanto con cantidades discretas como con cantidades continuas, proporcionan las ideas básicas de bastantes materiales y algunos recursos para el trabajo con números. El ábaco es un material importante en el trabajo con números. Otro recurso destacable, como ya hemos visto, es la calculadora que permite plantear una cantidad considerable de ejercicios, problemas, e investigaciones.

5. Errores y dificultades.

A comienzos de secundaria es posible que aún haya alumnos que tengan dificultades en la lectura, escritura, composición y descomposición de números naturales, especialmente en aquellos casos en los que hay ceros intermedios. También pueden cometer determinados errores en la resta o en la división. Conviene comenzar realizando un diagnóstico de los fallos operatorios, con el fin de remediarlos aplicando un tratamiento correctivo. Al finalizar el primer ciclo de secundaria estos errores deben ser incidentales, al menos con números de hasta 3 cifras.

En el trabajo con números enteros hay errores tanto en procedimientos como conceptuales, en su mayoría derivados de la idea: "el número expresa una cantidad absoluta". Entre los errores de procedimiento tenemos: en la sustracción ignorar el signo del primer entero y luego sumar los numerales si el segundo es positivo y restarlos si es negativo; otro error en sustracción consiste en aplicar la regla -(-) es + aplicado a cualquier sustracción: -5-(-2)= 5+2.

Entre los errores conceptuales más conocidos está el considerar que el orden entre negativos es el mismo que el de sus valores absolutos.

Un error usual con números decimales está en considerar que un número decimal es mayor cuantas más cifras decimales tenga, así 0,14 es mayor que 0,2. También se producen dificultades en el producto y división de decimales ya que se rompe la regla: *"multiplicar es aumentar y dividir es disminuir"*.

Las mayores dificultades con fracciones se producen en los algoritmos de las operaciones y en la comparación, debidas principalmente a una falta de comprensión de la equivalencia de fracciones. Existen pruebas para los errores y algunas propuestas de corrección que ya han obtenido resultados favorables.

6. Desarrollo histórico del tópico.

La historia de los conceptos numéricos que aquí consideramos abarca toda la historia de las matemáticas. Por ello conviene centrarse en determinados momentos de especial significación para la consolidación de estos conceptos numéricos y que, al mismo tiempo, puedan tener interés para los alumnos de estos niveles de Secundaria. Desde esta perspectiva, los periodos históricos, y conceptos que se revisarán al trabajar sobre este tema son:

1. Matemática babilónica: notación sexagesimal, naturales y decimales.
2. Matemática egipcia: sistema decimal de numeración; operaciones; fracciones unitarias;

escritura de una fracción mediante fracciones unitarias.

3. Matemática griega: sistema alfabético de numeración; representación geométrica de números y estudio de propiedades.
4. Matemática árabe: sistema decimal de numeración y algoritmos de las operaciones.
5. Matemática renacentista: la notación de los decimales de S. Stevin; los signos de las operaciones; algoritmos de cálculo. Dificultades en la comprensión de los números enteros. Notación de las fracciones.
6. Matemática contemporánea: la fundamentación de los sistemas numéricos.

7. Bibliografía:

Almendros, Rico y col. (1984); Alsina, Barba y otros (1982); B.O.E. (1991); Boyer (1986); Castro, Rico y Castro (1987); Castro y Segovia (1985); Centeno (1988); Costello (1991); Flegg (1984); Gómez (1988); González, Iriarte, Jimeno y otros (1990); Greer y Mulhern (1990); Guzmán, Colera y Salvador (1987); Hart (1984); Ifrah (1987); Kerslake (1982); Llinares y Sánchez (1988); Lovell (1977); Puig y Cerdán (1988); Romberg (1991); Rico, Castro y otros (1987); Rico, Castro y otros (1988); Segovia, Castro, Rico y Castro (1989); Shell Centre (1984); Skemp (1980); Smith (1958); Udina (1989); Wells (1988).

Tema 12

Título: Iniciación al álgebra.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza:

El contenido relativo a este tema aparece dentro de los enumerados en el bloque *"Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización"* que marca el Ministerio para la Educación Secundaria Obligatoria.

En el proyecto de la Junta de Andalucía los contenidos de Algebra aparecen agrupados en un bloque independiente. Tanto en un documento como en el otro, se consideran que los conocimientos de álgebra se imparten a lo largo de toda la etapa.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

Los conceptos que indica el Ministerio, relativos a este tema son:
1. El Lenguaje algebraico. Significado y uso de las letras para representar números (un número desconocido fijo, un número cualquiera, una relación entre conjuntos de números,...). Fórmulas y ecuaciones.
2. Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas.
El proyecto de la Junta matiza:
3. Concepto de igualdad y reconocimiento de sus propiedades más sencillas de forma contextualizada, como la reversibilidad, la comparación y la equivalencia.
4. Uso de letras como variables. Interpretar la notación y entender las ideas y conceptos

abstractos que le sirven de base.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes.

1. Interpretación y utilización del lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
2. Formulación verbal de problemas algebraicos, de los términos en que se plantean y del proceso y cálculos utilizados para resolverlos, confrontándolos con otros posibles.

   La Junta a su vez propone:

3. Simbolizar cantidades conocidas o desconocidas, mediante letras, en contextos concretos.

   Expresar relaciones (propiedades, secuencias numéricas, leyes de recurrencia, etc.) mediante expresiones literales. Dar valores numéricos a fórmulas y expresiones literales. Comprender el concepto de variable y ecuación.

b) Algoritmos y destrezas.

4. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos escritos y en la simplificación de expresiones algebraicas sencillas.
5. Resolución de ecuaciones de primer grado por transformación algebraica, y de otras ecuaciones por métodos numéricos y gráficos.
6. Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado y de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

   La versión de la Junta dice:

7. Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas y sistemas de dos ecuaciones mediante métodos diversos. Aplicar métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos y de la vida real.

Estrategias.

1. Utilizar diversos métodos en la resolución de ecuaciones, potenciando la sistematicidad en la exploración de soluciones.
2. Conocer y comparar las diversas transformaciones algebraicas sencillas que permiten obtener la solución de un sistema.

3. Expresar una situación problemática mediante ecuaciones.
4. Reducción de un problema complejo a otro más sencillo.
5. Utilizar tablas y gráficas como herramienta para expresar relaciones algebraicas.
6. Utilizar tablas y gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones.
7. Construir demostraciones para enunciados matemáticos, incluyendo demostraciones indirectas.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas.
1. Valorar la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
2. Apreciar la potencia de la abstracción y el simbolismo matemáticos.
3. Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas algebraicos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos numéricos y las posibles expresiones algebraicas de las mismas.
4. Capacidad para juzgar la validez de una generalización y su representación simbólica.
5. Confianza en las propias capacidades para afrontar y resolver problemas.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo.
6. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas algebraicos.
7. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier problema algebraico.
8. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas distintas de las propias.
9. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas algebraicos.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Al comenzar el estudio del álgebra los alumnos inician el aprendizaje de un segundo nivel de abstracción en el lenguaje de las matemáticas. El aprendizaje de la aritmética constituyó un primer nivel en el que las colecciones de objetos pasaron a simbolizarse mediante números y las acciones sobre esas colecciones mediante operaciones. A partir de aquí pasamos a trabajar sobre cantidades o números generales, al estudio de las relaciones entre ellas y de las reglas de transformación entre esas relaciones. Tenemos un ejemplo de los problemas que se generan al modificar un lenguaje anterior mediante un cambio de perspectiva y para lo que son necesarias nuevas reglas de transformación. Se trata de la formalización del lenguaje aritmético y las ventajas e inconvenientes derivadas de los lenguajes formales. Hay que tener en cuenta que para estos alumnos, en principio, la formalización es un medio y no una meta. Sólo más adelante algunos de ellos considerarán el algebra como objeto de estudio con interés propio. Dos son los fenómenos que se ejemplifican mejor con estos contenidos: los símbolos y las variables. El conocimiento y uso de símbolos, las reglas de su utilización y las diferentes funciones que pueden desempeñar tienen en la iniciación al álgebra un amplio campo de trabajo. El papel de las variables y su sustitución formal es otro. Al trabajar sobre expresiones simbólicas el estudio de simetrías, analogías, cambios de perspectiva y nuevas representaciones son líneas de desarrollo con interés y potencialidad propias.

4. Modelos; representaciones; materiales y recursos.

Entre los modelos usuales para las expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y sistemas tenemos: expresiones verbales; configuraciones puntuales o visualización discreta; figuras geométricas (punto, segmento, cuadrado, cubo) o visualización continua; modelos físicos de sistemas en equilibrio (como la balanza); modelos analíticos, que necesitan de un sistema de representación y del concepto de función.

Quizás uno de los mayores inconvenientes en el aprendizaje del álgebra se encuentra en la carencia de modelos visuales que ayuden a la representación de las expresiones algebraicas y en el trabajo con las mismas. En la enseñanza del álgebra no se ha dado importancia a los modelos visuales correspondientes, lo cual ha convertido esta materia en algo especialmente árido por su carencia de referencias alternativas. En muchos casos la primera representación que se proporciona es la interpretación analítica de ecuaciones o inecuaciones, que exige a su vez tener terminados los primeros pasos en álgebra.

Entre los materiales adecuados para este bloque están las balanzas; máquinas para transformar números o gráficos que encadenan secuencias de números en una o varias direcciones, se trata en ambos casos de cadenas numéricas obtenidas mediante transformaciones lineales o cuadráticas. Material para completar geométricamente un cuadrado y la calculadora.

También hay comercializados unos tableros con fichas de diferentes colores con los que se juega utilizando reglas que son expresiones algebraicas.

Los ordenadores y calculadoras programables están entre los materiales adecuados en este bloque, siempre que no se pretenda ir más lejos de lo que los alumnos van demandando; hay algún software editado en castellano sobre el tópico.

Entre los recursos podemos citar los conocidos juegos de adivinar números; tarjetas para emparejar problemas con soluciones, ecuaciones equivalentes, etc.; también hay versiones *"algebrizadas"* de juegos comerciales; cuadrados mágicos, y otras figuras, etc.

5. Errores y dificultades.

Tres son los tipos de dificultades identificadas en estudios realizados sobre iniciación al algebra (Booth, 1984), que se denominan: significados atribuidos a letras, notación y convención, y operaciones con letras, respectivamente.

En cada uno de estos tipos se detectan una diversidad de errores. Los errores más frecuentes en los significados atribuidos a letras son: confusión entre letras que representan números y letras que representan objetos; distintas letras representan números diferentes; las letras toman sólo valores naturales; se establecen patrones a partir de las letras sobre los números que representan (orden creciente, etc.); se ignora el significado de la letra.

Entre las dificultades detectadas sobre notación y convenciones destacan: tomar la adición como poner juntas las letras, así a + m = am; errores en la interpretación de un producto: no se identifica 4m con 4 x m ya que 4 x 7 no es lo mismo que 47; también se producen errores al dar valores a una expresión: xy, cuando x = 2, y =3, se identifica con 23.

También hay errores en la identificación de m + m + m + m con 4m, y se producen confusiones con las potencias. Finalmente, no se usan ni se entienden los paréntesis:

$$3\ (x + 2) = 3x + 2.$$

Las dificultades detectadas en las operaciones con letras proceden de: falta de dominio en la operación numérica correspondiente, que se manifiesta de nuevo en las operaciones algebraicas; rechazo a operar con letras por desconocer su valor. Otros estudios han detectado errores y dificultades en la generalización de ejemplos, bien por no considerar toda la información, o por generalizaciones alusivas. La detección de estos errores y su corrección es condición indispensable para un aprendizaje significativo de los primeros conceptos que permitan un trabajo posterior. Los errores en la resolución de ecuaciones y su corrección son más conocidos por el Profesor, pero muchas veces las dificultades están situadas en un nivel previo, y no pueden superarse si no se localizan explícitamente.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Los periodos históricos y conceptos que conviene revisar para este tema son:

1. Edad Alejandrina tardía. Diofanto.
2. El álgebra musulmana. Al-khwarizmi.
3. El renacimiento italiano.Tartaglia y Cardano.
4. Desde Vieta a Descartes.
5. El álgebra y la resolución de ecuaciones anterior a Galois. Ruffini, Cauchy, Abel, Gauss.

La presentación de los diferentes estilos y notaciones empleados en los textos de álgebra de cada época, así como el conocimiento de los problemas planteados y las soluciones obtenidas proporcionan una solución interesante.

7. Bibliografía:

Booth (1984); Boyer (1986);Costello (1991); Coxford y Shulte (1988); Davis (1988); De Lorenzo (1971); Euler (1984); Freudenthal (1983); Grupo Azarquiel (1991); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Hart (1984); Kilpatrick & Wiszurp (1979c); Mason (1987); Paradís y Malet (1989); Paradís, Miralles y Malet (1989); Polya (1981); Puig Adam

(1960); Romberg (1991); Socas, Camacho, Palarea, Hernández (1989); Stillwell (1989); Van der Waerden (1985); Wagner & Kieran (1989); Wenger (1987); .

Tema 13

Título: Funciones y gráficas.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos relativos a este tema aparecen en el Bloque 4 de los contenidos que marca el Ministerio para la Educación Secundaria Obligatoria, que se titula: Interpretación, representación y tratamiento de la información, en su apartado A.

El proyecto de decreto de la Junta de Andalucía asigna su tercer bloque de contenidos para Secundaria Obligatoria a Funciones y su Representación Gráfica.

Tanto en un caso como en otro, se trata de unos contenidos que forman parte de los conocimientos fundamentales delimitados para la Secundaria Obligatoria.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Dependencia funcional. Formas de expresar la dependencia entre variables: descripción verbal, tabla, gráfica y fórmula. Representación gráfica: variables que se relacionan, escalas utilizadas en los ejes, valores de una variable respecto a otra, intervalos de validez.
2. Características de las gráficas. Aspectos globales: continuidad, crecimiento, valores extremos, simetría, periodicidad y tendencia. Aspectos locales: tasa de variación media.
3. Funciones elementales, Fenómenos y gráficas de proporcionalidad directa, de proporcionalidad inversa, cuadráticos, exponenciales y periódicos. Expresión algebraica asociada a una gráfica. Tablas de valores de una función. Estudio particular de las funciones lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, exponenciales, periódicas y

escalonadas.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes.

1. Utilización e interpretación del lenguaje gráfico, teniendo en cuenta la situación que se representa, y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
2. Utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas en casos sencillos.
3. Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, de gráficas o de expresiones funcionales, teniendo en cuenta el fenómeno al que se refieren.
4. Expresar leyes, fórmulas o tablas mediante gráficas.

b) Algoritmos y destrezas.

5. Elegir convenientemente las escalas para interpretar y analizar críticamente un fenómeno a partir de su representación gráfica.
6. Representar gráficas de funciones a partir de un enunciado de una tabla y de una expresión analítica.
7. Traducir enunciados matemáticos, no expresados analíticamente, a gráficas de funciones.

Estrategias.

1. Describir, interpretar y analizar críticamente un fenómeno a partir de su representación gráfica.
2. Analizar relaciones funcionales con objeto de explicar cómo el cambio de una cantidad influye en otra.
3. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa o su expresión algebraica.
4. Elegir el modo más adecuado para expresar una relación funcional de acuerdo con las necesidades de un contexto.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas.

1. Reconocimiento y valoración de la utilidad de los lenguajes gráficos para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.
2. Reconocimiento y valoración de las relaciones entre el lenguaje de las gráficas y otros

conceptos y lenguajes matemáticos.
3. Curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos.
4. Sensibilidad, interés y valoración crítica del uso del lenguaje gráfico en informaciones y argumentaciones sociales, políticas y económicas.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo.

5. Reconocimiento y valoración del trabajo en equipo como la manera más eficaz para realizar determinadas actividades (planificar y llevar a cabo experiencias, toma de datos, etc).
6. Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones y experiencias.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Hay fenómenos sociales, físicos y mentales que caen bajo el concepto de variable. Esto ocurre con el transcurso del tiempo, camino recorrido, meta que cambia, movimientos de planetas; temperatura que oscila, días que van aumentando, tasas de mortalidad, impuestos que varían, etc. Las variables sociales, físicas y mentales llevan a números, magnitudes, puntos y conjuntos variables; y éstos, a su vez, a objetos matemáticos que los describen.

La noción de dependencia también tiene una procedencia fenomenológica, ya que puede ser mentalmente experimentada, utilizada, provocada, hecha consciente, sentida o nombrada como un objeto, etc. Establecemos dependencias en los movimientos, procesos, cursos, tramos y en las conexiones causales.

Las funciones expresan conexiones entre fenómenos variables mediante la consideración simultánea de conexiones entre hechos. La variabilidad que pueden representar es, en primer término, cualitativa y, más adelante, cuantitativa. Los fenómenos conectados pueden ser discretos o continuos. Prácticamente, cualquier conexión entre datos o fenómenos variables, de un cierto nivel de complejidad, puede representarse como una función. Los fenómenos temporales tienen especial interés en este campo. Dentro de las funciones hay determinados tipos de especial interés por los fenómenos a los que sirven de modelos. Entre las más conocidas están las funciones lineales que expresan las situaciones de proporcionalidad directa; las funciones cuadráticas, que resultan de la acumulación de efectos lineales -espacio recorrido por un cuerpo en caida libre-; la función exponencial, como expresión de los procesos de crecimiento proporcional, etc.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Cuatro son los modos en que, usualmente, se puede expresar una función: mediante una expresión verbal, por una tabla, mediante una gráfica o bien por una fórmula. La función en sí es un modelo de los fenómenos a los que trata de dar expresión. Estos modelos pueden estar elaborados con mayor o menor precisión y detalle pero, en todo caso, deben transmitir los datos esenciales de la relación entre dos variables: su crecimiento, decrecimiento, valores extremos, tasa de variación, etc.

En los primeros niveles de Secundaria hay que lograr el domino del modelo gráfico y establecer sus conexiones con el modelo simbólico; en esta prioridad la tabla de valores se convierte en un instrumento auxiliar. La multitud de variaciones que pueden espresarse con el lenguaje de las gráficas se pone de manifiesto con los problemas de vaciado de recipientes (vaciado de botellas de distinta forma, vaciados, o llenados, de bañeras, estanques, etc.). Cada gráfica es la representación de un determinado fenómeno dentro de una familia.

Los materiales para estos contenidos se encuentran en los laboratorios de física, en los libros de ciencias y también, en bastantes de las informaciones que aparecen en los periódicos. Hay que destacar el material ya elaborado por el Shell Centre; no hemos visto ningún trabajo sistemático que no esté ya incluido en el mismo. Sí hay mucho software para el estudio de funciones, de nuevo, el trabajo del Shell Centre es de alta calidad. La posibilidad de utilizar recursos para este bloque de contenidos es, en la práctica, ilimitada.

5. Errores y dificultades.

En el trabajo con gráficas se han detectado los siguientes errores: errores en la graduación de los ejes; inversión en el orden de las coordenadas; errores en la lectura y representación de puntos de coordenadas racionales; concepción discreta de los puntos de una recta o de un segmento. Janvier detectó el error denominado “lectura icónica de una gráfica” en donde se interpreta la gráfica como un dibujo, alterando el significado de las variables. También los alumnos tienden a dar un punto como respuesta a cuestiones referidas a intervalos; otra confusión se produce entre “el mayor incremento” con el “mayor valor”. Todos estos errores señalan las dificultades para pasar de una interpretación local a una interpretación global de la gráfica. Hart también ha detectado dificultades en la interpretación de líneas paralelas dentro de las representaciones gráficas y en el reconocimiento de la ecuación de una línea. El razonamiento proporcional también presenta sus propias didicultades.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Periodos y momentos históricos más interesantes para el trabajo en este tema son:
1. La matemática babilónica. Tablas numéricas.
2. La matemática griega. Proporcionalidad.
3. Edad Media. Nicolás de Oresme.
4. La representación analítica. Fermat y Descartes.
5. El concepto de función. Newton y Leibniz.
6. La evolución del concepto en el siglo XVIII. Bernouilli y Euler.
7. El concepto actual de función.

7. Bibliografía:

Azcárate (1990); Boyer (1986); Bryant (1990); Campbell y Grinstein (1988); Cantoral y otros (1991); Crombie (1979: D´Honbres (1987); Fernández y Rico (1992); Freudenthal (1983); Gete, del Barrio (1990); González, Gutiérrez, Rico (1990); Gutiérrez, Rico, González (1990); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Hart (1984); Hoffman (1985); Janvier (1987); Lang (1976); Rey Pastor, Ruiz y Rodríguez (1989); Romberg (1991); Ruiz Higueras (1991); Shell Centre (1991); Skemp (1980).

Tema 14
Título: Estudio y clasificación de cuerpos en el espacio.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y

Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos que corresponden a este tema aparecen en el Bloque 3, Representación y organización en el espacio, que señala el Ministerio para la Educación Secundaria Obligatoria. En el proyecto de decreto de la Junta de Andalucía el Bloque 4 de contenidos se denomina Geometría.

Es importante destacar los profundos cambios que recibe el tratamiento de la Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos:

1. Los elementos geométricos en el espacio. Elementos básicos para la descripción y organización del espacio: puntos, rectas y planos. Relaciones básicas para la descripción y organización del espacio: paralelismo, incidencia y perpendicularidad.
2. Cuerpos. Clasificación de cuerpos atendiendo a diversos criterios. Elementos característicos de poliedros y cuerpos redondos. Relaciones de inscripción y descomposición entre cuerpos. Regularidades y simetrías.
3. Sistemas de referencia. Coordenadas cartesianas en el espacio. Coordenadas en la superficie esférica: longitud y latitud.
4. Relaciones métricas entre elementos de un poliedro o cuerpo redondo. Volumen de un cuerpo.
5. Representación plana de cuerpos geométricos. Desarrollo de un cuerpo. Figuras imposibles.

Procedimientos:

a) <u>Utilización de distintos lenguajes.</u>

1. Observar el entorno, construir objetos diversos, manipular sus elementos y buscar relaciones entre ellos. Reconocer, describir y representar cuerpos geométricos.
2. Descomponer formas complejas en cuerpos elementales. Analizar y determinar las propiedades de los cuerpos elementales mediante detección de regularidades y la

consideración de elementos y relaciones.
3. Clasificar cuerpos geométricos atendiendo a una o varias características.
4. Utilizar la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, relaciones y propiedades de los cuerpos geométricos.
5. Expresar el volumen de un cuerpo en distintas unidades.

b) Algoritmos y destrezas.
6. Interpretar y dibujar objetos tridimensionales.
7. Utilizar sistemas de referencia para situar y localizar objetos.
8 .Construir modelos geométricos.
9. Representar cuerpos geométricos sencillos en el plano, conservando cierta perspectiva.
10. Determinar diferentes medidas sobre cuerpos geométricos. Calcular el volumen de pirámides, prismas y cuerpos de revolución.

Estrategias.

1. Promover el trabajo de cada alumno de acuerdo con sus posibilidades, presentando problemas geométricos en contextos cercanos.
2. Buscar propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos geométricos. Construir cuerpos en los que aparezcan determinadas propiedades.
3. Identificar problemas geométricos, diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
4. Reducir problemas geométricos complejos a otros más sencillos (pasando del espacio al plano, de un cuerpo complicado a otro más simple, del caso particular al general o recíprocamente) para facilitar su comprensión y resolución.
5. Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en poliedros y cuerpos de revolución y de la solución de problemas geométricos en general.
6. Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de los cuerpos y de relaciones entre ellos.
7. Aplicar las relaciones métricas adecuadas para el cálculo del volumen de cuerpos geométricos.

Actitudes:

a) Referentes a la apreciación de la matemática.

1. Reconocer y valorar la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico.
2. Reconocer y valorar relaciones entre diferentes conceptos, como forma y tamaño de los objetos, y entre los métodos y lenguajes matemáticos que permiten tratarlos.
3. Sensibilidad ante las cualidades estéticas de los cuerpos geométricos, reconociendo su presencia en la naturaleza, en el arte y en la técnica.
4. Interés y gusto por la descripción verbal precisa de formas y características de cuerpos.
5. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas en los cuerpos.
6. Confianza en las propias capacidades para percibir el espacio y resolver problemas geométricos.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo.

7. Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas geométricos y en la mejora de las ya encontradas.
8. Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas espaciales desde distintos puntos de vista.
9. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas geométricos distintos de los propios.
10. Sensibilidad y gusto por la realización sistemática y presentación cuidadosa y ordenada de trabajos geométricos.

3. Fenomenología de los conocimientos.

La geometría, en su origen, trata de proporcionar una estructura del espacio; su desarrollo parece estar ligado al siguiente esquema: objeto material, relaciones entre posiciones de objetos materiales, espacio intermedio, concepto de espacio. Antes de llegar a la situación actual de diferentes geometrías abstractas establecidas mediante conjuntos de axiomas, la geometría fue simplemente geometría física. Esta consideración que, históricamente abarcó hasta el siglo XIX, describe en términos generales la secuencia que los niños y jóvenes siguen para construir sus conceptos geométricos y aprender a utilizar los procedimientos que los ponen en relación. El medio familiar, social y natural está plagado de fenómenos en base a los cuales se elaboran las intuiciones geométricas. De todos los campos de la matemática, la geometría del espacio es el campo conceptual más rico en fenómenos para estructurar y sobre los que desarrollarse. Así, el término punto sirve para designar puntos físicos: clases de objetos que se ejemplifican por la cabeza de un alfiler, dos hilos cruzados, una marca, un pequeño foco luminoso, etc. Análogamente el término línea se ejemplifica con cuerdas tirantes, alambres o varillas, rayos de luz, etc. En esta perspectiva los teoremas son enunciados verificables, susceptibles de experimentación, como en el caso famoso de las medidas que realizó Gauss sobre la suma de los ángulos de un triángulo.

Es difícil censar los fenómenos que se pueden considerar en la construcción y desarrollo de los conocimientos geométricos. Una relación de los más importantes debe incluir los siguientes:

* Fenómenos ópticos, superficies reflectantes.
* Formas arquitectónicas: composiciones de volúmenes, perspectivas de cuerpos, figuras simples y combinaciones, cuerpos con simetrías, cúpulas, poliedros.
* Cristalografía, minerales.
* Astronomía: cuerpos en revolución, relaciones espaciales, coordenadas.
* Objetos manufacturados; reproducción industrial.
* Sistemas estáticos y dinámicos, estables e inestables; superficies de tensión mínima.
* Agricultura racional. Urbanismo.
* Empaquetados y apilamientos.
* Reproducción del espacio: perspectiva; fotografía; holografía.
* Juguetes articulados, tipo mecano.

También podemos considerar dentro de la fenomenología de este tema las relaciones espaciales y el lenguaje.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Los modelos de poliedros y cuerpos de revolución son los ejemplos más difundidos de cuerpos espaciales. Los hay en materiales variados, incluidos sus desarrollos planos. El geoespacio que es un bastidor cúbico sobre un cuadrado, con clavos o puntos de enganche a lo largo de sus aristas, proporciona también un modelo útil para estudiar las diferentes relaciones entre líneas y planos en el espacio. Variantes del geoespacio se consiguen con diferentes versiones de paralelepípedos en cristal, plástico, cartulina, papel, etc. Con barritas articuladas o hilos metálicos se obtienen modelos para diferentes configuraciones de rectas en el espacio. Modelos espaciales en madera o plástico existen para descomponer volúmenes y establecer fórmulas, para representar las secciones del cono o mostrar secciones de otros cuerpos. Los modelos para visualizar cilindros, conos, esferas u otros cuerpos como superficies de revolución constan de una sección metálica plana del cuerpo que puede girar sobre un eje de simetría central; a mayor velocidad la ilusión óptica de cuerpo es mayor. También es conocido el modelo para el Teorema de Arquímedes sobre el cilíndro y la esfera inscrita. Las superficies regladas se presentan en modelos construidos con cuerdas o hilo metálico tenso. Las particiones de los sólidos, recubrimientos espaciales y algunos modelos mecánicos forman parte de la inmensa variedad de modelizaciones conocidas sobre cuerpos, elementos y relaciones espaciales.

Las representaciones del espacio tienen una doble consideración. Por un lado, hay que lograr dominio en interpretar la representación plana de un cuerpo o una relación construyendo ese cuerpo o reproduciendo esa relación. En segundo lugar hay que enseñar diferentes técnicas para representar de modo coherente una determinada composición espacial. Gran parte de la información espacial que recibimos se hace mediante representaciones planas. Dominar las destrezas y códigos básicos de estas representaciones es un conocimiento social ineludible.

Casi todos los modelos que hemos enumerado se producen comercialmente, con variedad de materiales y posibilidades. También muchos de ellos se pueden y deben construir manualmente, mediante actividades de taller. Además de los materiales específicos, hay muchos otros recursos que se pueden emplear en geometría tales como las arquitecturas y mecanos, maquetas y recortables para plegar, espejos, plantillas encajables, etc. Hay vídeos que presentan actividades espaciales; algunos referidos explícitamente a cuerpos geométricos, otros a temas astronómicos, industriales o culturales. La fotografía, pintura e incluso el empleo de las cámaras de vídeo por los alumnos son otros tantos recursos útiles para este tema.

5. Errores y dificultades.

Los esposos Van Hiele establecieron su teoría sobre los niveles de conocimiento en matemáticas a partir del análisis del desarrollo y construcción del conocimiento geométrico. Los cinco niveles que propusieron son:

Nivel 0. Se perciben las figuras y cuerpos como un todo global; se pueden reproducir o reconocer objetos geométricos.
Nivel 1. Se analizan las partes, relaciones y propiedades de los cuerpos y figuras; estas propiedades se establecen experimentalmente.
Nivel 2. Los individuos determinan las figuras o cuerpos por sus propiedades, pero no se organizan aún secuencias de razonamientos.
Nivel 3. Los individuos desarrollan secuencias de proposiciones relativas a cuerpos y figuras, de manera que se pueden deducir unas propiedades de otras.
Nivel 4. Los individuos están capacitados para trabajar en un sistema deductivo y valorar la precisión y rigor de sus deducciones.

Dentro de este esquema de niveles, los esposos Van Hiele se propusieron interpretar los errores y dificultades de los alumnos como consecuencia de una alteración metodológica de la secuencia adecuada, al forzar a trabajar en un nivel sin haber consolidado el anterior. Para remediar las dificultades propusieron una secuencia de aprendizaje en cinco fases, que permitiese su control y superación. Estas fases son:

Fase 1. Discernimiento, en la que se presentan situaciones de aprendizaje, con el vocabulario y las observaciones necesarias.
Fase 2. Orientación dirigida. Se propone una secuencia graduada de actividades.
Fase 3. Explicitación. Se expresan los resultados, se comentan y se estructura el sistema de relaciones explorado.
Fase 4. Orientación libre. Se aplican los conocimientos obtenidos a situaciones distintas pero con estructura comparable.
Fase 5. Integración. Los objetos y relaciones se interiorizan.

Estudios sobre errores en geometría del espacio se han hecho también en el IOWO holandés, detectando pautas en la dificultad de los sistemas de representación de cuerpos construidos con agrupamientos de cubos; los estudios de Gaulin sobre actividades con el Soma; y las dificultades y errores detectados por Hart en el estudio del CSMS.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Los periodos y momentos más interesantes para el trabajo en este tema son:

1. Los precursores de Euclides. Sólidos platónicos.
2. La obra de Euclides.
3. Arquímedes y Apolonio.
4. El Renacimiento. Leonardo y Luca Pacioli.
5. Geometría analítica. Descartes y Fermat.
6. Geometría analítica tridimensional.
7. Estudios modernos sobre cuerpos geométricos. Hilbert y Klein.

7. Bibliografía:

Alsina, Burgués, Fortuny (1987); Alsina, Burgués, Fortuny (1988); Alsina, Trillas (1987); Boyer (1986); Castelnuovo (1981); Cundy & Rollett (1978); Delange y otros (1989); Del Olmo, Moreno, Gil (1989); Edmonson (1987); Ernst (1986); Freudenthal (1983); Guillen (1991); Gusev, Lituinenko, Mordkovich (1988); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Hilbert-Cohn-Vossen (1983); Ivins (1964); Luckiesh (1965); Martínez y Juan (1989); O'Daffer, Clemens (1977); Otte, Steimbring y otros (1985); Paccioli (1987); Pedoe (1979); Piaget, Inhelder, Szeminska (1948); Puig Adam (1960); Rico, Castro y otros (1986); Romberg (1991); Senechal y Fleck (1988); Van Hiele (1986); Wells (1988); Wenninger (1987).

Tema 15
Título: Elementos y figuras en el plano. Sistemas de referencia.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos que corresponden a este tema aparecen tratados conjuntamente con los relativos al espacio en el Bloque 3 de los que señala el Ministerio para Educación Secundaria Obligatoria.

También en el proyecto de la Junta de Andalucía los contenidos de Geometría relativos al plano y al espacio aparecen en un bloque conjunto, que es el número 4.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Elementos geométricos en el plano. Elementos y relaciones básicas para la descripción del plano: puntos y rectas; paralelismo, incidencia y perpendicularidad.
2. Sistemas de referencia. Coordenadas cartesianas en el plano.
3. Clasificación de figuras atendiendo a diversos criterios. Elementos característicos de polígonos y cónicas. Relaciones de inscripción, descomposición e intersección entre figuras y cuerpos. Regularidades y simetrías en figuras y composiciones geométricas. Utilidad e interés de algunas figuras para teselar, minimizar el área o el perímetro, establecer equivalencias, etc.
4. Medida de ángulos. Angulos en la circunferencia. Polígonos en la circunferencia.
5. Relaciones métricas en el triángulo. Teorema de Pitágoras. Iniciación a la trigonometría.
6. Medida de superficies. Superficie de un polígono. Superficies circulares.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos lenguajes</u>:
1. Reconocer una figura plana en términos de sus características relevantes; reproducir una

figura conociendo sus características.
2. Clasificar figuras mediante criterios dados. Denominar, representar y caracterizar las clases de figuras obtenidas al aplicar un criterio. Reconocer las jerarquías y nuevas clases que aparecen cuando se combinan dos o más criterios.
3. Clasificar figuras en términos de congruencia y semejanza y aplicar estas relaciones.
4. Conocer y determinar los elementos relevantes de una figura plana. Expresar geométrica y algebraicamente relaciones en una figura plana.
5. Expresar la medida de una figura en distintas unidades.
6. Describir los patrones y regularidades que se aprecian en una figura o en una composición plana.

b) Algoritmos y destrezas:
7. Utilizar las coordenadas cartesianas para situar, localizar y relacionar figuras en el plano.
8. Utilizar con soltura los instrumentos de dibujo habituales.
9. Deducir propiedades de figuras y las relaciones que se dan entre ellas, a partir de postulados previos.
10. Medir de modo directo o indirecto longitudes, ángulos y superficies.
11. Conocer y utilizar algunas propiedades geométricas básicas y el teorema de Pitágoras para obtener o comprobar relaciones métricas entre figuras.
12. Descomponer una figura de acuerdo con unas condiciones analíticas.

Estrategias.

1. Resolver problemas empleando modelos geométricos.
2. Describir verbalmente problemas geométricos y el proceso seguido para su resolución, comparándolo con otros posibles.
3. Buscar propiedades, determinar regularidades y establecer relaciones en figuras o composiciones geométricas.
4. Utilizar la composición, descomposición, disección, intersección, movimiento y deformación de figuras o composiciones geométricas para analizarlos u obtener otros.
5. Elegir las formas o composiciones geométricas que se ajustan mejor a unas condiciones dadas.
6. Reducir problemas geométricos complejos a otros más sencillos para facilitar su

comprensión y resolución.
7. Formular y comprobar conjeturas acerca de propiedades geométricas en figuras y la solución de problemas geométricos en el plano en general.
8. Utilizar métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de las figuras y de relaciones entre ellas.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:
1. Reconocer y valorar la utilidad de la geometría plana para representar, conocer, interpretar y resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico.
2. Reconocer y valorar las relaciones entre diferentes conceptos de las figuras geométricas, y entre los métodos y lenguajes matemáticos que permiten tratarlos.
3. Sensibilidad ante las cualidades estéticas de las composiciones geométricas, reconociendo su presencia en la naturaleza, en el arte y en la técnica.
4. Interés y gusto por la descripción verbal precisa de figuras y composiciones geométricas.
5. Curiosidad e interés por investigar sobre figuras y configuraciones geométricas en el plano.
6. Sentido crítico ante las representaciones geométricas utilizadas para transmitir información de diferente naturaleza.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
7. Perseverancia en la búqueda de soluciones a los problemas geométricos y en la mejora de las ya encontradas.
8. Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas espaciales desde distintos puntos de vista.
9. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas geométricos distintas de las propias.
10. Sensibilidad y gusto por la realización sistemática y presentación cuidadosa y ordenada de trabajos geométricos.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Reconocemos figuras geométricas en los objetos que nos rodean cuando hacemos abstracción de casi todas sus propiedades y limitamos su caracterización al tamaño y la forma. Muchos objetos del entorno social tienen formas geométricas estándar que invitan a su reproducción, manipulación y transporte.

El concepto de plano se puede presentar como abstracción de las caras o superficies de determinados objetos, la superficie del agua en reposo, o bien de cortes o secciones realizadas con una sierra o cuchillo. También los marcos o encuadres como puertas, arcos, ventanas, sugieren planos. La idea de plano va acompañada por la de línea recta; la dirección constante es uno de los elementos característicos de la línea. La línea recta se presenta al dibujar sobre el borde de una regla, como intersección de planos, mediante corte o doblez, como trayectoria a seguir, camino más corto, eje de simetría o rotación, rayo de luz y línea de visión. Las necesidades de reproducir o representar una determinada superficie es lo que ha llevado a los sistemas de representación; pero los sistemas tienen interés en tanto que permiten ubicar objetos y representar sus transformaciones.

Fenómenos relativos a figuras y superficies son muy numerosos, entre ellos podemos considerar los siguientes: láminas; piezas de tela, papel o piel; terrenos y locales; divisiones políticas y administrativas de un territorio; superficies que limitan líquidos; superficies en un recinto y modo de cubrirlas (empapelado, enmoquetado, enlosado, acristalado, etc.); superficies agrícolas, urbanas o de vias de comunicación; pantallas o superficies reflectantes; huellas y huecos, etc.

La fenomenología de los conceptos de la geometría plana es más amplia y extensa; las ideas aquí señaladas recogen parte de los fenómenos más importantes de nuestro medio natural y social para este tema.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

La geometría del plano tiene una gran riqueza de modelos, expresada mediante una variedad de materiales y recursos prácticamente ilimitada. Son varias las aproximaciones que se pueden realizar para clasificar la numerosa información disponible en este campo, nosotros seguimos la elaborada por Alsina, Burgués y Fortuny.

Entre los modelos una primera distinción se establece entre modelos fijos y modelos móviles o desmontables, Los modelos fijos sirven para presentar conceptos aislados, así hay modelos para segmentos, ángulos, polígonos y figuras planas, en general, entre los que conviene destacar el geoplano que permite estudiar los conceptos geométricos con diferentes niveles de complejidad. Los modelos móviles comprenden las descomposiciones de polígonos o cualesquiera figura plana; los mosaicos; tangrams; poliminós; cuadrados y triángulos descomponibles para visualizar teoremas. Todos estos modelos son manipulativos; también hay diferentes modelos de papeles pautados para realizar representaciones geométricas planas. La representación gráfica puede ser exacta, mediante un cambio de escala, o en perspectiva. Los diferentes niveles de abstracción que se pueden considerar nos determinan distintos tipos de representaciones geométricas, en las que la abstracción de los elementos y relaciones que se tienen en cuenta es cada vez mayor. Los tipos de representación más usuales son: reproducción de modelos; dibujos descriptivos; dibujos en perspectiva; mapas y dibujos a escala; dibujo geométrico en dos dimensiones; construcciones geométricas clásicas; esquemas; grafos. Dentro de la geometría analítica hay también varias posibilidades para representar algebraicamente los elementos geométricos destacables.

La idea de material en geometría es también muy amplia. Alsina, Burges y Fortuny distinguen grandes familias de materiales: para dibujar; para leer; para el descubrimiento de conceptos; materiales que dan forma a modelos; para mostrar aplicaciones; para resolver problemas; para demostraciones y comprobaciones. Estas familias no son disjuntas, y en cada una de ellas se puede incorporar una larga lista de producciones, muchas de ellas en casas comerciales y otras elaboradas artesanalmente por el profesorado. Idea importante para el material es la necesidad de considerar el aula como laboratorio, e incluso a veces como taller. Hay que evitar determinados errores en el uso del material tales como una excesiva sofisticación; la poca cantidad; las limitaciones en su manejo; la no adecuación con los conceptos; la creencia en una virtualidad inmediata, etc. El material debe servir para una de las siguientes funciones: visualizar, construir, dibujar, medir o jugar.

5. Errores y dificultades.

Los niveles de conocimiento en Geometría estudiados por los esposos Van Hiele y las fases de aprendizaje que determinaron tienen la misma validez para los conceptos y estructuras concepturales de la geometría del plano que para los de la geometría del espacio, por este motivo no vamos a repetir aquí las consideraciones hechas en el tema anterior. Entre los errores específicos de la geometría del plano señalamos: la confusión entre el perímetro y el área, ya detectado por Galileo; dificultades en comparar superficies que no son rectangulares; dificultades para medir superficies que no son rectangulares; dificultades para contar unidades no enteras, cuando la superficie aparece cuadriculada; errores producidos al establecer proporcionalidades inadecuadas entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.

Los trabajos de Hart y las pruebas APU proporcionan información valiosa sobre errores en conceptos geométricos básicos. Los trabajos de Fielker incluyen actividades para detectar errores, corregirlos y superar las dificultades en el aprendizaje de la geometría del plano.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Periodos y momentos interesantes para el trabajo en este tema son:

1. La geometría en Babilonia y Egipto.
2. La obra de Euclides. Escuela de Alejandría.
3. La geometría en la cultura árabe.
4. El Renacimiento.
5. Geometría analítica. Descartes y Fermat.
6. Los fundamentos de la geometría. Geometrías no euclídeas.

7. Bibliografía:

Alsina, Burgués y Fortuny (1987); Alsina, Burgués y Fortuny (1988); Alsina, Pérez y Ruiz (1989); Boyer (1986); Castelnuovo (1981); Coriat y otros (1989); Coxeter (1971); Fielker (1983); Freudenthal (1983); Guzmán, Colera y Salvador (1987); Hart (1984); Hilbert (1991); Foxman (1980); Foxman (1981); Lindquist y Shulte (1987); Lang y Murrow (1988); Luengo y Grupo Beta (1990); Luelmo (1987); Martínez y Juan (1989); Meserve (1983); Henderson (1973); O'Daffer y Clemens (1977); Olmo, Moreno y Gil (1989); Pedoe (1979); Puig Adam (1961); Roanes (1979); Romberg (1991); Van der Waerden

(1983); Van Hiele (1985).

Tema 16
Título: Transformaciones en el plano.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos relativos a este tema aparecen dentro del Bloque 3 de contenidos que señala el Ministerio para Educación Secundaria Obligatoria.

En el Proyecto de la Junta de Andalucía estos contenidos aparecen en un bloque conjunto de Geometría, el número 4.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Regularidades y simetrías en figuras y composiciones geométricas. Teselaciones regulares y semirregulares del plano.
2. Transformaciones euclídeas. Propiedades de las isometrías.
3. Simetrías en el plano. Propiedades de las traslaciones. Simetrías en una figura plana.
4. Traslaciones en el plano. Propiedades de las simetrías. Simetrías con deslizamiento.
5. Giros en el plano. Propiedades de los giros. Simetría central.
6. Producto de simetrías en el plano. Grupo de las isometrías en el plano. Grupo de simetría de una figura plana. Rosetones. Frisos.
7. Figuras semejantes. Características de las figuras de igual forma. Teorema de Thales. Propiedades de figuras y cuerpos semejantes.
8. Representaciones a escala.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos lenguajes:</u>
1. Reconocer y describir las diferentes simetrías de una figura plana.
2. Reconocer la transformación o transformaciones isométricas que relacionan a dos

figuras congruentes.
3. Clasificar figuras congruentes y semejantes.
4. Identificar distintos representantes del vector de una traslación.
5. Identificar el centro y el ángulo de una rotación.
6. Interpretar las diferentes notaciones para una escala.

b) Algoritmos y destrezas:
7. Construir la figura isométrica de un polígono, considerando diferentes posiciones relativas entre el eje y el polígono.
8. Transformar una figura simple en el plano cartesiano.
9. Construir una figura plana que cumpla unas condiciones de simetría establecidas.
10. Construir modelos geométricos, esquemas, planos y mapas de figuras planas o espaciales, utilizando la escala y los instrumentos, materiales y técnicas adecuados en cada caso.
11. Obtener el factor de escala de figuras semejantes.
12. Deducir las propiedades de una figura por medio de transformaciones y de coordenadas.

Estrategias.

1. Establecer una secuencia de transformaciones isométricas que relacionen dos figuras congruentes.
2. Establecer una secuencia de transformaciones semejantes que relacionen dos figuras con la misma forma.
3. Emplear las isometrías y semejanzas en la resolución de problemas geométricos.
4. Identificar las transformaciones que definen un friso; construir un friso que satisfaga unas condiciones establecidas.
5. Recomponer los diferentes polígonos regulares empleando distintas composiciones de simetrías.
6. Describir recorridos en el plano euclídeo empleando giros y traslaciones.

Actitudes.

a) <u>Referentes a la apreciación de las matemáticas:</u>

1. Sensibilidad ante las cualidades estéticas de figuras planas con diferente grupo de simetrías; sensibilidad ante las proporciones entre las diferentes partes de una figura.
2. Interés y gusto por la descripción geométrica precisa de la regularidad de una figura o una composición geométrica.
3. Curiosidad e interés por investigar las relaciones entre las diferentes dimensiones de una figura o una configuración.
4. Sentido crítico ante las representaciones a escala utilizadas para transmitir información de diferente naturaleza.
5. Reconocer y valorar la utilidad de las diferentes transformaciones isométricas y semejanzas para establecer relaciones entre figuras, representarlas, establecer propiedades y resolver situaciones problemáticas del entorno físico.

b) <u>Referentes a la organización y hábitos de trabajo:</u>

7. Perseverancia en la búsqueda de regularidades geométricas y en la expresión adecuada de las ya encontradas.
8. Flexibilidad para establecer relaciones geométricas entre dos figuras distintas o dentro de una misma figura.
9. Interés y respeto por las transformaciones geométricas encontradas, distintas de las propias.
10. Sensibilidad y gusto por la realización sistemática de transformaciones geométricas y su presentación cuidadosa y ordenada.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Las transformaciones surgen de la distinción y comparación de figuras; la estructuración de figuras mediante las transformaciones que las dejan invariantes permite también su comparación, distinción y clasificación. La idea de transformación está relacionada con las de aplicación o correspondencia entre figuras y con el movimiento de figuras. Ejemplos naturales son las proyecciones mediante focos luminosos de superficies planas, que producen imágenes con sombras y partes iluminadas. También constituyen una fuente de fenómenos importantes las reflexiones que se producen mediante el espejo, un libro de espejos con distintos ángulos o un caleidoscopio de tres o cuatro caras. Las figuras articuladas en torno a un eje sobre el que pueden girar, los movimientos a distancia constante de un punto o de dos puntos son fenómenos que producen las nociones de giro o de eje de simetría. También las trayectorias lineales sirven para ejemplificar el concepto de traslación.

Hay distintos fenómenos en la naturaleza, como los cristales de nieve, los minerales o algunos seres vivos, con simetría central. La simetría axial es igualmente, una característica usual en los animales vertebrados e invertebrados y en muchos de los invertebrados como insectos, crustáceos, etc.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

El doblado y recorte de papel o también el doblado e impresión posterior de una mancha son modelos adecuados para representar una simetría o una composición de simetrías. Los espejos y superficies reflectantes combinados con figuras geométricas ofrecen modelos adecuados de simetría axial; la combinación de dos espejos - denominada libro de espejos- es un modelo para los giros. En los motivos ornamentales, celosías y diseños decorativos elaborados con figuras geométricas simples, rosetones, frisos y mosaicos, principalmente, encontramos modelos de muy diversos grados de complejidad relativos a transformaciones geométricas. El crecimiento orgánico también proporciona modelos de figuras semejantes.

En cuanto a materiales adecuados para el estudio de simetrías podemos citar el "mira" o reflex, los juegos de espejos con figuras de las que hay que comprobar su simetría o lograr una figura más compleja duplicando simétricamente una porción de la misma; el juego de billar también ofrece posibilidades para estudiar simetrías; los caleidoscopios; el pantógrafo y simetrizadores; las hojas transparentes y el retroproyector; mecanos; distintos tipos de papel pautado; diferentes tipos de mapas de un territorio, hechos a distintas escalas; fotografías de un mismo objeto y el propio geoplano, son otros tantos materiales y recursos adecuados para estos contenidos. Muchos de los materiales y la mayor parte de las consideraciones hechas para el tema anterior resultan pertinentes también en este tema, sin olvidar por supuesto la regla y el compás.

5. Errores y dificultades.

Una primera dificultad estudiada en las transformaciones isométricas está en el reconocimiento de los invariantes para cada una de las transformaciones. Las traslaciones parecen presentar mayor dificultad en el reconocimiento de la invariancia de longitudes.

También se detectan dificultades según la orientación que tiene la transformación: las traslaciones de vector horizontal o vertical se realizan incluso más fácilmente que las de vector oblícuo; igualmente, ocurre con las simetrías de eje horizontal o vertical sobre las que tienen eje oblícuo. Los giros presentan un tipo de dificultad específico: se considera que se ha producido un giro incluso en aquellos casos en los que se trata de una traslación con distancia constante de un punto relevante de la figura inicial y su transformada respecto del supuesto centro de giro. También hay errores en no valorar como necesaria la distancia constante al centro de giro y sólo valorar el cambio de orientación. La coordinación de estos dos datos: distancia constante al centro y cambio de orientación de la figura debida a la rotación, es lo que constituye la noción de giro, y la dificultad de los alumnos se produce por dar prioridad a uno sólo de estos componentes.

Se han detectado también dificultades debidas al tipo de tareas o materiales a emplear, a la presencia o no de una cuadrícula y, por supuesto, a la mayor o menor complejidad de los conceptos desarrollados.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Algunos momentos históricos de interés para el trabajo con este tema son:

1. Matemática griega. Apolonio y Ptolomeo.
2. Geometría Arabe y el arte de la decoración.
3. El Renacimiento. Teoría de la perspectiva. Cartografía.
4. Geometría proyectiva. Descartes y Fermat.
5. Geometría proyectiva. Desargues.
6. Geometría proyectiva. Poncelet y Chasles.
7. El programa de Erlangen.

7. Bibliografía:

Abott (1976); Agostini (1986); Alsina, Burgués, Fortuny (1988); Alsina, Pérez, Ruiz (1989); Alsina, Trillas (1987); Bossard (1977); Boyer (1986); Castelnuovo (1981); Colerus (1955); Coriat y otros (1989); Coxeter (1971); Dienes & Golding (1980); Fielker (1987); Freudenthal (1983); García Blanco (1991); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Hart (1984); Hilbert (1991); Hilbert, Cohn-Vossen (1983); Jacobs (1982); Lang & Murrow (1988); Lindquist, Shultz (1987); Luelmo (1987); Lyndon (1986); Martínez, Juan (1989); Meserve (1983); Morris (1986); Pedoe (1982); Piaget (1975); Piaget y García (1982);Puig Adam (1961); Roanes (1979); Steinhaus (1986); Stevens (1986); Wright (1985); Wells (1991).

Tema 17
Título: Magnitudes y Medida.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

El contenido relativo a este tema constituye el Bloque 2, *"Medida, estimación y cálculo de magnitudes"*, de los establecidos por el Ministerio para Educación Secundaria Obligatoria. En el proyecto de la Junta de Andalucía el Bloque 1 de contenidos se denomina Números y Medidas, e incluye la totalidad de los contenidos sobre este tema para la Educación Secundaria Obligatoria.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Medida de magnitudes. Medida como información cuantitativa de tamaños y duraciones. Unidades de medida.
2. Sistemas de medida. Ampliación del Sistema Métrico Decimal. Múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales para longitudes, áreas, volúmenes y masas. Unidades astronómicas. Unidades de medida de uso común en la zona.
3. Medida del tiempo. Relación de las unidades de tiempo con fenómenos astronómicos, en nuestro sistema de calendario y en los de otras culturas. Expresión de medidas temporales: notación compleja y decimal. Operaciones con unidades de tiempo.
4. Medida de ángulos. Sistema sexagesimal de medida de ángulos. Medida de diedros.
5. Medidas aproximadas. Estimación de medidas. Margen de error en la estimación y aproximación de medidas.
6. Medidas indirectas. Relación entre las medidas lineales y las de área o volumen en un cuerpo. Fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.
7. Magnitudes proporcionales. Significado de la proporcionalidad directa de magnitudes. Expresiones usuales de la proporcionalidad directa: tantos por ciento, tasas, factores de proporción y de conversión. Significado de la proporcionalidad inversa de magnitudes. Problemas y aplicaciones de la proporcionalidad simple.

8. Proporcionalidad compuesta. Interés y descuento. Problemas y aplicaciones de la proporcionalidad compuesta.
9. Instrumentos de medida convencionales y locales. Precisión de los instrumentos de medida.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes:
1. Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y transmitir informaciones sobre el tamaño de los objetos.
2. Expresión de las medidas efectuadas en las unidades y con la precisión adecuadas a la situación y al instrumento utilizado.
3. Expresión de una proporcionalidad directa de magnitudes y de una razón entre cantidades mediante diferentes convenios y notaciones.
4. Formulación verbal de problemas de proporcionalidad, de las magnitudes que se relacionan y del proceso y cálculos empleados para resolverlos, confrontándolos con otras opciones posibles.

b) Algoritmos y destrezas:
5. Utilización de los instrumentos de medida habituales.
6. Utilización de las fórmulas de longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos para realizar medidas indirectas.
7. Acotación de los errores cometidos al estimar, medir o aproximar una magnitud.
8. Utilizar diferentes procedimientos (factor de conversión, regla de tres, tanto por ciento, manejo de tablas y gráficos,...) para efectuar cálculos de proporcionalidad.
9. Convertir cantidades de una expresión compleja a incompleja, y recíprocamente.

Estrategias.

1. Seleccionar e interiorizar referentes propios para unidades de las magnitudes más usuales.
2. Elección de la unidad más adecuada para medir una cantidad en un contexto determinado.

3. Elección de un referente adecuado para estimar una cantidad por comparación.
4. Descomponer y recomponer una cantidad para estimar adecuadamente cada una de sus partes.
5. Controlar el margen de error cometido al realizar la estimación de una cantidad.
6. Cuantificar de modo directo, indirecto o por estimación las cantidades más significativas dentro de una situación determinada.
7. Aplicar los cálculos y operaciones para resolver problemas en los que intervienen magnitudes relacionadas mediante proporcionalidad directa o inversa.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas.
1. Reconocimiento y valoración de la utilidad de la medida para transmitir informaciones precisas relativas al entorno.
2. Reconocimiento y valoración de la medida como elemento de relación entre diferentes lenguajes, conceptos y métodos matemáticos.
3. Incorporación al lenguaje cotidiano de los términos de medida para describir objetos, espacios y duraciones.
4. Disposición favorable a realizar, estimar o calcular medidas de objetos, espacios y tiempos en situaciones en las que resulta necesario o aconsejable.
5. Valoración crítica de las informaciones sobre la medida de las cosas, de acuerdo con la precisión y unidades en que se expresan y con las dimensiones del objeto al que se refieren.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
6. Revisión sistemática del resultado de las medidas directas o indirectas, aceptándolas o rechazándolas según se ajusten o no a los resultados esperados.
7. Hábito de escribir los resultados numéricos de las mediciones expresando las unidades de medida empleadas.
8. Cuidado y precisión en uso de los diferentes instrumentos de medida y en la realización de mediciones.
9. Sentido de la proporcionalidad entre figuras; distinción de situaciones en las que se puede o no se puede utilizar.

3. Fenomenología de los conocimientos.

El trabajo con las magnitudes comienza estableciendo comparaciones entre objetos en relación con una cualidad determinada. Para establecer esas comparaciones se emplean términos relacionales, que son adjetivos que se pueden agrupar en parejas opuestas. Así, en el caso de la longitud tenemos: corto-largo, cerca-lejos, ancho-estrecho, alto-bajo, profundo-superficial, grueso-delgado. En superficie empleamos: amplio-reducido, holgado-ajustado, ancho-estrecho, ahogado-desahogado; también hay términos que no tienen un opuesto claro: apretado, extenso, vasto, profundo, dilatado, espacioso, despejado, angosto, etc. Los comparativos de volumen son más genéricos: grande-pequeño, voluminoso-reducido, o bien remiten a términos ya citados para la longitud o la superficie.

Idea importante en los fenómenos asociados a estas magnitudes es la rigidez o indeformabilidad. Para hablar de longitud es preciso tener rigidez en una dirección; para hablar de superficie es necesaria la rigidez en dos direcciones o permanencia de un contorno, mientras que la medida del volumen necesita rigidez en las tres direcciones. Aunque estamos trabajando con alumnos de Secundaria es adecuado considerar aquellas trasnformaciones que dejan invariante una longitud, superficie o volumen y su carácter reversible.

Los fenómenos en los que se presentan longitudes se pueden considerar en una de estas tres clases: dimensiones de un objeto, distancias entre objetos y trayectoria de un móvil. En el caso de las trayectorias las suponemos rectilíneas, pero se puede generalizar la idea de longitud de una trayectoria poligonal o curvilinea mediante la noción de rectificación.

Los fenómenos en los que se presentan superficies se pueden considera en una de estas tres clases: superficies que limitan a un objeto, huellas o marcas dejadas por un objeto, extensión barrida por un segmento o línea que se desplaza. Los fenómenos en los que se presentan volúmenes se pueden considerar en una de estas clases: volumen ocupado por un objeto, volumen o espacio hueco dejado por un cuerpo y volumen barrido por una superficie que se desplaza según una dirección distinta de la de su plano.

Los ángulos también los podemos considerar en situaciones estáticas o dinámicas - y, dentro de las primeras-, con soporte físico presente o ausente.

La proporcionalidad directa entre magnitudes es una relación que se presenta en multitud de fenómenos naturales, y convencionales. Entre los primeros encontramos las relaciones que se pueden establecer entre un número de objetos (p.ejp. sillas) y el número correspondiente de algún elemento destacable dentro de esos objetos (p. ejp. patas de las sillas); situaciones de mezclas de pinturas u otros productos, que se necesitan para obtener un determinado resultado; recetas de cocina; dimensiones de objetos semejantes; problemas de sombras; velocidades; gastos producidos al adquirir un producto; resultados del trabajo realizados por un número variable de personas; recorridos de velocidad constante, etc. En todos estos casos se trata de fenómenos a los que la proporcionalidad directa ofrece un esquema de interpretación y explicación adecuado. Consideraciones similares se pueden hacer con la proporcionalidad inversa o la compuesta.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Los modelos de las magnitudes longitud, superficie, volumen y amplitud son el segmento, el polígono, el poliedro y el ángulo, respectivamente; esto es lo que justifica el estudio dentro del cuestionario de matemáticas de unos conceptos y procedimientos con unas connotaciones físicas tan fuertes. Pero el modelo geométrico no es suficiente para el desarrollo de cada una de las magnitudes, ya que es necesario completarlo con las ideas de equivalencia entre cantidades, división de una cantidad en partes equivalentes y expresión de una cantidad mediante un número que relaciona esa cantidad con otra fija de referencia - la unidad de medida-. El segundo modelo de estas magnitudes es el modelo de los números reales positivos o conjunto de medida sobre cada una de las magnitudes. Y un tercer modelo es el conjunto de los números naturales, decimales con dos o tres cifras decimales o bien racionales de denominador acotado. Cualquiera de estos tres conjuntos se puede utilizar para estimar cantidades. La estimación es una tercera opción para expresar las cantidades de una magnitud.

Una cantidad de longitud, superficie, amplitud o volumen se puede representar mediante una figura o cuerpo geométrico, mediante un número real que expresa su medida en relación a una unidad, o mediante un número con coma (o fracción de denominador simple) que exprese una estimación de esa medida. Materiales usuales en el trabajo con longitudes son barras, varillas, regletas, cartulinas, hilos, cuerdas, gomas o cualquier tipo de objetos rígidos con una dimensión predominante. Para el trabajo con la masa se emplean balanzas de platillos, clavos, tuercas, canicas, arena, piedras, frutos, etc. En el estudio de la capacidad se consideran distintos tipos de líquidos y áridos, recipientes de distintas formas y tamaños, probetas graduadas, etc. Para el tiempo: relojes de arena, cronómetros, diferentes tipos de relojes, velas graduadas, etc. Los materiales para el estudio de superficies y volúmenes se han indicado con anterioridad; reiteramos de nuevo el papel cuadriculado y con diferentes tramas, los distintos tipos de tangram, poliminós, polidiamantes, y poliexes y, en general, los polígonos regulares. En el caso del volumen tenemos los policubos y los sólidos para ensamblar.

Los diferentes instrumentos de medida convencionales y adaptados a diversas profesiones: metro de carpintero, cinta métrica de sastre, cinta de agrimensor, etc, etc. presentan una variedad de opciones que da riqueza práctica y una dimensión cultural indudable a los contenidos de este tema. Aunque el trabajo con monedas y billetes, expresión de una cantidad de dinero en distintas formas, problemas elementales de compra y venta, etc, se han trabajado en Primaria puede aprovecharse el desarrollo de estos contenidos para repasar y afianzar las nociones fundamentales.

5. Errores y dificultades.

Una primera dificultad es la que se deriva del estudio de estos conceptos sin manipular y trabajar con objetos reales. El estudio de las distintas magnitudes es inseparable de los fenómenos y situaciones en las que se presenta. Enfatizar el dominio del sistema métrico decimal sin referencias concretas es una orientación metodológica plagada de dificultades.

Hay errores que se producen por un uso indebido de los sentidos, como ocurre al comparar pesos visualmente, o por efectos de perspectiva.

Otros errores se producen por uso de instrumentos inadecuados y por mal manejo de instrumentos; también hay errores que se producen por emplear procedimientos deficientes o por elegir una unidad inadecuada. Los errores de apreciación de una cantidad deben subsanarse mediante controles del margen de variación tolerable en la estimación realizada y en el sentido adecuado o inadecuado que tiene un resultado dentro de un contexto. No conviene proponer a los jóvenes la resolución de problemas que contengan datos erróneos, irreales o carentes de sentido ya que debe habituárseles a que toda medida tiene un sentido en el contexto en el que aparece. Hay que evitar escrituras erróneas o que no incluyan la unidad cuando se expresa una cantidad.

El esquema de la proporcionalidad directa suele presentar varios tipos de errores a los alumnos. Un primer error es considerar como proporcionalidad directa relaciones de otros tipos; para ello conviene establecer criterios muy claros de reconocimiento, tanto para el caso directo como para el inverso. Un segundo nivel de errores se produce en las situaciones de proporcionalidad; se distinguen dos casos principales: cambio de la relación multiplicativa por una aditiva e inversión de la relación (de producto a división o recíprocamente). Estos errores han sido estudiados recientemente por Hart, Streefland, Karplus y otros, y se encuentran en proceso de sistematización didáctica avanzado.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Algunos de los datos históricos más destacables en el estudio y programación de este tema son:

1. Matemática griega; teoría de la proporción.
2. Los primitivos astrónomos: medición de distancias y duraciones.
3. La alta Edad Media: los cálculos para la fecha de la Pascua.
4. La baja Edad Media: aritméticas comerciales.
5. La era de las exploraciones y descubrimientos: búsqueda de patrones universales.
6. La Revolución Francesa y el sistema métrico decimal.
7. El sistema internacional, la normalización de unidades y homogeneización de métodos.

7. Bibliografía:

Abellanas y otros (1958); Asimov (1984); Beaumont, Cenetis, Smart (1986); Boyer (1986); Capel (1982); Costello (1991); Crombie (1979); Chamorro, Belmonte (1988); Dienes y Golding (1980); Fiol, Fortuny (1990); Freudenthal(1983); Hall (1985); Hart (1984); Hempel (1974); Hiebert, Behr (1988); Higgins (1979); Kula (1980); Lovell (1977); Morrison y Morrison (1984); Mc Mahon, Tyler (1986); Murray (1982); Nelson,

Reys (1976); Olmo, Moreno,Gil (1989); Piaget, Inhelder (1982); Puig Adam (1960); Rey Pastor (1941); Roanes (1979); Romberg (1991), Segovia, Castro, Rico y Castro (1989); Streefland (1991).

Tema 18
Título: Estadística.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos relativos al tema de Estadística aparecen contemplados en el Bloque 4, "Interpretación, representación y tratamiento de la información" de los establecidos por el Ministerio para Educación Secundaria Obligatoria.

En el Proyecto de la Junta de Andalucía el Bloque 5 de contenidos se denomina *"Tratamiento de la información Estadística y del Azar"*, y en él se incluyen la totalidad de los contenidos sobre este tema para Educación Secundaria Obligatoria.

En el documento del Ministerio relativo a la Estructura y Contenidos para el Bachillerato encontramos que se establece un bloque de Estadística y Probabilidad para el Primer Curso de la especialidad Ciencias de la Naturaleza y de la Salud e igualmente para la especialidad Tecnología.

En la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales encontramos el bloque de Estadística y probabilidad dentro de los contenidos señalados para primer y segundo cursos.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Obtención de información sobre fenómenos aleatorios. Encuestas y sondeos de opinión. Muestras y su representatividad. Recogida y organización de los datos. Frecuencias absolutas, relativas y porcentajes.
2. Representación gráfica de las distribuciones de frecuencia a través de polígonos de frecuencia, histogramas, diagramas de sectores, gráficos de barras, pictogramas y otros.
3. Parámetros estadísticos. Los parámetros centrales y de dispersión como resumen de un conjunto de datos estadísticos. Algoritmos para calcular parámetros centrales y de

dispersión sencillos.

4. Distribuciones bidimensionales. Correlación lineal. Recta de regresión. Medida de la correlación. Otros tipos de regresión.

5. Estimación de parámetros. Estimador puntual. Intervalos de confianza.

6. Contrastes de hipótesis. Tipos de errores. Contraste paramétrico.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes:

1. Elaboración de preguntas en cuestionarios. Explicitación de la información que se quiere obtener.

2. Organización de datos, elaboración de tablas e interpretación intuitiva de la información obtenida.

3. Utilización e interpretación de los parámetros de una distribución y análisis de su representatividad en relación con el fenómeno que se estudia.

4. Empleo de la inferencia estadística para derivar conclusiones correctas del estudio de una muestra y obtener información sobre fenómenos sociales y económicos.

b) Algoritmos y destrezas:

5. Utilización de distintas fuentes documentales (anuarios, revistas especializadas, bancos de datos, etc.) para obtener información de tipo estadístico.

6. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.

7. Elección de los parámetros más adecuados para describir una distribución en función del contexto y de la naturaleza de los datos y obtención de los mismos, utilizando los algoritmos tradicionales o la calculadora.

8. Detección de falacias en la formulación de proposiciones que utilizan el lenguaje estadístico.

9. Costrucción de gráficas a partir de tablas estadísticas, eligiendo en cada caso el tipo de gráfica y medio de representación más adecuado.

10. Explicitación de los convenios empleados en una gráfica que pueden afectar a su interpretación. Detección de errores.

11. Cálculo de los parámetros de una distribucción unidimensional, incluidas las medidas de posición central..

12. Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación y de la ecuación de la recta de regresión en distribuciones bidimensionales.

13. Obtener el valor de un parámetro desconocido en una distribución conocida de una población mediante una muestra.
14. Admitir o rechazar hipótesis relativas a valores de ciertos parámetros de una población.

Estrategias generales.

1. Planificación y realización individual y colectiva de tomas de datos utilizando técnicas de encuesta, muestreo, recuento y construcción de tablas estadísticas.
2. Seleccionar los parámetros que mejor transmiten una determinada información sobre una muestra.
3. Enunciar conjeturas sobre el comportamiento de una población de acuerdo con los resultados relativos a una muestra.
4. Valorar cualitativa y cuantitativamente la significatividad de las muestras empleadas para el estudio de una población.
5. Diseñar un experimento estadístico para estudiar un problema, ejecutar el experimento y comunicar los resultados.
6. Determinar la dependencia entre las variables de una distribución bidimensional e interpretar su valor de acuerdo con el contexto.
7. Enunciar hipótesis estadísticas y contrastarlas adecuadamente.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:
1. Reconocimiento y valoración de la utilidad de lenguaje estadístico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.
2. Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en el tratamiento y representación gráfica de informaciones de índole muy diversa.
3. Sensibilidad, interés y valoración crítica del uso del lenguaje estadístico en informaciones y argumentaciones sociales, políticas y económicas.
4. Interpretar adecuada y críticamente las representaciones gráficas de datos en los medios de información, dentro del contexto que se está tratando en cada caso.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:

5. Planificar sistemáticamente la toma de datos, realizarla con precisión y rigor, expresar los datos obtenidos de forma ordenada para facilitar su comprensión y tratamiento posterior e interpretarlos de forma ajustada.
6. Reconocimiento y valoración del trabajo en equipo como la manera más eficaz para realizar determinadas actividades de planificación y recogida de datos.
7. Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones y encuestas.

3. Fenomenología de los conocimientos.

En toda sociedad articulada ha sido necesario disponer de algún sistema organizado para recoger, clasificar, resumir, analizar datos y realizar algún tipo de inferencias a partir de los datos. Pero hasta el siglo XVII no surge la Estadística como estudio sistemático de todo aquello que se refiere al Estado: ciudadanos, recursos, organización y sistematización. En términos generales, la Estadística proporciona métodos para el tratamiento de las masas de datos de observación y su aplicación para la toma de decisiones; gran parte de su evolución y desarrollo se ha debido a la necesidad de estudiar e interpretar de modo coherente multitud de fenómenos sociales o naturales e inferir conclusiones científicamente válidas a partir de los datos analizados.

Aunque el campo de fenómenos sobre los que se sustenta la Estadística es, en la práctica, ilimitado, hay algunas áreas que han destacado por plantear problemas importantes a la Estadística y emplear sus métodos y técnicas de manera sistemática. Entre ellas podemos señalar las siguientes.

Administración Pública, con el estudio de movimientos naturales de población: nacimientos, matrimonios, migraciones y defunciones; datos de agricultura, ganadería, pesca industria, transportes y comunicaciones; comercio exterior, finanzas; precios y salarios; trabajo, seguridad y acción social; sanidad, enseñanza y expansión cultural; turismo y servicios; justicia; viviendas, locales, edificios y urbanismo; etc.

Economía, mediante el estudio de las macromagnitudes de una región, país o comunidad de paises; estudios comparativos; evolución de mercados; predicción de voto y valoración ante determinadas cuestiones políticas relevantes.

Psicología y Educación. En psicología experimental se estudian las actitudes y comportamientos de los individuos, se determinan diversos índices y coeficientes para valorar la denominada capacidad intelectual, se analizan los factores que componen la inteligencia. En educación se realizan multitud de evaluaciones con diversas referencias (normas o criterios); se elaboran instrumentos cuya fiabilidad y validez debe conocerse; se clasifica u orienta a los sujetos para que realicen determinadas actividades y se encaucen profesionalmente.

Biología, Medicina y Veterinaria: las ciencias de la vida y la salud, mediante el estudio de poblaciones, herencias, epidemiología, variación de parámetros biológicos etc, proporcionan también un amplio campo de fenómenos sobre los que la Estadística ha puesto a prueba sus métodos y ha elaborado otros nuevos.

También la Meteorología, con el estudio de las series temporales y la predicción de los cambios de temperatura, velocidad del viento, nubes, lluvias y otros meteoros. El estudio de los movimientos sísmicos, etc.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

La Estadística, en la sociedad actual, es una materia cultural imprescindible para formación del individuo. En el tema que nos ocupa, la estadística descriptiva corresponde a los cursos de Secundaria, mientras que los inicios a la estadística inductiva se realiza en Bachillerato, y sólo en algunas especialidades.

Al igual que vimos en el tema de funciones con los fenómenos deterministas, en el estudio de los fenómenos aleatorios tenemos cuatro sistemas simbólicos o modelos. Los cuatro modelos son: descripción verbal; tablas numéricas; representaciones gráficas; y fórmulas, símbolos y leyes generales. Las peculiaridades de los sistemas simbólicos de la Estadística y sus posibilidades para destacar unos determinados rasgos o características y ocultar otros, ponen de manifiesto que la representación que se puede realizar en base a cada uno de estos sistemas simbólicos puede variar, y que ésto ocurre inevitablemente cuando el problema en estudio tiene un grado considerable de complejidad.

El sistema de trabajo usual en estadística descriptiva es la encuesta, que constituye un conjunto de técnicas adaptadas a todo tipo de información y a cualquier población. Entre las encuestas hay diversas clasificaciones: exhaustivas y parciales; directas e indirectas; sobre hechos y de opinión. Material o instrumento clave en el diseño de encuestas es el cuestionario o conjunto de preguntas sobre los hechos o aspectos que interesa conocer en un estudio o investigación. La determinación y selección de las preguntas, la formulación de preguntas, la preparación del cuestionario y su distribución, aplicación y recogida, constituye todo un campo de trabajo muy tecnificado. Otro material, cuya aplicación a la enseñanza en niveles medios está progresando, lo constituyen los paquetes informáticos para el tratamiento estadístico de datos, que permite una dinámica de trabajo desligada de las dificultades del cálculo manual y de los errores que se producen (PRODEST, SPSS, BMDP, en la versión para PCs, o STAT VIEW y SISTAV para Macintosh). La calculadora, manual o programable, es ya un material imprescindible en el trabajo estadístico.

Hay multitud de publicaciones que incluyen tablas de datos recogidos sobre un determinado campo de trabajo o actividad social, más o menos especializada. El soporte informático está permitiendo manejar una cantidad mucho mayor de datos e informaciones, de los que las bases de datos nos ofrecen un ejemplo. Es conveniente que los alumnos de estos niveles conozcan y aprendan a utilizar anuarios estadísticos relativos a su medio social cercano, a obtener información, plantearse cuestiones y establecer diversas vías para responder a las mismas.

5. Errores y dificultades.

El estudio de la estadística en Secundaria y Bachillerato puede considerarse centrado en tres fases generales: recoger datos, organizar datos y extraer conclusiones de los datos organizados. Cada una de estas fases presenta su propio tipo de dificultades y genera unos determinados errores.

En los cursos iniciales, la fase de recogida de datos no suele presentar dificultad en la elección de la variable y en el modo de obtener la información ya que suelen estar bien delimitadas y su valoración se hace mediante preguntas simples, con poca opción para los equívocos. En estos casos se presentan errores de no distinguir entre población y muestra, y también aparecen sesgos en la elección de las muestras. En cursos superiores, cuando se quiere hacer un estudio más detallado y profundo, la elaboración de cuestionarios presenta una complejidad técnica que debe evitar las preguntas confusas o sesgadas, la reiteración y no contemplar el rango completo de posibles opciones. Este refinamiento de la capacidad para obtener los datos requeridos con el mínimo de interferencias y la máxima representatividad debe permitir una mejora progresiva en los alumnos.

La investigación APU, realizada por el HSMO inglés, puso de manifiesto unos rendimientos muy bajos en la interpretación de los parámetros de una distribución de frecuencias y en las valoraciones sobre esos parámetros hechas en base a tablas y representaciones gráficas. Un dominio rápido en la terminología y en la realización de algunos gráficos no supone que los alumnos estén capacitados para ejecutar correctamente los procesos de interacción y traducción entre los diferentes sistemas simbólicos de representación estadística.

Las dificultades y errores escolares en la inferencia estadística constituyen, en la actualidad, un campo de estudio e investigación, con avances recientes y temas abiertos pero no definitivamente resueltos.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Para el trabajo en este tema son de interés los siguientes periodos y autores:

1. Antecedentes de la Estadística: censos y encuestas.
2. El comienzo de la Estadística. Grount, Pascal y Fermat.
3. El desarrollo: Bernouilli, Laplace, Bayes.
4. La contribución de Gauss y Bessel.
5. La Estadística moderna: Pearson, Galton y Fisher.
6. La Estadística en el mundo científico y social actual.

7. Bibliografía:

Borrás, Carrillo y otros (1987); Boyer (1986); Calvo, Callejo, Aguilera, Martínez (1987); Cockcroft (1985); Colera (1990a); Colera (1990b); Collette (1985); Costello (1991); Engel (1988); Estepa (1990); Foxman, Martini, Tuson, Cresswell (1980); Freudenthal (1973); Garrett (1983); Gutiérrez (1983); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Guzmán, Colera, Salvador (1988); Grahan (1990); Guilford (1984); Jódar (1981); Kapadia, Borovcnik (1991); Martínez (1991); Morris (1989); Nortes Checa (1977); Nortes Checa (1987);

Pozo, Nortes (1991); Rico, Castro y otros (1987); Rios (1977); Rivadulla (1991); Watkins (1988); Romberg (1991); Székely (1986).

Tema 19
Título: Combinatoria.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Entre los contenidos establecidos por el Ministerio para Educación Secundaria Obligatoria no aparecen explícitamente los relativos a Combinatoria. Por el contrario, sí aparecen en el proyecto de la Junta de Andalucía para Secundaria, dentro del Bloque 5: *"Tratamiento de la información Estadística y del Azar"*, aunque con limitaciones.

En el documento del Ministerio para el Bachillerato las especialidades Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología incluyen un bloque de contenidos denominado Combinatoria para segundo curso; la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales contempla el estudio de la Combinatoria dentro del Bloque Aritmética y Algebra, tanto en el primer curso como en el segundo.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Producto de n números naturales consecutivos. Factorial de un número. Operaciones entre factoriales.
2. Subconjuntos de un conjunto . Subconjuntos ordenados, formación de todos los subconjuntos ordenados de un cardinal determinado. Variaciones de m elementos tomados de n en n. Variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.
3. Distintas formas de ordenar todos los elementos de un conjunto. Permutaciones de n elementos. Permutaciones circulares.
4. Formación de todos los subconjuntos con el mismo cardinal dentro de un conjunto de referencia. Combinaciones de m elementos tomados de n en n.
5. Números combinatorios. Triángulo de Tartaglia. Propiedades. Binomio de Newton.

6. Números figurados. Números poligonales. Relaciones entre números poligonales.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes:

1. Simbolizar mediante notación factorial un producto de naturales consecutivos.
2. Representar y simbolizar las variaciones, con o sin repetición, y las combinaciones de m elementos tomados de n en n, y las permutaciones de n elementos; expresar cada una de las notaciones anteriores mediante la fórmula operatoria correspondiente, empleando notación factorial o potencial.
3. Simbolizar y obtener el valor de los números combinatorios.
4. Desarrollar la potencia de un binomio.
5. Representar, calcular y simbolizar secuencias de números poligonales.

b) Algoritmos y destrezas:

1. Realizar cálculos con expresiones factoriales.
2. Calcular las variaciones de m elementos tomados de n en n, con o sin repetición, las combinaciones de m elementos tomados de n en n y las permutaciones de n elementos.
3. Utilizar las propiedades de los números combinatorios para realizar cálculos, simplificar expresiones o probar identidades.
4. Utilizar el desarrollo de la potencia de un binomio para efectuar cálculos, simplificar expresiones o probar identidades.
5. Establecer relaciones entre los términos y obtener términos sucesivos de una secuencia de números poligonales.

Estrategias.

1. Construir un modelo manipulativo que represente un problema sencillo de combinatoria y obtener una regla para la construcción u obtención de la totalidad de las soluciones.
2. Representar gráficamente las diferentes soluciones de un problema sencillo de combinatoria mediante un diagrama o una tabla, que incluyan un principio de organización. Emplear diagramas en árbol para formar todas las soluciones.

3. Elegir una notación adecuada para representar los elementos que intervienen en un problema de combinatoria.

4. Comparar un problema de combinatoria con otro de igual estructura ya conocido, determinando en primer lugar si intervienen o no en cada solución todos los elementos considerados, si el orden entre los elementos es determinante y si hay posibilidad de que un elemento se repita.

5. Buscar regularidades y patrones en secuencias numéricas; emplear relaciones entre números combinatorios y simetrías en el triángulo de Tartaglia para probar nuevas relaciones.

6. Representar gráficamente secuencias y relaciones numéricas; expresar simbólicamente representaciones gráficas.

7. Suponer conocida la solución de un problema y construir en orden inverso los pasos que llevan a esa solución; suponer imposible la solución de un problema y detectar la contradicción que se deriva de ese supuesto.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:

1. Reconocimiento y valoración de las representaciones gráficas y de la notación combinatoria para representar y resolver problemas con un conjunto finito de elementos.

2. Sensibilidad, interés y valoración crítica del lenguaje y razonamiento combinatorio en informaciones sociales y argumentaciones científicas o técnicas.

3. Apreciar la diversidad de estrategias para la resolución de problemas combinatorios, de modo que se puedan abordar situaciones nuevas con autonomía y eficacia.

4. Comprender y valorar, con cierto grado de autonomía, la potencia de la notación simbólica que permite expresar el número de relaciones posibles entre objetos, justificar relaciones y obtener propiedades.

5. Curiosidad por las regularidades en secuencias numéricas y por el sentido de las simetrías en expresiones o identidades numéricas. Capacidad para atribuir un sentido gráfico a una expresión numérica, y recíprocamente.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:

1. Emplear los diagramas en árbol y la elaboración de tablas para la obtención sistemática de todos los casos de un problema de combinatoria.

2. Realizar el recuento directo de casos y utilizar la recurrencia para recuentos en casos

más complejos.

3. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática como la exhaustividad en el estudio de casos, la capacidad crítica y la necesidad de verificación de las soluciones.

4. Habituarse al empleo de diagramas o representaciones gráficas sencillas para visualizar relaciones y propiedades numéricas, que doten de sentido a las expresiones simbólicas en estudio.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Los problemas de enumeración y recuento de las diferentes posibilidades de organizar un número finito de elementos de acuerdo con unas condiciones de contexto son muy antiguos, y se encuentra información sobre los mismos desde el comienzo de la memoria escrita. El ejemplo paradigmático son los ejercicios combinatorios que aparecen en el I Ching (2. 300 a C. aprox.), así como los cuadrados mágicos. Desde entonces las matemáticas se han ocupado de estudiar problemas en los que intervenía un número finito de signos, símbolos u objetos simples, tales como letras, números, colores, sonidos, etc.

Los agrupamientos de un número limitado de personas, procedentes o no de una misma categoría o clase, para realizar una actividad determinada; por extensión, los agrupamientos de seres vivos. Las mezclas de ingredientes, las preparaciones de alimentos o, en sentido inverso, la reducción de los objetos de un universo a unos elementos simples, cuyas combinaciones permiten explicar los diferentes objetos del universo.

También son fenómenos estudiados por la combinatoria los agrupamientos de objetos y las posibles distribuciones o repartos de los objetos de una colección. Las relaciones geométricas tales como cortes entre rectas; divisiones del plano o del espacio en regiones mediante rectas o planos; los modos de conectar puntos; etc.

También los grafos o caminos entre objetos y todos los juegos en los que intervienen un número finito de elementos y de reglas para su ordenación entran en las situaciones que plantean problemas a los que la combinatoria ha tratado de encontrar respuesta.

Hay un tipo de pensamiento, que podemos denominar combinatorio, y que intenta explicar unos determinados fenómenos en base a una combinación de elementos simples. Todas estas situaciones, tanto si han tenido éxito en su justificación -tabla periódica de los elementos- como si se han reducido a un puro juego intelectual - como la cábala o pensamiento esotérico- constituyen parte importante del amplio campo de fenómenos a los que la combinatoria proporciona una sistemática.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Las configuraciones combinatorias simples se clasifican siguiendo cuatro modelos distintos, que Dubois denomina:

1. Colocación de n objetos en m cajas.
2. Selecciones o muestreo de objetos a partir de un conjunto de referencia.
3. Separaciones en montones de n conjuntos de objetos.
4. Particiones de enteros.

Según que en la colocación de los n objetos en m cajas se considere el orden o no dentro de las cajas y que los objetos y las cajas en las que se colocan sean iguales o diferentes surgen los distintos casos de problemas combinatorios, y entre ellos nuestra combinatoria simple. Cada una de estas configuraciones puede matematizarse mediante el estudio de las aplicaciones de un conjunto N de n elementos (los objetos) en otro conjunto M de m elementos (las cajas).

Los modos usuales de representación de situaciones combinatorias emplean los diagramas en árbol con distintas estrategias según el tipo de problemas estudiados; la elaboración de listas completas de casos posibles y la organización de los datos dentro de una tabla, según un criterio.

Reflexionar sobre el propio proceso de pensamiento para entender por qué un determinado método ha funcionado, intentar simplificarlo y encontrar otras situaciones en las que el mismo método funcione, son formas usuales de representación. Pero no son los únicos diagramas adecuados para la representación de situaciones combinatorias: simbolizar los objetos por puntos o líneas y las relaciones por caminos entre los puntos o cortes entre las líneas puede proporcionar una imagen útil del problema en estudio.

Materiales adecuados para la iniciación en la combinatoria lo constituyen cualquier conjunto finito de objetos simples que admitan una fácil manipulación y representación sobre los que proponer actividades de colocación o separación de objetos. Fichas o bolas coloreadas; dados; cartas o cartulinas con números, letras o colores. Cajas o envases con un número de huecos determinado -como ocurre con las hueveras- entre los que hacer diferentes distribuciones. Papel cuadriculado sobre el que estudiar diferentes caminos o recorridos con unas condiciones dadas. Cuadros de doble entrada en los que situar los elementos de un producto cartesiano de dos o más conjuntos. Todos estos materiales se pueden encontrar en versiones comerciales pero tambíen son fáciles de construir. La calculadora y el ordenador son dos recursos importantes en la iniciación a la matemática discreta en el momento actual y que proporcionan mayor potencia de cálculo a las intuiciones y razonamientos de los alumnos. Las estrategias generales para plantear, resolver y comprobar resultados en resolución de problemas forman, igualmente, un sistema sobre el que apoyar el estudio de la combinatoria. El empleo de problemas isomorfos ofrece un buen campo para el dominio de estos conceptos.

La combinatoria se emplea en otras disciplinas como Física, Química, Biología, Economía y Gestión, Diseño de Experimentos, etc. Las situaciones que se estudian en estas materias pueden servir para plantear y resolver problemas de interés en este tema.

5. Errores y dificultades.

Los primeros estudios sobre desarrollo del pensamiento combinatorio fueron realizados por Piaget e Inhelder a mediados de siglo; con posterioridad estos trabajos fueron revisados por Fischbein, quien señaló que en una fase intuitiva los problemas de permutaciones y de variaciones con repetición son los que presentan mayor dificultad, seguidos por las variaciones ordinarias y las combinaciones.

Hadar y Hadass establecen una serie de dificultades típicas que los alumnos encuentran al resolver problemas combinatorios, que son las siguientes:

1. Identificación del grupo de sucesos u objetos que se deben enumerar.
2. Elegir una notación adecuada para representar toda la información y condiciones disponibles.
3. Percibir la totalidad del problema como conjunto de problemas particulares cuando se trabaja con parámetros variables.
4. Construcción de un método sistemático.
5. Fijación de una o más variables.

6. Preparación y realización de un plan para enumerar todos los casos.
7. Generalización de los resultados obtenidos con casos particulares.

Otros estudios han establecido como usual la siguiente secuencia para el logro de procedimientos adecuados en la organización del trabajo con actividades combinatorias:

1. Tanteos empíricos, en donde se opera sin orden establecido.
2. Procedimientos algorítmicos simples, en los que se determinan configuraciones diferentes, usualmente tantas como elementos intervienen.
3. Construcción de una regla algoritmica compleja que permita construir un bloque de configuraciones distintas y, sobre él, un segundo bloque, pero sin completar los casos.
4. Procedimientos de plan único, que quedan a mitad de camino por mantener un elemento fijo y no generalizar la variación en ese caso.
5. Finalmente, el procedimiento global lleva un escalonamiento ordenado de procedimientos parciales, al menos dos.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Para este tema presentan interés las siguientes épocas y autores:

1. Antecedentes en el estudio de la combinatoria. Estudios hindúes.
2. Europa medieval: Ramon Llull, Cordovero y Cardán.
3. Los estudios de Pascal, Fermat y Huygens.
4. La obra de J. Bernouilli “Ars conjectandi”.
5. La obra de G. Leibniz “ Dissertatio de arte Combinatoria”.
6. El análisis combinatorio en la actualidad.

7. Bibliografía:

Beiler (1964); Borrás, Carrillo y otros (1987); Boyer (1986); Cajori (1952); Case (1988); Coriat, Sancho, Gonzalvo, Marín (1988); Dolan, Willianson (1983); Dubois (1984); Engel (1988); Fischbein, Gazit (1984), Guzmán (1985); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Guzmán (1991); Kapadia, Borovcnik (1991); Kenney, Hirsch (1991); Mason, Burton, Stacey (1988); Mendelshon (1981); Mora (1989); Navarro-Pelayo (1991); Piaget & Inhelder (1951); Puig Adam (1960); Rey Pastor (1941); Romberg (1991); Schoenfeld

(1985); Smith (1958); Uspenski (1978); Whimby, Lochhead (1984).

Tema 20
Título: Probabilidad.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos relativos a Probabilidad establecidos por el Ministerio para Educación Secundaria Obligatoria se presentan en un Bloque diferenciado, el nº 5, que se denomina *“Tratamiento del azar”*.

En el proyecto de la Junta de Andalucía encontramos estos contenidos conjuntamente con los de Estadística, en el Bloque nº 5: “Tratamiento de la información estadística y del azar”.

En el documento del Ministerio relativo a Estructura y Contenido para el Bachillerato encontramos que se establece un bloque de Estadística y Probabilidad para el Primer Curso de la especialidad Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, e igualmente en la especialidad Tecnología.

En la especialidad Humanidades y Ciencias Sociales encontramos el Bloque Estadística y Probabilidad en los contenidos señalados para primer y segundo curso.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Fenómenos aleatorios y terminología para su descripción. Imprevisibilidad y regularidades en fenómenos y experimentos aleatorios. Posibilidad de realización de un suceso.
2. Asignación de probabilidades a sucesos. Frecuencia y probabilidades de un suceso. Ley de Laplace. Experimentos dependientes e independientes.
3. Asignación de probabilidades en experimentos compuestos . Probabilidad condicionada. Teorema de Bayes.

4. Distribuciones de probabilidad discretas y continuas. Variables aleatorias. Esperanza matemática.
5. La distribución normal. Cálculo de probabilidades en distribuciones normales. Distribución binomial. Cálculo de probabilidades en una distribución binomial.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes:
1. Utilización del lenguaje adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
2. Confección de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios.
3. Establecer direncias entre experimentos dependientes o independientes, simples y compuestos, y expresar adecuadamente las probalidades correspondientes.

b) Algoritmos y destrezas:
4. Obtención de números aleatorios mediante diversas técnicas tales como sorteos, tablas calculadoras, etc.
5. Utilización de distintas técnicas de recuento para la asignación de probabilidades.
6. Utilización de diferentes informaciones (frecuencias, simetrías, creencias, observaciones previas, etc.) para asignar probabilidades a los sucesos.
7. Cálculo de probabilidades en casos sencillos con la ley de Laplace.
8. Utilización de diversos procedimientos (recuento, diagramas de árbol, tablas de contingencia, etc.) para el cálculo de la probabilidad de sucesos compuestos.
9. Cálculo de probabilidades en distribuciones normales. Cálculo de probabilidades en una distribución binomial.
10. Detección de errores habituales en la interpretación del azar.

Estrategias.

1. Reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el conocimiento científico.
2. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

3. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas, en distintos contextos.
4. Percepción de la existencia de un número hacia el que tienden las frecuencias cuando aumenta el número de pruebas en un fenómeno aleatorio; anticipar el valor de la probabilidad de un suceso.
5. Establecer las variaciones en las probabilidades de sucesos cuando se modifican las condiciones iniciales de un experimento aleatorio. Elaborar criterios que permitan diferenciar entre sucesos dependientes e independientes.
6. Sistematizar la toma de decisiones en el estudio de los fenómenos aleatorios.
7. Planificar y realizar experiencias sencillas para estudio de los fenómenos aleatorios.
8. Asociar a la probabilidad de un suceso la ganancia o pérdida que supone su realización y calcular su valor.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:
1. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.
2. Consideración adecuada de informaciones probabilísticas para la toma de decisiones sobre fenómenos aleatorios.
3. Sentido crítico en la toma de decisiones sobre fenómenos aleatorios y análisis de los errores más frecuentes que se producen.
4. Curiosidad e interés por investigar fenómenos relacionados con el azar.
5. Enjuiciamiento y valoración de informaciones probabilísticas en los medios de comunicación, rechazando los abusos e incorrecciones que se producen.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
7. Descripción sistemática de los sucesos elementales que componen un experimento aleatorio y asignación de probabilidades mediante criterios explícitos, expresados con claridad y rigor.

3. Fenomenología de los conocimientos.

El estudio de los juegos de azar está en el origen del cálculo de probabilidades y del estudio de los fenómenos aleatorios. En los últimos tres siglos se ha producido un desarrollo considerable de la Teoría de la Probabilidad, y esto ha sucedido mediante un esfuerzo simultáneo por establecer unas bases teóricas sólidas y por interpretar un campo cada vez más amplio de fenómenos. El azar está presente en nuestro entorno, y esto se aprecia en primer lugar por el uso de términos y modismos que encontramos en el lenguaje cotidiano y que expresan el carácter imprevisible con el que se consideran ciertos fenómenos. Estos fenómenos se pueden agrupar en grandes categorías o campos de estudio, que son los que tradicionalmente han planteado problemas de manera más sistemática tanto para la estadística como para el cálculo de probabilidades. Estos campos son: juegos de azar, el mundo biológico, el contexto de los fenómenos físicos y la medición, el entorno social y el campo de las actuaciones políticas.

Los juegos con monedas, cartas, dados, ruletas, urnas, y todas las variantes de juegos de apuestas constituyen un campo de fenómenos aleatorios bien definidos, con condiciones controlables y de complejidad creciente, cuyo interés ha sido determinante para el desarrollo de las probabilidades.

Hay características de los seres vivos que no son previsibles de antemano: sexo, peso en el nacimiento, etc; otras características dependen del momento en que son medidas. La posibilidad de contagio, edad probable de sufrir una enfermedad, efectos de un tratamiento, posibilidad de heredar unos determinados rasgos o tendencias. Las predicciones sobre evolución o extinción de poblaciones de seres vivos; previsión de efectos en el uso de fertilizantes; rendimiento y producción agrícola; control de natalidad, etc. Todos estos fenómenos se estudian mediante modelos probabilísticos que permiten prever sus posibles evoluciones y los factores sobre los que hay que incidir para conseguir unos determinados resultados.

En los fenómenos meteorológicos aparecen multitud de variables aleatorias, así como en las consecuencias que se derivan de esos fenómenos: caudal de agua en ríos y embalses, daños producidos, etc. Una fuente importante de variabilidad aleatoria la encontramos en la medida de magnitudes. Los estudios de fiabilidad y control de calidad en aparatos e instrumentos entran también dentro del campo de fenómenos para estudiar.

En el contexto social encontramos igualmente una gran cantidad de situaciones aleatorias: número de hijos de una familia, edad de los padres, tipo de trabajo, edad de nacimiento, etc. También en los seguros de vida, accidente o riesgo están presentes situaciones aleatorias; igualmente en las evoluciones del mercado, bolsa de valores, gastos imprevistos, etc.

Finalmente, el mundo político es también una fuente de fenómenos aleatorios: la previsión de elecciones, encuestas de opinión, estadísticas demográficas, movimientos migratorios, producción de bienes, nuevos índices, etc., son sólo algunos de los más conocidos.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos:

Los modelos relativos a las nociones de probabilidad han ido evolucionando a lo largo del tiempo. En primer lugar, encontramos un uso informal de la probabilidad, que se expresa mediante una terminología general imprecisa con la que se clasifica y establece un orden de más o menos probable entre una serie de sucesos. Un segundo modelo es el que considera un experimento o fenómeno aleatorio compuesto por un conjunto de sucesos elementales equiprobables. Esta noción es útil ya que permite estudiar extensamente una gran cantidad de fenómenos mediante la noción de probabilidad de Laplace. Este modelo clásico no es adecudo para estudiar la probabilidad cuando el conjunto de alternativas no son equiprobables; la insuficiencia del modelo clásico ha dado lugar a modelos lógicos en los que se intenta medir la razonabilidad que conviene conceder a una proposición en términos de la información proporcionada por otra. Otro modelo es el que considera la probabilidad de un suceso como el límite de los valores de las frecuencias relativas de ese suceso, cuando el número de veces que el suceso ocurre tiende hacia infinito. Este modelo presenta hoy día la gran ventaja de que puede simularse con un ordenador.

Finalmente, la noción formal de probabilidad actual está basada sobre la noción de medida normada sobre conjuntos de sucesos. Estos modelos pueden ser aplicados en diferentes situaciones y, en cada caso, una de las conceptualizaciones resultará ventajosa.

Los fenómenos equiprobables se pueden representar mediante caminos o circuitos que se bifurcan en varias ramificaciones sucesivas con distinto número de brazos, o también mediante extracción de bolas en urnas. Los fenómenos que pueden reiterarse un gran número de veces sin modificar las condiciones sirven para representar modelos frecuenciales, mientras que la probabilidad formal se representa adecuadamente con figuras geométricas, cuyas medidas relativas nos dan valores buscados.

El material probabilístico es muy rico y variado, pero las casas de material educativo incluyen básicamente tres tipos de materiales: dados, bolas y ruletas, entendiendo cada uno de estos términos en sentido amplio. Otros materiales son: chinchetas, tablas de números aleatorios, tablas de recuento o resultados, canales para distribuir bolas (máquina de Galton), dianas y dardos, anuarios de datos estadísticos, juegos y programas de ordenador que simulan fenómenos aleatorios considerados anteriormentes.

5. Errores y dificultades.

Distintos autores han detectado la existencia de errores sistemáticos y persistentes en la toma de decisiones que hacen las personas ante situaciones o fenómenos aleatorios. algunos de esos errores tienen causas de origen psicológico, por lo que no es suficiente una exposición teórica para que se superen. Entre estas estrategias erróneas, hay dos que se presentan con mayor frecuencia, que se denominan representatividad y disponibilidad.

Un sujeto emplea la estrategia de representatividad cuando asigna la probabilidad de un suceso basándose en la semejanza del mismo con la población de la que se extrae. Así, p. ejp. al ser la probabilidad de nacimiento de un varón 1/2, hay quienes consideran más probable que en una serie de seis nacimientos ocurra VHHVHV, que el que ocurra VVVHVV.

La estrategia de disponibilidad consiste en hacer predicciones sobre la probabilidad de un sujeto basándose en la mayor o menor facilidad para recordar o construir ejemplos de ese suceso. Se han encontrado sesgos debidos: a la imprecisión del lenguaje ordinario; a no considerar la información proporcionada por experimentos aleatorios anteriores; y por dependencia de modelos deterministas y creencias arraigadas en relación con los fenómenos en estudio.

Fischbein, siguiendo investigaciones previas de Piaget e Inhelder, ha puesto de manifiesto que la síntesis entre el azar y lo deducible no se consigue espontáneamente y de modo completo en la adolescencia, y que la respuesta correcta puede lograrse antes y con mayor extensión mediante una instrucción adecuada. La intuición probabilística no se desarrolla de modo autónomo, excepto para casos muy concretos. Para desarrollar la comprensión, interpretación, evaluación y predicción de fenómenos probabilísticos es necesario entrenar, desde los primeros cursos, la base intuitiva relativa al pensamiento probabilístico, con el fin de lograr un balance constructivo entre lo posible y lo determinado.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Momentos y autores importantes para este tema son:
1. Precursores del cálculo de probabilidades: Cardano.
2. Pascal, Fermat y Huygens.
3. Trabajos de Leibniz y Bernouilli.
4. Los avances en el siglo XVIII: Buffon, De Moivre y Bayes.
5. La obra de Laplace.
6. El desarrollo del siglo XIX.
7. El estudio axiomático y el estado actual.

7. Bibliografía:

Aguado, Zamarreño, Blanco (1980); Borrás, Carrillo y otros (1987); Costello (1991); Díaz, Batanero, Cañizares (1987); Fischbein (1975); Fischbein (1987); Fischbein, Gazit (1984); Freudenthal (1973); Gutiérrez (1984); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Guzmán, Colera, Salvador (1988); Kapadia, Borovcnik (1991); Laplace (1979); Loève (1976); Mora (1989); Nortes Checa (1977; Piaget, Inhelder (1951); Rivadulla (1991); Romberg (1991); Santaló (1975); Sherlock (1968); Székely (1986); Watkins (1988).

Tema 21
Título: Patrones numéricos. Sucesiones. Convergencia.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos de este tema no aparecen dentro de los señalados para la Educación Secundaria Obligatoria ni en el Decreto de mínimos, ni tampoco en la propuesta de la Junta de Andalucía. En el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato tenemos: en la Especialidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud para primer curso se señala el estudio de progresiones y logaritmos; para segundo curso se señala el aprendizaje de métodos para el cálculo de límites y su justificación teórica. En la Especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales segundo curso se propone el estudio de las sucesiones y las progresiones, su aplicación al cálculo de anualidades, así como los logaritmos, sus propiedades y aplicaciones.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Inducción matemática.
2. Concepto de sucesión. Ejemplos de sucesiones. Monotonía. Acotación. Límite de una sucesión.
3. Progresiones aritméticas; expresión del término general. Suma de los n primeros términos. Interpolación y extrapolación.
4. Progresiones geométricas; expresión del término general. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.
5. Representación decimal de los números racionales.
6. Sucesiones aritméticas de segundo orden. Sucesiones recurrentes.
7. Sucesiones monótonas y acotadas sin límite racional.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos lenguajes</u>:

1. Determinar el término general de una sucesión para leyes lineales, afines, exponenciales o recurrentes de coeficientes o bases sencillas.
2. Reconocer la monotonía y acotación de una sucesión.

3. Distinguir entre progresiones geométricas y aritméticas; reconocer el orden de los términos en una sucesión.

4. Realizar el cambio de variable de n a n + 1 en una expresión algebraica A (n).

5. Distinguir las diferentes partes en la notación decimal de un número racional; expresar un racional en notación decimal y recíprocamente.

6. Representar geométricamente la suma de las potencias inversas de los números naturales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n}} \quad \text{para} \quad 2 < k < 10$$

7. Expresar las condiciones para que un número sea límite de una sucesión.

8. Diferenciar entre media aritmética, media geométrica y media armónica de dos números racionales.

b) Algoritmos y destrezas:

1. Probar por inducción una relación numérica entre naturales.

2. Comprobar la monotonía de una sucesión, demostrar su acotación y calcular su límite, cuando ello sea posible.

3. Calcular el término general y la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética. Interpolar los términos que se indiquen.

4. Calcular el término general y la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

5. Obtener la fracción generatriz de un decimal periódico.

6. Calcular el término general de una sucesión de números poligonales.

7. Argumentar por qué el límite de 1/n es 0.

8. Argumentar por qué determinadas sucesiones monótonas y acotadas carecen de límite racional.

Estrategias.

1. Utilizar el principio de inducción para descubrir falacias numéricas.

2. Obtener el límite de una sucesión utilizando distintos procedimientos o la combinación de ellos.

3. Emplear las relaciones entre los términos de una progresión aritmética o geométrica para obtener nuevas relaciones o resolver problemas prácticos.
4. Representar mediante símbolos gráficos o geométricos los primeros términos de una sucesión.
5. Conjeturar y refutar propiedades del término general de una sucesión o de su límite, considerando los primeros términos de la misma.
6. Representar un número racional mediante el mayor número posible de notaciones y gráficos.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:
1. Valorar la potencia y validez de la inducción matemática.
2. Valorar la notación algebraica de una sucesión para representar una aplicación y un conjunto numerable de valores.
3. Emplear las relaciones en las sucesiones aritméticas y geométricas para resolver problemas de caracter práctico.
4. Tener sensibilidad para las diferentes formas de notar y representar un mismo número racional.
5. Reconocer la relación entre determinadas notaciones y patrones que expresan relaciones gráficas o modos de crecimiento.
b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
6. Cuidado y precisión en el uso de los diferentes conceptos relativos a sucesiones.
7. Empleo ordenado de las relaciones entre los términos de progresiones aritméticas o geométricas para obtener nuevas relaciones.
8. Curiosidad e interés por expresar numerica, gráfica y simbólicamente una misma secuencia de números.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Las sucesiones constituyen conjuntos numéricos infinitos numerables, obtenidos mediante alguna ley o regularidad; representan la abstracción de conjuntos finitos, junto con una regla que permite continuar obteniendo términos indefinidamente en función de la posición que ocupan. El estudio de las sucesiones está dirigido prioritariamente a los aspectos numéricos, algebraicos y analíticos correspondientes, pero no cabe duda de que hay fenómenos en la vida real en los que una serie de números están relacionados entre sí mediante una regla que puede combinarse con sentido; los números se obtienen mediante medición de una determinada magnitud en una colección de objetos. Hay fenómenos en los que las medidas obtenidas sobre la colección de objetos tienen un crecimiento o aumento constante (cualquier fenómeno de flujo o incremento temporal fijo); en otros fenómenos las medidas obtenidas aumentan mediante producto por un factor constante: cada objeto o unidad inicial da lugar a su vez a n objetos o n unidades en el objeto siguiente (fenómenos de crecimiento o división) el problema de los granos de trigo y el tablero de ajedrez es un ejemplo popular de estos fenómenos.

No son las únicas posibilidades. También hay fenómenos en los que el crecimiento es aditivo pero en cada paso el incremento aumenta en una unidad. Otros fenómenos que se ajustan a leyes recurrentes son los que se describen con la sucesión de Fibonacci (descendencia de una pareja de conejos, filotaxia, etc.).

Las sucesiones crecientes con valores enteros, cuyo estudio interesa realizar en estos cursos responden a varias clases de fenómenos de crecimiento:

* Crecimiento de diferencia o incremento constante;
* Crecimiento de razón o tasa constante;
* Crecimiento de incremento variable, pero en el que el incremento experimenta un aumento constante;
* Crecimientos recurrentes, en los que cada valor se obtiene por acumulación de valores anteriores.

Las sucesiones de números racionales y los problemas de convergencia asociados responden al estudio de otro tipo de fenómenos. Se trata en este caso de fenómenos de crecimiento controlado o de realización de medidas mediante procedimientos recurrentes cuando no es posible una medida directa de la cantidad en cuestión, como es el caso de la diagonal de un cuadrado al medirla con el lado o la longitud de la circunferencia al medirla con el diámetro. Todas las situaciones de rectificación de curvas, medida de superficies curvilíneas, etc., tienen una aproximación matemática con estos conceptos.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Los cuatro tipos de crecimientos antes indicados responden a las sucesiones aritméticas, geométricas, cuadráticas y recurrentes. La tabla de sumar de un número es un primer ejemplo de sucesión aritmética, que comienza en 0 y tiene por diferencia el número correspondiente. Esta sucesión se puede representar mediante un modelo lineal sobre la recta numérica; mediante un modelo de longitudes, con regletas, formando escaleras, etc. Igualmente puede hacerse con cualquier sucesión aritmética. Los números triangulares y cuadrados son los ejemplos más conocidos de sucesiones con una ley cuadrática, que tienen incremento variable pero en las que el incremento va aumentado de manera constante. Estas sucesiones emplean modelos cardinales que visualizan bien las características geométricas de sus términos, y también modelos combinatorios, en algunos casos. Las potencias de un número comenzando por 1 son ejemplo de sucesiones geométricas, con razón el número correspondiente. Este tipo de sucesión se puede representar linealmente, sobre la recta numérica o mediante diagramas de árbol. Su rápido crecimiento hace difícil que se puedan representar más que unos pocos términos en cada caso. La sucesión de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, ..., es el ejemplo más conocido de sucesiones recurrentes, y su representación se realiza también mediante diagramas en árbol. Otra forma de rerpresentación se realiza mediante rectángulos cuyos lados van siendo términos consecutivos de esta sucesión:

Los términos de una sucesión también se pueden representar como longitudes que van constituyendo los diversos tramos de una espiral poligonal con ángulo constante, por lo general de 90°. Otros modelos para los términos de diferentes tipos de sucesiones pueden verse en Sloane. Los diversos tipos de regletas, cuadrados, triángulos equiláteros, papeles pautados y otros, son materiales usuales para obtener los primeros términos de una sucesión y determinar la relación que liga a dos términos consecutivos y, de ahí, pasar a la ley general.

Material especial lo constituyen los materiales para las potencias de 10 basados en la estructura del sistema métrico: el cubito pequeño para 1cm^3 la barra con 10cm^3, la placa con 100 cm^3 y el cubo mayor de 1000 cm^3; a su vez, a partir de este cubo, se puede formar una barra con 10^4 cm^3 , una placa con 10^5 cm^3 y un nuevo cubo de 10^6 cm^3 (el metro cúbico). No es usual disponer de un sistema en el que aparezcan siete potencias consecutivas de un mismo número.

Con los materiales multibases de Dienes se pueden hacer construcciones similares para potencias sucesivas de otros números.

Los aparatos de medida con precisión creciente y la calculadora son los materiales y recursos usuales en el trabajo con los términos de una sucesión convergente. No obstante, hay siempre unas limitaciones físicas difíciles de salvar.

5. Errores y dificultades.

F. Boschet analizó algunas de las dificultades asociadas al concepto de sucesión y encontró que muchas de ellas son debidas al tratamiento y desarrollo que se hace de los contenidos: las sucesiones no se trabajan como las funciones -aunque son casos particulares-; los ejercicios sobre sucesiones son menos variados de lo conveniente; algunos casos, como las sucesiones recurrentes, se presentan de manera artificial. También encontró dificultades de vocabulario en la noción de convergencia. Observó una tendencia a la desaparición de representaciones, dibujos y modelos para el estudio de sucesiones, con un énfasis creciente en el lenguaje formal. Consideró estos planteamientos como causas objetivas de dificultades para la construcción de estos conocimientos.

Bunch estudia los tipos de razonamiento erróneo que aparecen al iniciar el trabajo con el infinito. En primer lugar denuncia las imprecisiones que se derivan de la expresión *"y así sucesivamente"* y los distintos significados que se le pueden atribuir. Los niños tienen dificultades en trabajar con sucesiones teniendo en cuenta que se pueden enumerar sus términos, que se pueden contar y que se puede alcanzar cualquier término propuesto. Para ello es necesario encontrar una expresión que permita actuar adecuadamente - ley de la función- sobre el supuesto de que el conjunto inicial es el conjunto de todos los naturales. El razonamiento por inducción pone de manifiesto las dificultades en la generalización de propiedades: no es suficiente con que una propiedad se haya verificado muchas veces para que sea cierta en general.

Los estudios sobre razonamiento inductivo realizados por Pellegrino y Sternberg dentro del paradigma del procesamiento de la información intentan establecer los componentes que expliquen el modo de resolución en problemas inductivos, y por ende las causas de errores y dificultades. Aunque los trabajos realizados se han hecho con sucesiones numéricas de términos pequeños y leyes sencillas han logrado determinar una serie de componentes básicos en sucesiones: detección de relaciones, descubrimiento de periodicidad y extrapolación de la secuencia, cuya combinación y complejidad permiten explicar los errores de ejecución y su rapidez.

En un trabajo reciente, Sierpinska ha presentado 25 nociones o *"hechos de comprensión"* diferentes en las nociones de sucesión y convergencia, cuya carencia o falta de domino provoca errores o incomprensiones en estos conceptos. Sierspinska ofrece un plan de trabajo, aún sin desarrollar, para la detección identificación, reorientación y corrección de dificultades y errores en este campo.

6. Desarrollo histórico del tópico.

En el desarrollo histórico de este tema interesa considerar los siguientes periodos y autores:

1. Secuencias numéricas en la matemática egipcia, babilónica y griega.
2. La Europa medieval. Fibonacci.
3. Reglas para sumar términos de una progresión. Chuquet, Stifel, Tartaglia.
4. la notación decimal. Stevin.
5. Los trabajos de Newton y Leibniz sobre convergencia.
6. El periodo de Euler.
7. La teoría de la convergencia.Cauchy.

7. Bibliografía:

Aparicio, Paya (1985); Baylis, Haggarty (1988); Boschet (1983); Bunch (1987); Davis (1961); Guzmán, Rubio (1990); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Gardiner (1982); Jacobs (1982); Lang (1969); Markushévich (1974); Niven (1961); Pellegrino (1986); Rey Pastor (1941); Robert (1982); Rucker (1982); Rudin (1967); Sierpinska (1990); Sloane (1973); Smith (1958); Sternberg (1990); Stevens (1986); Stillwell (1989); Tsipkin (1985);Vajda (1989); Whimbey, Lochhead (1984); Zippin (1962).

Tema 22

Título: El sistema de los números reales.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos relativos a este tema no aparecen contemplados entre los establecidos para Educación Secundaria Obligatoria, ni en el Decreto del Ministerio ni en el borrador de la Junta de Andalucía.

En el documento sobre Estructura y Contenidos para el Bachillerato editado por el Ministerio, entre los núcleos temáticos señalados para la especialidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, encontramos citada explícitamente "la noción de número real"; no aparece ninguna referencia en el resto de las especialidades.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Números irracionales. La diagonal del cuadrado; los desarrollos decimales no peródicos.
2. Nuevos números irracionales: radicales; el número π ; el número e ; la razón áurea.
3. Notación y representación de números reales. La recta real.
4. Parte entera y parte decimal de un número real. Intervalos en la recta real.
5. Ordenación de números reales. Teorema del supremo. Densidad de los números racionales.
6. Construcciones con números reales: suma, resta, producto, división, potenciación y radicación.
7. Caracterización axiomática de □ □R.
8. Orden de aproximación de una representación decimal. Tipos de aproximación. Error de una aproximación.
9. Intervalos de números reales. Diversas representaciones.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos lenguajes</u>:

1. Expresar el significado de los distintos símbolos, abreviaturas y aproximaciones para los números irracionales más conocidos.

2. Utilizar el teorema de Pitágoras para construir un radical de distintas formas.
3. Diferenciar entre números racionales e irracionales por su notación decimal.
4. Redondeo y truncamiento de una expresión decimal con un orden convenido.
5. Conocer el orden en □□R y emplear las relaciones: siguiente a; más próximo que; mayor que; comprendido entre; mayor número que; tantos elementos como, etc.; con ejemplos concretos de números o conjuntos de números reales.

b) <u>Algoritmos y destrezas</u>:

6. Utilizar métodos iterativos para construir aproximaciones de números radicales, de π , e , ø .
7. Utilizar la fórmula para el interés compuesto.
8. Construir irracionales cuadráticos con regla y compás.
9. Truncar y redondear números reales con el orden que se indique; establecer el error cometido en una aproximación.
10. Acotar el error al realizar operaciones aritméticas con aproximación de números reales.

Estrategias.

1. Expresar con claridad diferentes argumentos relativos a la existencia o necesidad de los números irracionales.
2. Representar un número irracional mediante el mayor número posible de notaciones, gráficos y procedimientos.
3. Interpretar la inconmensurabilidad de los números irracionales por comparación con el algoritmo de Euclides.
4. Explicar la dificultad que presenta el carácter no periódico de la notación decimal de un irracional.
5. Obtener una aproximación decimal de un irracional con el error que se indique.
6. Justificar la biyección entre el conjunto de los reales y la recta.

Actitudes.

a) <u>Referentes a la apreciación de las matemáticas</u>:
1. Valorar las limitaciones de la notación decimal y de la representación geométrica para expresar números reales.

2. Conocer y apreciar el cálculo con aproximaciones de números reales y las posibilidades de estimar el error de los resultados.
3. Interpretar informaciones acerca de expresiones numéricas que sirven para describir fenómenos científicos y tecnológicos.
4. Comprender y valorar, con cierto grado de autonomía, planteamientos y desarrollos teóricos que justifican propiedades y conceptos matemáticos.
5. Apreciar la belleza de construcciones geométricas en las que intervienen irracionales.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
6. Diferenciar entre los distintos tipos de información que podemos proporcionar sobre un número real determinado y las limitaciones operatorias que tiene cada una de esas representaciones.
7. Evitar generalizaciones y razonamientos inadecuados en los procesos infinitos.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Para cada una de las nociones numéricas anteriores: natural, entero, racional hay una serie de fenómenos que permiten establecer las intuiciones básicas de los conceptos y procedimientos correspondientes. Posteriormente, la notación aritmética y la representación linea completan una primera información para cada concepto, sobre cuya base se construyen los desarrollos posteriores.

La aritmética tradicional comienza con el estudio de colecciones discretas. Sin embargo, el modelo de la geometría está basado sobre la noción de continuidad; las padojas de Zenón pusieron de manifiesto las contradicciones de la hipótesis atómica para la geometría.

Los avances de la aritmética clásica permitieron elaborar la noción de medida e introducir así la aritmética en la geometría, pero las consecuencias fueron el descubrimiento de la inconmensurabilidad de determinadas longitudes (p. ejp. la diagonal y el lado de un mismo cuadrado), la necesidad de abandonar el tratamiento aritmético y emplear métodos más elaborados y la primacía de la geometría sobre la aritmética.

Durante muchos siglos no hay números reales en sentido moderno sino razones entre cantidades, de longitud, superficie o volumen. La medida de magnitudes continuas, incluyendo más adelante al tiempo, es la clase de fenómenos que sirven de base para estos conocimientos.

En la mayor parte de los casos no se producen problemas importantes, ya que se trabaja con valores enteros o con aproximaciones exactas. Pero cuando es necesario profundizar, aparecen las nociones de proceso infinito y paso al límite que le quitan carácter intuitivo al fenómeno considerado.

Por otra parte, las limitaciones de la notación numérica y los problemas de constructibilidad geométrica en la mayoría de los casos, hacen que no sea fácil sugerir los componentes genuinos del concepto de número real en base solamente a estos fenómenos.

La razón entre los lados de un rectángulo y la posibilidad o imposibilidad de una medida común, sigue siendo el problema matemático más sencillo sobre el que surge la necesidad del número real. El problema de la cuadratura del círculo es más sofisticado que el anterior, si bien tiene igualmente un valor intuitivo importante.

Pocos intentos se han hecho en el medio educativo por construir razones entre cantidades distintas de la longitud y crear la necesidad de un proceso infinito que lleve al paso al límite. Recientemente, Coriat, Martínez y Baena han diseñado una secuencia didáctica sobre la base de construir tonalidades de verde mediante la razón de una mezcla de azul y amarillo, cuya virtualidad educativa está aún por contrastar.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

La recta real es el modelo fundamental para los números reales con carácter general, ahora bien, la geometría aporta construcciones con regla y compás que permiten obtener por diversos métodos los irracionales cuadráticos. En un nivel más técnico, existen también construcciones geométricas aproximadas de otros irracionales con un orden de aproximación muy elevado; este es el caso de muchas construcciones clásicas del número π, o las construcciones del heptágono y del eneágono inscrito en una circunferencia.

Las fracciones continuas ofrecen un modo de representación para los números reales que proporciona una notación finita para cualquier racional y dotan de periodicidad a los irracionales cuadráticos. Este tipo de notaciones carecen de utilidad inmediata ya que las operaciones usuales no tienen un algoritmo propio basado en esta notación.

Cada una de las operaciones aritméticas usuales entre números reales tienen su construcción geométrica correspondiente, que permite representar el resultado de operar con dos números reales cualesquiera. También hay representaciones dinámicas para las operaciones.

Entre los materiales más conocidos tenemos diversos tipos de puzzles y de papeles punteados en los que se pueden medir y construir distintos números irracionales:

Estas representaciones permiten plantear problemas de perímetros y superficies en las que se opera con números irracionales.

La calculadora es un recurso esencial en el trabajo con números aproximados sobre el que también se generan problemas interesantes.

5. Errores y dificultades.

El planteamiento convencional de los números reales en el antiguo bachiller se centraba en la estructura algebraica del conjunto □ □R junto con el proceso de paso al límite para una sucesión. De este modo, la idea de número real se traducía en el dominio de una estructura de operaciones y, casi independientemente, se trataban los problemas de la convergencia de sucesiones.

Dentro de este esquema, los errores y dificultades detectados son los que aparecen en el dominio de una estructura y los ya señalados en el tema anterior para el concepto de convergencia. Aunque estas dos ideas son esenciales en la construcción del concepto de número real, entendemos que camuflan las dificultades básicas de este concepto. Los números reales se representan en la recta y se simbolizan mediante una notación decimal ilimitada; las relaciones entre estos dos códigos y las dificultades de traducción de uno de ellos al otro según los casos, están en la base de una primera identificación del concepto de número real. Cada uno de estos sistemas tiene también sus propias reglas de manejo concreto:

¿Cuál es el número real más cercano a otro?, ¿cómo se representa?, ¿cómo se simboliza?, ¿cómo podemos contar los números reales que hay comprendidos entre otros dos?. Muchas de estas cuestiones están aún por analizar sobre la base de las creencias e intuiciones, algunas de ellas concretas, que desarrollan los jóvenes.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Algunos autores y tópicos importantes en este tema son:

1. Las paradójas de Zenón. El descubrimiento de la irracionalidad.
2. Los números sordos. Eudoxo.
3. Los estudios sobre inconmensurabilidad en las matemáticas griegas. Duplicación del cubo y cuadratura del círculo.
4. Aritmetización de la geometría. Descartes.
5. Los comienzos del Análisis. Newton y Leibniz.
6. La fundamentación del análisis. Euler.
7. Aritmetización del Análisis. Concepto de número real: Weierstrass, Dedekind y Cantor.

7. Bibliografía:

Aparicio, Payá (1985); Apostol (1960); Bishop, Bridges (1980); Bochner (1991); Boyer (1986); Cuesta (1981); Dixon (1987); Euler (1988); Feferman (1989); Félix (1970b); Fernández Viña (1976); Gardiner (1986); Gibilisco (1991); González (1990); Guzmán, Colera, Salvador (1987); Guzmán, Rubio (1990); Haggarty (1989); Hardy (1987); Lang (1969); Lang (1973); Mateo Charris (1985); Niven (1961); Pichon (1986); Pérez de Laborda (1983); Rey Pastor (1941); Rudin (1967); Segovia, Castro, Castro y Rico (1989); Sondheimer, Rogerson (1981); Stein (1990); Stillwell (1989); Tsipkin (1985); Yákovliev (1984); Zippin (1962).

Tema 23

Título: Funciones. Límites. Continuidad.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Estos contenidos no aparecen entre los señalados para Educación Secundaria Obligatoria; en el Tema 13 se presentó el estudio de Funciones correspondiente a los cursos de Secundaria. En el documento Contenidos y Estructura para el Bachillerato encontramos una mención explícita al estudio de las funciones y sus diversas familias, ramas infinitas, cálculo de límites y continuidad. Estas referencias aparecen en las especialidades: Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Humanidades y Ciencias Sociales, y Tecnología, tanto en primer curso como en segundo curso.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Función. Variable, Gráfica de una función. Interpretación de la gráfica de una función. Expresión algebraica. Dominio de una función.
2. Función lineal; crecimiento constante. Pendiente de una recta. Formas en la ecuación de la recta. Funciones definidas mediante segmentos.
3. Funciones de segundo grado. Representación.
4. Funciones periódicas. Función de proporcionalidad inversa. Función exponencial.
5. Límite de una función. Límite en el infinito. Límite en un punto. Cálculo de límites.
6. Continuidad. Discontinuidades de una función.
7. Interpolación. Interpolación lineal y cuadrática.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos lenguajes</u>:
1. Describir las variables que se relacionan y las unidades utilizadas en la representación gráfica de una función. Interpretar los datos más destacados de una función por su representación gráfica.
2. Elegir las variables y seleccionar las unidades adecuadas para representar gráficamente un

fenómeno o una situación.
3. Establecer el dominio de una función a partir de su representación gráfica o de la expresión algebraica de su ley.
4. Obtener una representación gráfica aproximada conocida la ley de una función.
5. Interpretar el comportamiento de un fenómeno cuya representación gráfica es una recta o está formada por tramos rectos.
6. Describir el comportamiento de una función para valores muy grandes de la variable. Interpretar el límite de una función en $\pm\infty$.
7. Reconocer representar e interpretar el periodo en un fenómeno periódico.
8. Distinguir distintos tipos de funciones sencillas por su ley y por su representación gráfica. Identificar leyes y representaciones gráficas.
9. Interpretar los intervalos de continuidad y los puntos de discontinuidad de un fenómeno representado gráficamente.
10. Enumerar algunas de las posibles funciones con las que se puede interpolar un número finito de datos relacionados.

b) Algoritmos y destrezas.
11. Construir la gráfica de una función a partir de: a) unas condiciones generales; b) una tabla de valores; c) una ley algebraica.
12. Calcular la pendiente de una recta. Obtener la ecuación de recta en la forma punto-pendiente o en la forma ordenada en el origen-pendiente.
13. Representar gráficamente una función lineal, afín o de segundo grado. Representar gráficamente una función periódica, de proporcionalidad inversa o exponencial.
14. Calcular el límite de una función en un punto; calcular el límite de una función en $\pm\infty$. Resolver indeterminaciones sencillas.
15. Interpolar lineal o cuadráticamente una serie de puntos.

Estrategias.

1. Seleccionar las variables relevantes que surgen a lo largo de un fenómeno o situación. Representar las relaciones entre las variables de dos en dos. Destacar la función que mejor representa el fenómeno estudiado.
2. Utilizar los distintos sistemas simbólicos: relación entre variables, tabla de valores, representación gráfica y ley algebraica para estudiar un determinado fenómeno.

3. Analizar el desarrollo de un fenómeno en términos de las características generales conocidas que satisface la función a cuya ley se ajusta el fenómeno.
4. Emplear la interpolación como instrumento para generalizar los datos de una tabla de valores y describir el comportamiento general de una función obtenida experimentalmente.

Actitudes.

a) En relación con la apreciación de las matemáticas:
1. Valorar la potencia del lenguaje gráfico para descubrir la evolución de un fenómeno o una relación general de variables. Valorar la potencia de la notación algebraica para simbolizar determinados gráficos estándar.
2. Apreciar las diferentes fases o etapas de un fenómeno según quedan expresadas en su representación gráfica, la tendencia que siguen cuando la variable independiente toma valores muy grandes y el sentido que tienen las discontinuidades.
3. Sensibilidad e interés ante las relaciones entre variables expresadas gráficamente.
4. Curiosidad ante las diferentes posibilidades de representar gráficamente un fenómeno.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
5. Elección cuidadosa de las variables, de las unidades y de los datos más significativos para representar gráficamente un fenómeno.
6. Justificación razonada de las propiedades de cada una de las funciones elementales estudiadas y de su representación gráfica.

3. Fenomenología de los conocimientos.

El concepto de función es un buen instrumento matemático para expresar el cambio que se produce en determinadas magnitudes cuando transcurre el tiempo, o bien cuando varía otra magnitud. Muchos de estos fenómenos ya se citaron explícitamente en las referencias que se hicieron al concepto de función en el Tema 13 de este programa. Aún así, los fenómenos que se estudian mediante el concepto de función no quedan agotados, y es mucho más amplia la lista de los que quedan sin nombrar que de aquellos que se citan expresamente. La mayor complejidad conceptual y técnica de los contenidos de este tema permiten trabajar sobre un tipo de funciones más amplio y cuyas leyes tienen mayor precisión. Proponemos a continuación algunos ejemplos de fenómenos que pueden estudiarse con los contenidos de este tema.

Cambio de temperatura a lo largo del día en función del tiempo (horas): $C(t)= at^2+bt + c$.

Crecimiento de población de una cierta comunidad en función del tiempo (años): $P(t)= a- b/t+1$.

Psicología Experimental. Estudio del tiempo requerido por una rata para atravesar un laberinto en la n-esima prueba: $f(x) = a + b/n$.

Tiempo de distribución de un producto: guías telefónicas al x por ciento de familias de una comunidad: $f(x) = ax/b-x$; con igual ley tenemos funciones que estudian el coste para inmunizar al x por ciento de una población contra una epidemia.

Periodo de un péndulo simple en función de su longitud: T = 2 Vx .

Velocidad de un móvil en movimientos uniformes, uniformemente acelerado o retardado; polución del aire, coste industrial de fabricación de x unidades; demanda de consumo; ventas al por menor; coste medio de fabricación; cuotas; recibos de la luz, agua o teléfono en función del gasto; depreciaciones lineales; problemas de conversión de unidades; relaciones de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa; intensidad de sonido en función de la distancia, y muchos otros son los fenómenos que pueden y deben utilizarse para el trabajo con este tema.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

En el contexto particular de este tema la función es el modelo que permite estudiar con unas técnicas geométricas, algebraicas y analíticas relativamente sencillas y similares una multitud de fenómenos diferentes que proceden, como hemos visto, de la mecánica, la termología, la hidrodinámica, la economía, el estudio de poblaciones, los fenómenos de difusión, la psicología experimental, etc. En este sentido, cada tipo de función constituye un modelo diferenciado útil para el estudio de determinados fenómenos. Este concepto de función emplea los cuatro sistemas simbólicos de representación ya citados: descripción verbal, representación gráfica, tabla de valores y ley algebraica. Si en los niveles de Secundaria Obligatoria el mayor énfasis para el estudio de las funciones estaba en la representación gráfica, y sobre ese núcleo se conectaba con el resto de las representaciones, en este nivel la simbolización algebraica para las funciones más sencillas:

y = ax ; y = ax + b ; y = ax + bx +c ; y = a ; y = a/x ; f(x) = f(x+h) ; y su representación analítica, se convierten en el núcleo central del trabajo. Bien entendido que, cada uno de estos modelos debe trabajarse sobre la base de los datos que se obtienen trabajando en un laboratorio, mediante informes de investigación de diferentes ciencias sociales o con funciones obtenidas experimentalemente. Además de la ya tantas veces citada calculadora programable es conveniente mencionar aquí el software informático elaborado por el Shell Centre de la Universidad de Nottinghan (U.K.) en el que se proponen una serie de problemas sobre la base del estudio y representación gráfica de funciones que, en cada caso, responden a un determinado fenómeno. También son importantes las actividades propuestas por programas informáticos como *"De rive"* y *"Calculus"*.

5. Errores y dificultades.

Ruiz Higueras ha estudiado las concepciones de alumnos de 16-18 años sobre el concepto de función y ha encontrado los siguientes resultados:

1. Los alumnos emplean representaciones numéricas, algebraicas y gráficas en sus definiciones de función, con una proporción baja de elementos gráficos.
2. Los alumnos muestran una concepción operacional de la función; función parece significar un procedimiento de cálculo, casi sinónimo de algoritmo.
3. La noción de *"dependencia entre variables"* es poco utilizada.
4. El esquema de la función lineal se impone en las justificaciones sobre existencia o inexistencia de funciones en fenómenos familiares.
5. La expresión algebraica, que utilizan para definir lo que es una función, no se emplea para la justificación de si una relación determinada es o no función.
6. No utilizan las definiciones de los libros para argumentar en sus consideraciones sobre funciones.
7. Tienen dificultades en interpretar correctamente relaciones funcionales presentadas mediante gráficos.
8. Es usual confundir la gráfica de un movimiento con la trayectoria del móvil.

Muchos de estos errores han sido detectados con anterioridad por Janvier, Tall, Vinner y otros. Todos ellos nos ponen de manifiesto una integración inexistente entre los cuatro sistemas simbólicos para la representación de las funciones debido, entre otras causas, a la impaciencia de los profesores por establecer las fórmulas y símbolos del álgebra como único sistema. El estudio didáctico de este tópico es un campo abierto de investigación, necesitado aún de profundización y sistematización.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Etapas y autores de interés para la organización de este tema son:

1. Nicolás de Oresme y el comienzo de la representación gráfica.
2. La Geometría analítica. Descartes y Fermat.
3. Newton y Leibniz. La crítica de Berkeley.
4. La fundamentación del Análisis. Euler.
5. El Análisis de Cauchy.
6. Weierstrass. El Análisis moderno.

7. Bibliografía:

Aparicio, Payá (1985); Apostol (1960); Azcarate, Deulofeu (1990); Berkeley (1982); Boyer (1986); Courant, John (1989); Dreyfus, Eisemberg (1982); Euler (1988c); Fernández Viña (1976); Grattan-Guinnes (1984); Freudenthal (1983); Gardiner (1982); Guzmán, Colera, Salvador (1988); Guzmán, Colera, Salvador (1989); Guzmán, Colera (1991); Guzmán, Rubio (1992); Haggarty (1989); Hoffmann (1983); Janvier (1981); Janvier (1987); Marnyanskii (1979); Rudin (1967); Ruiz Higueras (1991); Ruiz Higueras, Rodriguez (1988); Stillwell (1989); Tall (1991); Tsipkin (1989); Vinner, Tall (1981); Vinner (1983); Volkov (1990).

Tema 24

Título: Derivación.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Entre los contenidos señalados para Educación Secundaria Obligatoria no hay ninguna referencia a la derivación de funciones.

El documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato señala expresamente la derivación dentro de los tópicos a desarrollar en los dos cursos y en las tres especialidades: Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Humanidades y Ciencias Sociales y Tecnología.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Tasa de variación media. Recta secante; recta tangente. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada; interpretación dinámica.
2. Derivada de una función dada por su expresión analítica. Derivación y continuidad. Puntos angulosos.
3. Función derivada. Algebra de derivadas. Derivación de funciones simples.
4. Derivadas sucesivas. Derivada de una función compuesta.
5. Funciones con derivada no nula. Funciones con derivada nula.
6. Aplicaciones del concepto de derivada.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos lenguajes</u>:

1. Obtención de la tasa de variación media de un fenómeno en distintos intervalos, velocidad media de un móvil o recta secante a una curva que pasa por dos puntos. Obtención de la tasa de variación instantánea de un fenómeno, velocidad instantánea de un móvil o recta tangente a una curva en un punto.
2. Obtención, a partir de la definición de derivada, de la función derivada de otra función.
3. Interpretación de los puntos angulosos de una función y de sus discontinuidades.

4. Determinación del carácter creciente o decreciente de una función en un punto mediante el valor de la derivada de la función en ese punto.

b) Algoritmos y destrezas.
5. Cálculo de la velocidad instantánea de un móvil en un momento dado. Cálculo de la recta tangente a una curva en un punto.
6. Determinación de los puntos en los que una función carece de derivada.
7. Cálculo de la función derivada de otra mediante aplicación de las reglas simples de derivación.
8. Determinación de valores para los que la derivada de una función es positiva, nula o negativa.

Estrategias.

1. Interpretar la gráfica de una curva en términos de su tasa de variación. Representar gráficamente las tasas de variación de una función.
2. Aplicar el cálculo de derivadas al estudio de problemas dinámicos.
3. Obtener las condiciones que debe cumplir una función para que su tangente en un punto indicado sea una recta determinada.
4. Interpretar la información que sobre una función (movimiento) nos proporciona conocer su derivada (velocidad instantánea) en uno o varios puntos.
5. Describir y representar gráficamente fenómenos que carezcan de derivada en uno o varios puntos. Interpretar el sentido de la no existencia de derivada en cada caso.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:
1. Valorar en la representación gráfica de una función su variación en distintos intervalos, e interpretar el significado de esas variaciones.
2. Interés y curiosidad por conocer la rapidez de variación de un fenómeno en distintos instantes o intervalos para el mejor dominio y control del fenómeno y, en general, por conocer un fenómeno en términos de su variación.
3. Apreciar la simplicidad y eficacia de las reglas de cálculo para la derivada de una función.
4. Curiosidad por predecir las variaciones en la velocidad de un movimiento y predecir su evolución.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
5. Sensibilidad por la realización ordenada de los pasos que llevan a obtener la derivada de una función en un punto y la función derivada de una función.
6. Distinción cuidadosa entre varios valores locales, valores en un intervalo y valores o leyes generales para un determinado fenómeno.

3. Fenomenología de los conocimientos.

En el estudio de fenómenos dinámicos la tasa o rapidez de variación no es un valor constante sino que, por lo general, a su vez varía. El estudio de la variación en la tasa o razón de cambio en los fenómenos dinámicos es lo que condujo, en sus comienzos, al estudio de las derivadas y al posterior desarrollo del análisis. Así pues, el deseo de medir, cuantificar y establecer leyes para el cambio y la variación está en el origen de nuestra noción actual de derivada y su desarrollo teórico.

La noción de velocidad es la versión física inicial de nuestro concepto de derivada, que posteriormente, se amplió con la noción de aceleración. El estudio de la velocidad media o instantánea de un móvil y de su aceleración constituyen una gran familia de fenómenos sobre los que se utilizan, interpretan y aplican los conceptos y procedimientos de la derivación. La noción de velocidad se extiende a la de razón instantánea de cambio, con lo cual todos los fenómenos cuya variación se puede establecer en función del tiempo (o de una variable elemental del fenómeno) son susceptibles de estudiarse mediante la noción de derivada.

Los fenómenos de crecimiento de poblaciones, productividad, indices, ganancias, impuestos, etc., son otras tantas situaciones útiles para el desarrollo del concepto de derivada.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Encontramos de nuevo los cuatro sistemas simbólicos de representación en el estudio de la derivación: verbal, gráfico, numérico y algebraico. Estos cuatro modelos se presentan en el concepto de derivada de una función en un punto y también en el concepto de derivada de una función.

Para el concepto de derivada de una función en un punto tenemos que el modelo verbal hace referencia a la razón de cambio o velocidad instantánea de un determinado fenómeno en un momento dado, o para un valor fijo de la variable. La interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva en un punto proporciona el modelo gráfico, cuya representación ha formado parte del estudio explícito de la derivación en bachillerato. La obtención de diferentes cocientes incrementales de una función f en relación a un punto fijo x_0 : $\frac{f(x + 1/n) - f(x_0)}{1/n}$, $n \in N$, proporciona sucesivos valores numéricos hacia los que tiende la derivada de la función en x_0 .

Finalmente, el empleo de la notación algebraica y el cálculo de límites proporcionan el modelo algebraico para la derivada de una función f en un punto x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Aunque predomina el modelo algebraico, la intepretación geométrica de la derivada es un elemento permanente en la enseñanza de la derivación. Menos usual es el modelo verbal, ya que son pocos los fenómenos que se presentan para el estudio sistemático de la derivación. El modelo numérico es escasamente utilizado y sus conexiones con los demás modelos inexistentes. La idea de que en el entorno de un punto x_0 los valores de la función tienen una aproximación lineal aceptable mediante la recta tangente a la curva en x_0 : $y = f'(x_0)(x-x_0) + y_0$, no suele entrar dentro de los conceptos explicitamente enseñados y aprendidos por estos alumnos.

Si en vez de referirnos a la derivada de una función en un punto nos referimos a la función derivada de otra función encontramos, igualmente, los cuatro sistemas verbal, gráfico, numérico y algebraico. El modelo verbal describe la velocidad de un fenómeno -o su razón de variación - a lo largo de su evolución. El modelo gráfico debe expresar, y representar a su vez gráficamente, la variación de una representación gráfica de una función; se trata de otra gráfica asociada a una primera gráfica, que dé cuenta de los cambios da velocidad en la primera.

En el modelo numérico se toman valores equidistantes de la variable:
$[x_i]$, $1< i < n+1$, $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, formando a partir de ellos la siguiente tabla:

Se concluye estudiando la variación de los cocientes incrementales en función de la variable. El modelo simbólico es el usual, proporcionado por las fórmulas de derivación. Las conexiones entre modelos son prácticamente inexistentes; el predominio del cálculo con fórmulas es abrumador y se llega a prescindir, salvo ejercicios concretos de aplicación, del resto de representaciones.

Hay programas de ordenador como Derve y Cálculus, dedicados al estudio de funciones en los que se trabaja de forma sistemática con algunas de las ideas que hemos comentado. Finney señala algunos videos en los que se presentan fenómenos variables y las gráficas de sus velocidades.

5. Errores y dificultades.

El concepto de derivada es un concepto complejo, con dos niveles de estudio bien diferenciados: derivada en un punto y función derivada, y con unos algoritmos de cálculo relativamente sencillos de mecanizar. Todas estas condiciones han hecho que el estudio de la derivación, tradicionalmente, haya enfatizado los cálculos y procedimientos, reduciendo la parte conceptual a una definición y su representación simbólica. Esto ha llevado a que los alumnos han memorizado una serie de reglas, carentes de significado que difícilmente, han sabido emplear en problemas y aplicaciones.

Azcárate ha estudiado las dificultades de los alumnos en relación con el concepto de derivada y ha encontrado niveles bien diferenciados en las concepciones de los alumnos relativas a la derivación. En relación con la noción de velocidad instantánea encontró: alumnos que carecían totalmente de esquema conceptual para interpretar esta noción; alumnos que calculaban la velocidad instantánea por aproximación, pero sin paso al límite; y, finalmente, alumnos que empleaban la noción de límite. Un resutado destacable en este estudio es la existencia en una misma clase de alumnos con muy diversos niveles de dominio conceptual para el estudio de la derivación.

6. Evolución histórica del tópico.

Momentos y etapas de interés en la consideración de este tema son:

1. El nacimiento del Cálculo. Newton y Leibniz.
2. Problemas de notación e interpretación. Los hermanos Bernoulli. Euler.
3. Difusión en el siglo XVIII. La obra de L'Hopital y Lagrange.
4. Estudio de ecuaciones diferenciales. Desarrollo del Cálculo.
5. La sistematización de Cauchy.
6. Funciones continuas no derivables. El análisis funcional.

7. Bibliografía básica:

Aparicio, Payá (1985); Apostol (1960); Azcárate (1991); Azcárate, Deulofeu (1990); Boyer (1986); Bryant (1990); Cajori (1952); Cantoral (1991); Courant, John (1989); Euler (1988); Fernández Viña (1976); Finney (1988); Freudenthal (1973); Gardiner (1982); Grattan-Guinnes (1984); Guzmán, Colera, Salvador (1988a); Guzmán, Colera, Salvador (1988b); Guzmán, Rubio (1992); Hilton, West (1988); Hoffmann (1983); Kline (1977); Rudin (1967); Sierpinska (1991); Tall (1991).

Tema 25

Título: Trigonometría.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Entre los contenidos señalados para Educación Secundaria Obligatoria por el Ministerio no aparece ninguna referencia a la Trigonometría; sin embargo, en el borrador del documento en elaboración por la Junta de Andalucía se hace referencia a *"conocer nociones básicas de trigonometría"*, y en este sentido ya se consideró en el Tema 15 de este programa.

En el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato aparece el estudio de la Trigonometría entre los contenidos propuestos para primer curso en la Especialidad Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, y en la de Tecnología.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Razones trigonométricas. Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.
2. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera. Funciones circulares seno, coseno, y tangente. Carácter periódico de las funciones circulares.
3. Medida de ángulos. Resolución de triángulos rectángulos. Resolución de triángulos cualesquiera.
4. Fórmulas trigonométricas: razones trigonométricas del ángulo suma o diferencia de otros dos, del ángulo doble y del ángulo mitad. Sumas y diferencias de senos y cosenos.
5. Ecuaciones trigonométricas.
6. Aplicaciones de la trigonometría.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos tipos de lenguajes</u>:

1. Obtener las diferentes razones entre los lados de un triángulo rectángulo, tomados de dos en dos; asignar a cada razón su denominación trigonométrica.
2. Conocer y utilizar las relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

3. Expresar la pendiente de una cuesta como razón trigonométrica o mediante un porcentaje. Expresar la medida de un ángulo en grados sexagesimales y en radianes.
4. Conocer los ángulos cuyas razones trigonométricas tienen el mismo valor absoluto en los cuatro cuadrantes; conocer el signo de cada razón trigonométrica en cada cuadrante.
5. Construir la tabla de valores de las funciones sen x, cos x y tg x en el intervalo $[0, 2\pi]$ y representarlas gráficamente. Reconocer gráficamente las propiedades de las funciones circulares y hacer su estudio; realizar la extensión periódica de las funciones circulares.
6. Realizar la representación gráfica sobre un triángulo de un problema de distancias entre dos puntos, indicando los datos conocidos en cada caso sobre la representación.
7. Conocer el teorema de los senos, teorema del coseno y teorema de Pitágoras y utilizarlos en la resolución de triángulos cualesquiera.
8. Conocer las razones trigonométricas del ángulo suma o diferencia de otros dos, del ángulo doble y del ángulo mitad y utilizarlas en el cálculo de razones trigonométricas de nuevos ángulos.

b) Algoritmos y destrezas:

9. Obtener las razones trigonométricas aproximadas de un ángulo cualquiera mediante papel milimetrado.
10. Conocida una de las razones trigonométricas de un ángulo calcular las restantes y representar el ángulo.
11. Construir una tabla de valores de una función trigonométrica y representar gráficamente la función.
12. Resolver un triángulo cualesquiera en los tres casos posibles: a) conocidos los tres lados; b) conocidos dos lados y el ángulo comprendido; c) conocidos un lado y los dos ángulos adyacentes; empleando en cada caso los teoremas y propiedades necesarios.
13. Resolver ecuaciones y sistemas trigonométricos; verificar identidades trigonométricas.

Estrategias.

1. Utilizar las representaciones gráficas, papeles milimetrados, tablas, instrumentos, calculadoras y relaciones trigonométricas para calcular las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera en diferentes contextos.
2. Plantear problemas de alturas a puntos inaccesibles, distancia a un punto inaccesible o distancia entre dos puntos, representarlos gráficamente, ensayar distintos caminos de

resolución y encontrar su solución del modo más directo.

3. Plantear, representar, establecer relaciones y resolver problemas de medición de ángulos en figuras planas.
4. Obtener las razones trigonométricas de un ángulo mayor que $\pi/2$ radianes en función de las razones de ángulos menores que $\pi/2$ y utilizando diferentes procedimientos.
5. Conectar los distintos sistemas simbólicos de representación de funciones: relación entre variables, tabla de valores, representación gráfica y ley algebraica para el estudio, conocimiento y representación de las funciones trigonométricas.
6. Utilizar las funciones circulares para elaborar modelos de fenómenos periódicos del mundo real.

Actitudes.

1. Apreciar el tipo de información que proporciona una razón trigonométrica de un ángulo.
2. Valorar en la representación gráfica de las distintas funciones circulares su carácter periódico, simetrías, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos y otras propiedades y relaciones.
3. Curiosidad e interés por representar gráficamente, encontrar las relaciones necesarias y resolver problemas de puntos inaccesibles y distancias entre dos puntos.
4. Sensibilidad ante la potencia de las relaciones y conceptos de la trigonometría en la resolución de problemas astronómicos importantes a lo largo de la historia y por el ingenio puesto de manifiesto en la construcción de aparatos para medir ángulos.

b) <u>Referentes a la organización y hábitos de trabajo</u>:

5. Conocer y manejar con destreza las razones trigonométricas y sus aplicaciones inmediatas, como la resolución de triángulos.
6. Poner en juego diversas estrategias para la resolución de problemas con empleo de conceptos y procedimientos trigonométricos, de forma que se pueden plantear situaciones nuevas y resolverlas con autonomía y eficacia.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Trigonometría significa, literalmente *"medición de triángulos"*; el origen histórico de la trigonometría está en el estudio de las medidas del triángulo. Son muchos los problemas del mundo real que requieren la resolución de triángulos. Los movimientos de los cuerpos en el espacio: sol, luna, planetas y estrellas, se han estudiado inicialmente en función de los ángulos barridos; la división del ángulo de la circunferencia en 360 ángulos iguales tiene su origen en el movimiento de la tierra alrededor del sol, cuya duración es -aproximadamente- de 360 días; las horas, minutos y segundos son, en su origen, medidas angulares. La astronomía estudia una serie de fenómenos en los que es necesaria la resolución de triángulos y ha dado lugar al planteamiento de problemas trigonométricos. Conectada con la astronomía está la ciencia de la navegación, en la que hay que determinar la posición de un barco, a veces con relación a tierra y otras veces con relación a determinadas estrellas que se suponen fijas. También la geografía ha planteado problemas interesantes en este campo.

La topografía o levantamiento de planos de un terreno con indicación de las diferencias de nivel mediante curvas es otro mundo de problemas en los que el uso de la trigonometría es obligado. La agrimensura o medida de campos está conectada también con la medición de triángulos.

A su vez, las funciones trigonométricas permiten estudiar fenómenos periódicos del mundo real como el movimiento circular uniforme, los cambios de temperatura, los biorritmos, las ondas de sonido y la variación de las mareas.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

El modelo básico en trigonometría, a partir del cual se definen los conceptos y relaciones fundamentales, es el triángulo rectángulo. El estudio de cualquier triángulo se puede hacer en términos de triángulos rectángulos, sin más que descomponerlo adecuadamente mediante una de sus alturas. Un segundo modelo es la circunferencia de radio unidad cuyo centro está en el origen de coordenadas. Cada ángulo α, medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde la dirección positiva del eje de abcisas, determina un punto en la circunferencia: P= (x,y); estas coordenadas son, respectivamente:

$$x = \cos\alpha\ ,\ y = \text{sen}\ \alpha;\ \text{también}\ \text{tg}\alpha = x/y,\ \text{etc.}$$

Al tomar como unidad de medida el radian cada ángulo puede medirse mediante el arco delimitado sobre la circunferencia de radio unidad, y de este modo se pueden ir obteniendo los valores del seno, coseno, tangente, etc., en distintos ángulos del intervalo $[0, \pi]$; estos valores se pueden obtener experimentalmente con hilos o cuerdas que rodeen una circunferencia unitaria. De este modo se obtienen representaciones de las funciones circulares elementales.

En el caso de la resolución de triángulos simples los problemas de representación se presentan al identificar qué puntos deben elegirse como vértices del triángulo o triángulos cuya resolución servirá para resolver el problema propuesto. Para las funciones trigonométricas hay que tener en cuenta las mismas consideraciones ya hechas en el estudio general de las funciones, en relación con los cuatro sistemas simbólicos de representación usuales: descripción verbal, representación gráfica, tabla de valores y ley algebraica; en este caso se añade otro modelo a combinar con los cuatro anteriores y que es el modelo de los ángulos considerados sobre la circunferencia unidad.

En la medición de ángulos encontramos desde materiales muy sencillos: compás, transportador de ángulos, cuadrante, hipotenusa o plomada, hasta materiales más sofisticados como el sextante y el teodolito, por no citar aparatos históricos como el astrolabio.

Los planos topográficos y el reconocimiento o levantamiento de curvas de nivel en terrenos proporcionan actividades adecuadas para el trabajo en trigonometría.

Otros recursos, además de los ya indicados, los encontramos en las transformaciones cilíndricas de una linea plana, o en el paso al plano de una sección no ortogonal sobre un cilindro; las mediciones realizadas sobre papel milimetrado; problemas de situar un punto en una pantalla de radar y pasar sus coordenadas polares a cartesianas. Las calculadoras que incluyen las funciones trigonométricas elementales proporcionan un instrumento de trabajo útil para el desarrollo de los contenidos de este tema, al mismo tiempo que plantean problemas metodológicos interesantes.

5. Errores y dificultades.

Este tema tiene varios niveles diferenciados de contenido: las razones trigonométricas de un ángulo y las relaciones entre ellas; la resolución de triángulos; y las funciones trigonométricas. El primer nivel es fundamentalmente conceptual: se establecen unos conceptos por definición, se representan simbólicamente y se establece el juego de relaciones entre los distintos conceptos, en base a las notaciones empleadas. No conocemos estudios sobre errores y dificultades en este nivel, aunque entendemos que la comprensión del mismo es clave para el avance posterior en los niveles restantes. La presentación usual coordina una definición verbal, una representación geométrica como razón entre dos segmentos y una notación simbólica; sin embargo, este planteamiento carece de fenómenos cercanos a los alumnos que lo doten de un significado que no sea estrictamente matemático. Las fórmulas y definiciones iniciales de la trigonometría se aprenden sin mucha dificultad pero resulta bastante más complicado utilizarlas en el siguiente nivel (resolución de triángulos) con soltura y entendiendo el significado de las fórmulas y teoremas que se utilizan. La desconexión entre los conceptos básicos de la trigonometría y los fenómenos para cuya interpretación se elaboraron estos conceptos se hace evidente en los problemas prácticos que se resuelven mediante la medición de triángulos. Los trabajos de topografía o los de medidas astronómicas, que serían especialmente adecuados, no forman parte de los programas de matemáticas, y ello conlleva que situaciones eminentemente prácticas se trabajen de un modo tan formal que pierden su sentido real. Intentos recientes por incorporar ejercicios prácticos a la enseñanza de la trigonometría no han sido aún suficientemente sistematizados y validados.

El tercer nivel, que es el estudio de las funciones trigonométricas, puede contemplarse dentro del tratamiento de errores y dificultades ya señalados para el estudio general de las funciones, si bien hay peculiaridades debidas a la periodicidad y a su conexión con medidas sobre el círculo que están siendo abordadas de manera explícita. Los estudios del Instituto Iowo holandés ya han avanzado algunos resultados en este campo.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Periodos históricos y autores destacables para la programación de estos contenidos son:
1. Matemáticas en Babilonia: astronomía y medida de ángulos.
2. Los astrónomos griegos: Aristarco, Herón, Ptolomeo.
3. La astronomía árabe y la elaboración de tablas.
4. Tratamiento analítico de la trigonometría en el Renacimiento. Vieta y Regiomontano.

5. De las tablas a las leyes generales. Galileo, Copérnico, Kepler.
6. Los números imaginarios y la trigonometría. J. Bernouilli, De Moivre y Euler.
7. El análisis armónico. Fourier.

7. Bibliografía básica.

Alsina, Burgués, Fortuny (1988); Grupo Beta (1985); Coxeter (1971); De Lange, Goddijn, Roodhardt, Krabbendam (1989); Dominguez, Del Rio, Sánchez (1985); Esquivel, Yus (1985); Eves (1983); Fernández, Padilla, Santos, Velázquez (1991); Freudenthal (1983); Guzmán, Colera, Salvador (1988a); Guzmán, Colera, Salvador (1988b); Hoffmann (1985); Lang (1976); Luengo y otros (1990); Puig Adam (1961); Rivaud (1984); Romberg (1991); Smith (1958); Sortais (1987); Velasco (1983).

Tema 26

Título: Estudio y representación de funciones.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos de este tema no aparecen entre los propuestos para la Educación Secundaria Obligatoria. En el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato se señala explícitamente el estudio de las características sobresalientes de una función conocida su expresión analítica, y el aprendizaje de métodos y la aplicación del cálculo de límites y derivadas al estudio de funciones; esta referencia se hace para las especialidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología, en primer y segundo curso. En la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales se insiste en el carácter aplicado de estos conocimientos, con mayor peso en la compresión interpretativa que algorítmica dentro de problemas contextualizados.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Función inversa de otra: ley; representación gráfica; propiedades; derivación. Función logarítmica. Funciones arco seno, arco coseno y arco tangente.
2. Ramas infinitas de una función. Determinación de ramas infinitas. Ramas infinitas y representación de una función.
3. Dominio, continuidad y derivabilidad de una función. Periodicidad. Simetrías.
4. Puntos de corte con los ejes. Puntos singulares. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos de una función.
5. Concavidad, convexidad e inflexión.
6. Estudio y representación gráfica de funciones dadas mediante leyes sencillas. Funciones a trozos.
7. Optimización de funciones.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes:

1. Expresar la función inversa de otra verbalmente, mediante su tabla de valores, gráficamente o

mediante notación simbólica.

2. Conocer y utilizar la denominación de las funciones inversas a las funciones trigonométricas, potenciales y exponenciales.

3. Distinguir los distintos tipos de asíntotas que puede tener la gráfica de una función; reconocer las asíntotas de una función en su representación gráfica o a partir de su expresión algebraica.

4. Distinguir los ceros de una función en su representación gráfica o a partir de su expresión algebraica. Distinguir el punto de corte con el eje de ordenadas.

5. Interpretar gráfica y simbólicamente la periodicidad y simetrías de una función; su dominio; los puntos de continuidad y los de derivabilidad; sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; sus intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

b) Algoritmos y destrezas:

6. Calcular la ley de la función inversa a otra y de su derivada.

7. Determinar los ceros y polos de una función de variable real; calcular los límites de una función para x tendiendo a $\pm\infty$.

8. Establecer las discontinuidades de una función y los puntos que carecen de derivada; calcular los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad y puntos singulares de la función.

9. Estudiar y representar gráficamente una función dada por una expresión sencilla.

10. Calcular los máximos y mínimos de una función.

Estrategias.

1 Representar una función, lo más sencilla posible, que se atenga a unas condiciones enunciadas; describir con la menor cantidad de datos una función representada gráficamente.

2. Representar una función que cumpla unas condiciones de continuidad y derivabilidad establecidas; representar una función que tenga unos puntos singulares determinados.

3. Optimizar una función de dos o más variables, entre las que existe una relación complementaria, interpretando geométricamente la función, expresando algebraicamente la relación o relaciones y utilizando los cálculos necesarios para determinar los máximos o mínimos de la función.

4. Aplicar las estrategias de optimización a la resolución de problemas numéricos, geométricos, físicos, económicos, etc.

Actitudes.

a) <u>Referentes a la apreciación de las matemáticas</u>:
1. Valorar las distintas formas de expresar/ representar las propiedades relevantes de una función.
2. Apreciar el cálculo de derivadas como instrumento para el estudio del crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad y puntos singulares de una función.
3. Curiosidad e interés por expresar analíticamente funciones dadas mediante un enunciado y emplear adecuadamente las técnicas para su optimización.

b) <u>Referentes a la organización y hábitos de trabajo</u>:
4. Realizar ordenadamente los cálculos y consideraciones necesarios para representar gráficamente una función dada mediante su expresión analítica.
5. Establecer y expresar algebraicamente las relaciones necesarias para optimizar una función de varias variables con respecto a una sola de ellas.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Las nociones claves en este tema son el concepto de función y el concepto de derivada, cuya significación fenomenológica se ha realizado extensamente en los temas 24 y 25. Otra noción importante en este tema es el estudio e interpretación de las ramas infinitas de una función. En todo caso el fenómeno básico es la función en estudio de la cual se quiere obtener una representación lo más ajustada posible mediante el empleo sistemático del cálculo de límites, obtención de primera y segunda derivadas y estudio del signo de las mismas.

La optimización de funciones surge como una ampliación del estudio anterior. Cualquier función con expresión analítica puede ser objeto de un estudio en este sentido. Las situaciones prácticas o fenómenos más usuales en optimización proceden de los campos ya considerados anteriormente. En geometría tenemos situaciones de perímetros, superficies o volúmenes que, bajo unas condiciones establecidas, presentan un valor máximo o mínimo. En economía encontramos la determinación del precio óptimo de un producto, o del número óptimo de unidades para fabricar un producto. También tenemos la optimización de costes en situaciones de producción, recolección, construcción, instalación, etc. Las distancias entre objetos móviles, leyes de la reflexión y refracción, proporcionan ejemplos interesantes. Situaciones de diseños, embalajes, etc., son otros tantos fenómenos adecuados para el estudio de la optimización de funciones.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

En los problemas de optimización un primer paso está en decidir cuál es la cantidad que se quiere optimizar. Una vez que se ha elegido esa cantidad hay que representarla mediante algún tipo de notación; la notación estándar es la letra f, pero en otros casos se toma un símbolo más cercano a la cantidad (I para interés, A para área, etc.).

El siguiente paso es representar la cantidad a optimizar como función de alguna variable; un buen método consiste en expresar verbalmente la función antes de tratar de expresarla matemáticamente. Cuando se tiene esta expresión verbal hay que elegir una variable adecuada. Muchas veces la elección es obvia, pero en otros casos hay que elegir entre variables naturales. Se debe elegir aquella variable que lleva a la representación funcional más simple.

En algunos casos la cantidad que se quiere optimizar se expresa naturalmente en términos de dos variables, entonces hay que encontrar alguna relación que permita expresar una de esas variables en términos de otra. El paso siguiente consiste en expresar la cantidad a optimizar como función de la variable elegida. También es conveniente establecer el intervalo de la variable dentro del cual se va a optimizar la función y en el que se van a realizar los cálculos correspondientes, que tienen un carácter algorítmico.

Es objetivo fundamental de este tema afianzar los procedimientos que permiten el paso del modelo analítico al modelo gráfico, y recíprocamente. Los materiales y recursos apropiados han sido comentados con anterioridad en otros temas.

5. Errores y dificultades.

Eisemberg ha recopilado varias investigaciones relativas a las dificultades en el aprendizaje de las funciones. Un primer dato que surge de este estudio es la ausencia de una imagen conceptual para una función. Los estudiantes y los profesores tienden a sobrevalorar las expresiones analíticas, y a trabajar con ellas, abandonando o ignorando la representación gráfica. Más aún, algunos estudios han puesto de manifiesto que cuando se presiona a los alumnos a realizar una representación gráfica, hay aspectos en las representaciones que producen que no son comprendidas por sus mismos autores. Hadar y Zaslavsky presentaron a un grupo de estudiantes de bachiller superior la expresión analítica y la representación gráfica de una función y les pidieron obtener su función inversa. El noventa por ciento obtuvo la expresión analítica correctamente, de los que un 55% justificó los cambios realizados. Sin embargo, sólo un treinta por ciento pudo aplicar la simetría respecto de la diagonal del primer cuadrante, sin que en ningún caso se justificase el procedimiento. En este caso el concepto de función inversa estaba divorciado de su representación gráfica. En multitud de conceptos parciales usuales en el estudio de funciones, la representación gráfica es tan útil y necesaria como la simbolización e interpretación analítica; sin embargo, los procesos de enseñanza tienden a apoyarse de manera cada vez más completa en el simbolismo funcional, relegando la potencialidad de la representación e interpretación gráficas a la categoría de meras ilustraciones. No cabe duda que de este modo se enfatiza un tipo de razonamiento formal y deductivo mientras que se abandonan la intuición y el razonamiento visual. Muchas de las dificultades de comprensión pueden superarse mediante una representación gráfica adecuada. También algunos de los errores que pueden surgir limitándose a una fundamentación estrictamente gráfica de las funciones quedan equilibrados por la representación analítica. Las nociones de concepto-imagen y concepto de función están marcando el desarrollo de una línea de investigación didáctica sobre el aprendizaje y comprensión de las funciones reales de variable real, en la que se está trabajando en el momento actual.

6. Desarrollo histórico del tópico.

En el desarrollo histórico de estos contenidos hay una evolución permanente desde el siglo XVII. Algunos momentos y autores de especial significación son:

1. Oresme y la representación gráfica de funciones.
2. La Geometría analítica. Descartes y Fermat.
3. La búsqueda de máximos y mínimos. Fermat.
4. El comienzo del cálculo. Newton y Leibniz.
5. Los mecanismos del cálculo. L’Hopital y J. Bernouilli.
6. Euler. Las funciones exponencial y logarítmica.
7. Cauchy y el rigor en el análisis.

7. Bibliografía básica.

Artigue (1991); Azcárate, Deulofeu (1990); Baylis, Haggarty (1988); Bochner (1991); Courant, John (1989); Dhombres, Dahan-Dalmedico, Brouche, Honzel, Guillemot (1987); Eisemberg (1991); Euler (1988); Eves (1983); Finney (1988); Freudenthal (1973); Grattan-Guinnes (1984); Guzmán, Colera, Salvador (1988); Guzmán, Rubio (1992); Hadar, Zaslavsky, Inbar (1987); Hoffmann (1985); Lang (1976); La Vallée Poussin (1959); Piskunov (1978); Pozniak (1991); Rey Pastor (1952); Rudin (1967); Tall (1991).

Tema 27

Título: Resolución de ecuaciones.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

En el Tema 12 de este Programa ya se indicó que la resolución de ecuaciones de primer grado por transformación algébrica, la resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado y de sistemas de dos ecuaciones con dos incognitas, forman parte de los contenidos señalados por el Ministerio de Educación y Ciencia, en el Bloque 1, para Educación Secundaria Obligatoria, y por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, en el Bloque 2 del borrador para el Area de Matemáticas en Educación Secundaria. En su momento hicimos ya referencia al tratamiento de estos contenidos, motivo por el que en este tema nos limitamos a los contenidos para Bachillerato.

El documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato, en la Especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales, señala explícitamente la resolución de ecuaciones y la revisión y profundización de lo aprendido en la etapa anterior, para el primer curso. En las especialidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología únicamente se señala, con carácter genérico, el afianzar los conocimientos propios de la etapa anterior con la utilización de distintos recursos algebraicos en el primer curso.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Ecuaciones de primer grado. Inecuaciones.
2. Ecuaciones de segundo grado. Relaciones entre las raices. Ecuaciones bicuadradas y ecuaciones con radicales.
3. Polinomios. Operaciones con polinomios en una indeterminada. Factorización de polinomios, Regla de Ruffini.
4. Ceros de una función polinómica; raices de una ecuación de grado n.
5. Resolución numérica de ecuaciones no lineales. Método de bisección; regula falsi; método de Newton.
6. Ecuaciones exponenciales.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes.

1. Escribir en lenguaje algebraico un enunciado en el que aparecen varias cantidades conocidas y desconocidas y una relación entre las mismas.
2. Representar gráficamente la función o funciones de primer o segundo grado que aparecen en una ecuación, e interpretar gráficamente su solución o soluciones.
3. Expresar algebraicamente un orden o desigualdad entre candidades conocidas o desconocidas o bien entre relaciones que afectan a esas cantidades; representar gráficamente su solución.
4. Escribir una ecuación de primer grado o de segundo grado que tenga por solución un valor o valores propuestos. Obtener un polinomio de grado n que tenga por raices n valores propuestos.
5. Conocer diferentes métodos (bisección, regula falsi y Newton) para la resolución numérica de una ecuación no lineal. Utilizar el lenguaje de programación en una calculadora u ordenador para obtener aproximaciones sucesivas de la solución, interpretando el grado de aproximación en cada caso.
6. Interpretar geométricamente algunas identidades notables: cuadrado o cubo de una suma o diferencia y producto de suma por diferencia.

b) Algoritmos y destrezas:

7. Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, una ecuación de segundo grado o una ecuación bicuadrada.
8. Resolver una inecuación de primer o segundo grado, con una incognita y expresar el conjunto de soluciones mediante notación de intervalo.
9. Operar con polinomios en una indeterminada; dividir un polinomio por el binomio x-a. Factorizar un polinomio.
10. Obtener las raices de una ecuación no lineal aplicando la regla de Ruffini.
11. Obtener valores aproximados de las raices de una ecuación no lineal por los métodos de bisección, regula falsi o Newton, indicando en cada caso la cota de error de la solución aproximada obtenida.
12. Realizar las transformaciones necesarias y resolver ecuaciones exponenciales.

Estrategias.

1. Combinar la representación e interpretación gráfica, los métodos algebraicos y los numéricos para obtener los valores exactos o aproximados de todas las soluciones de una ecuación en una indeterminada.
2. Acotar la solución de una ecuación no lineal entre un valor por defecto y otro por exceso para su resolución numérica; realizar aproximaciones sucesivas eligiendo en cada caso el método más adecuado para obtener el siguiente valor aproximado.
3. Seleccionar y utilizar identidades notables entre expresiones algebraicas para probar igualdades, obtener nuevas expresiones o determinar el polinomio cuyas raices satisfagan unas determinadas condiciones.
4. Ante el enunciado de un problema seleccionar la incognita, expresar algebraicamente la relación o relaciones que aparecen en el enunciado, escribir la ecuación y obtener su expresión canónica, seleccionar y aplicar el método o fórmula para obtener la solución o soluciones, calcularlas, e interpretar la solución o soluciones obtenidas en el contexto del problema rechazando aquellas que carezcan de sentido.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:

1. Valorar la riqueza de posibilidades -gráfica, algebraica y numérica- para obtener las soluciones de una ecuación e interpretar el sentido de los valores obtenidos.
2. Conocer e interpretar el carácter aproximado o exacto de la solución de una ecuación no lineal.
3. Apreciar la potencia de los procedimientos para la resolución de ecuaciones, que los hacen instrumentos adecuados para la resolución de problemas generales con una incógnita.
4. Curiosidad e interés por las relaciones que se dan entre los coeficientes de una ecuación y los valores que tienen sus soluciones.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:

5. Aplicación correcta y ordenada de las reglas algebraicas o de los métodos numéricos que permiten obtener las raices de una ecuación o sucesivas aproximaciones de las mismas.
6. Habilidad para hacer la interpretación gráfica de una aproximación numérica y utilizarla para la elección del siguiente paso en la obtención de la solución numérica de una ecuación.

4. Fenomenología de los conocimientos.

La solución de una ecuación polinómica - de primer grado, segundo grado o, en general, de grado n - se presenta cuando se conoce uno de los valores que toma la función pero no se sabe cuál es el valor o valores de la variable para los que la función alcanza el valor dado. En su expresión general una ecuación tiene la forma $f(x) = c$, y la solución consiste en determinar los valores de x tales que los puntos (x,c) pertenezcan a la representación gráfica de la función $y = f(x)$. En su forma canónica una ecuación toma la forma $f(x) = 0$ que es, obviamente, equivalente a la anterior. Las ecuaciones de primer grado responden pues a problemas que se plantean sobre fenómenos cuya ley viene dada por una función lineal o afín, como son problemas de móviles con movimiento uniforme, de compra de un número de objetos conocido el precio unidad y la cantidad de dinero disponible, etc. Todos los fenómenos o situaciones que puedan ser descritos mediante relaciones lineales entre cantidades conocidas y desconocidas tienen cabida en este campo. Igualmente ocurre con las funciones cuadráticas. Ejemplos sencillos son el cálculo del lado de una superficie cuadrada o del radio de un círculo cuando se conoce la medida de la superficie, y, en general, las medidas de longitudes cuando se conoce el valor de una superficie relacionada. La ley de Torricelli permite calcular la velocidad a la que fluye una corriente de agua midiendo la altura alcanzada en un tubo en forma de L; la ley de Ohm, que proporciona la cantidad de calor que desprende una resistencia conocida permite calcular la intensidad de la corriente eléctrica que la produce. Todos estos fenómenos cuyas leyes vienen dadas mediante funciones de segundo grado, permiten plantear problemas cuya solución viene dada por una ecuación cuadrática. Igualmente ocurre para el resto de las ecuaciones: su fenomenología está conectada con la de las funciones correspondientes.

5. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Hemos comentado que las ecuaciones se presentan cuando se conoce la imagen de una función en un punto pero se desconoce el valor de ese punto. Presentando las ecuaciones como un tipo de problemas que surgen dentro del estudio de las funciones, tenemos de nuevo los cuatro modelos o sistemas simbólicos de presentación de las ecuaciones: verbal, gráfico, numérico y algebraico. El dominio y conexión de estos cuatro sistemas permite, como ya se ha comentado, una mejor comprensión e interpretación del concepto de solución de una ecuación. Los procedimientos de resolución se ajustan a dos modelos diferenciados: el algebraico y el numérico. El modelo algebraico dispone de reglas precisas para obtener las soluciones en el caso de las ecuaciones de primer y segundo grado; cuando la ecuación es de grado superior la regla de Ruffini permite solamente calcular las raices enteras o racionales de la ecuación, pero no proporciona solución para el caso general. El modelo numérico está basado sobre el método de iteracción, que construye una sucesión de valores aproximados, aplicando una función a la aproximación o aproximaciones anteriores. Las sucesiones recurrentes surgen de la determinación de puntos fijos para una función y = f(x) cualquiera. Un ejemplo histórico del proceso de iteración es el de la aproximación de π, atribuido a Arquímedes, en el que se obtiene la longitud del lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia, de ángulo central α , en función del lado del polígono regular, inscrito en esa misma circunferencia, y de ángulo central 2α . Se obtiene así la relación:

en la que S_n es el lado del polígono de n lados y S_{2n} es el lado del polígono de 2n lados.

Los procesos iterativos hay que trabajarlos con calculadoras programables o con programas de ordenador construidos al efecto, ya que en estos casos el interés no está centrado en ejecutar correctamente unos cálculos tediosos sino en ir obteniendo sucesivos valores mediante la elección de la regla adecuada en cada caso; la cuestión se centra en construir la regla y aplicarla sucesivamente.

De nuevo los recursos útiles son los programas de ordenador como Derive, Calculus, etc., que permiten la posibilidad de trabajar con métodos numéricos.

5. Errores y dificultades.

Un error usual en los alumnos que han concluido la actual E.G.B. consiste en identificar la existencia de solución con la de una fórmula que permite obtener esa solución directamente. Por ello cuando se les presenta un polinomio de grado mayor o igual que tres, las únicas soluciones existentes son las que se obtienen por Ruffini; cuando la aplicación de Ruffini no proporciona más que una raiz entera, consideran que no hay más raices en ese polinomio. Así, la ecuación $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$ no tiene más solución que -2.

Sin embargo, hemos comprobado que al hacer un planteamiento gráfico del estilo: “f(0) = -

$6 < 0$ y $f(2) = 4 > 0$, luego tiene que existir un punto entre 0 y 2 que anule a $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$, es decir, otra raiz de la ecuación", es admitido por alumnos de primero de bachillerato sin problemas.

Molina ha estudiado el comportamiento de alumnos de 15 años trabajando con un programa de ordenador que calculaba los valores de f(x) ante valores propuestos de x, y ha comprobado que los alumnos sistematizaban sus aproximaciones a la raiz de la ecuación $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$, en el intervalo (0,2), descubriendo y empleando los métodos de bisección y regula-falsi, sin instrucción previa.

Algunos errores detectados en este estudio consistieron en la no apreciación del carácter de valor aproximado que tiene la solución alcanzada ($\sqrt{3}$ con 9 cifras decimales) y la falta de conexión entre la resolución numérica y la algebraica. Creemos que aquí se presenta un campo de estudio importante, en el que la disponibilidad de programas informáticos va a facilitar el trabajo y profundización sobre métodos numéricos.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Momentos y autores importantes para la programación de este tema son:

1. Métodos iterativos en la matemática griega. Heron y Arquímedes.
2. Resolución de ecuaciones cuadráticas en la matemática árabe.
3. El Renacimiento italiano. La resolución de la cúbica y la cuártica.
4. Estudio de las funciones simétricas de las raices de una ecuación en el siglo XVIII. Wallis, Vandermonde, Langrage, Ruffini.
5. El teorema fundamental del álgebra. Gauss.
6. La irresolubilidad de la quíntica. Abel. Galois.
7. Los métodos numéricos en la resolución de ecuaciones.

7. Bibliografía:

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev (1976); Barnett (1984); Coxford, Shulte (1988); Dieudonné (1989); Hoffmann (1985); Kenney, Hirsch (1991); Lelong-Ferrand, Arnaudiès (1979); Lentin, Rivaud (1973); Molina (1989); Puig Adam (1960); Reisz (1981); Rey Pastor

(1941); Rico y Col. (1987); Rico y Col. (1988); Romberg (1991); Skemp (1980); Smith (1958); Volkov (1987); Waerden van der (1985); Wagner, Kieran (1989).

Tema 28
Título: Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

En el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato encontramos referencia al inicio al álgebra lineal; resolución de ecuaciones lineales; estudio de matrices, determinantes y propiedades; métodos de Newton y de Cramer. Estos contenidos se señalan para el primer y segundo cursos de las Especialidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología. En la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales se señala para el segundo curso la iniciación al álgebra lineal con estudio de matrices y sus operaciones; determinantes; y discusión y resolución de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Sistemas de dos ecuaciones lineales. Intersección de rectas. Intersección de rectas y parábolas.
2. Vectores. Operaciones con vectores. Espacio vectorial. Combinación lineal; dependencia e independencia lineales. Base. Coordenadas. Dimensión.
3. Ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones. Solución de un sistema; sistemas con solución y sin solución.
4. Método de Gauss. Tratamiento matricial del método de Gauss.
5. Matrices. Operaciones con matrices. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.
6. Determinantes de segundo y tecer orden. Determinantes de orden cualesquiera. Propiedades. Rango de una matriz. Inversa de una matriz cuadrada. Determinante de Vandermonde.
7. Sistemas compatibles e incompatibles. Sistemas determinados e indeterminados. Regla de Cramer para la resolución de un sistema lineal. Teorema de Rouché-Frobenius.
8. Programación lineal.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos lenguajes</u>:

1. Escribir en lenguaje algebraico un enunciado en el que aparecen varias cantidades conocidas y desconocidas y varias relaciones entre las mismas de igualdad o desigualdad.
2. Representar gráficamente las funciones de primer o segundo grado que aparecen en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o en un sistema de inecuaciones, e interpretar gráficamente su solución, soluciones o la inexistencia de las mismas.
3. Expresar y representar un vector con diferentes convenios y notaciones. Efectuar y representar gráficamente operaciones con vectores.
4. Expresar y representar un vector como combinación lineal de otros. Reconocer la dependencia o independencia lineal de dos o más vectores.
5. Estructurar varias listas de datos en una tabla y presentarlos, si es posible, mediante una matriz. Obtener matrices mediante relaciones cuantificables entre los elementos de un conjunto. Expresar matricialmente un sistema de ecuaciones.
6. Expresar algebraicamente la función objetivo y las restricciones en un problema de programación lineal, y representarlas gráficamente cuando sea factible.

b) Algoritmos y destrezas:
7. Resolver un sistema de dos ecuaciones o inecuaciones lineales; resolver sistemas con una ecuación lineal y otra cuadrática.
8. Hallar las coordenadas de un vector respecto de una base. Discutir y resolver la dependencia o independencia lineal de varios vectores.
9. Transformar un sistema a forma escalonada, discutirlo y obtener su solución cuando proceda.
10. Utilizar las reglas operatorias y las propiedades de las operaciones entre matrices.
11. Calcular el valor de un determinante y la inversa de una matriz cuadrada.
12. Expresar matricialmente un sistema de m ecuaciones con n incognitas, discutir su compatibilidad o incompatibilidad y resolverlo cuando proceda.
13. Plantear problemas de programación lineal y optimizarlos.

Estrategias.

1. Utilizar la notación vectorial para demostrar propiedades lineales sobre figuras.
2. Utilizar la representación gráfica, métodos numéricos o algebraicos para resolver sistemas

lineales de m ecuaciones con n incógnitas, eligiendo en cada caso la solución más rápida o elegante.

3. Elegir y aplicar convenientemente las propiedades de los determinantes para calcular un determinante de orden n.
4. Realizar la discusión de la dependencia o independencia lineal de m vectores de dimensión n; calcular las coordenadas de cualquier vector respecto de una base dada.
5. Obtener y aplicar las ecuaciones de un cambio de coordenadas; obtener y aplicar las ecuaciones de una aplicación lineal; determinar el núcleo y la imagen de una aplicación lineal.
6. Identificar las incógnitas y expresar algebraicamente las relaciones que aparecen en el enunciado de un problema lineal; escribir el sistema y seleccionar el método más adecuado para obtener las soluciones; calcular e interpretar las soluciones obtenidas en el contexto del problema.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:

1. Valorar la riqueza de métodos -gráficos, numéricos y algebraicos - para obtener las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales e interpretar los valores obtenidos.
2. Conocer e interpretar el carácter compatible o incompatible, determinado o indeterminado de un sistema de ecuaciones lineales.
3. Apreciar la simplicidad de simbolización y la claridad, sencillez y potencia de los procedimientos para la resolución de un sistema de ecuaciones, que los hacen instrumentos adecuados para el planteamiento y solución de problemas lineales con varias incógnitas.
4. Curiosidad e interés por las relaciones que se dan entre los coeficientes de un sistema y los valores de sus soluciones.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:

5. Aplicación correcta y ordenada de las reglas algebraicas o de los métodos numéricos que permiten obtener las soluciones de un sistema.
6. Capacidad para representar gráficamente un problema de programación lineal e interpretar la optimización del mismo.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Hay multitud de situaciones en las que cantidades de magnitudes u objetos diferentes tienen entre ellas una relación lineal. Esto es lo que ocurre en Química cuando se mezclan dos disoluciones de distinta concentración de un mismo producto para obtener un resultado previsto; en problemas de aleaciones; en dietética, con la elaboración de distintos tipos de dietas en base a unos alimentos básicos. También en Economía encontramos la inversión de un capital en diferentes tipos de obligaciones; negocios de ventas de varios productos; sueldos que se establecen con distintas condiciones; problemas de cambios de una cantidad en dos o más clases distintas de monedas o billetes; problemas de compra de dos o más productos, etc.

También hay problemas de móviles en los que se establecen diferentes relaciones o comparaciones entre diferentes velocidades de un mismo fenómeno (transmisión de ondas en distintos medios) o de distintos móviles que están relacionados.

Todas estas situaciones ejemplifican relaciones lineales entre cantidades variables, que se presentan en un mismo fenómeno. El interés por el estudio de estos fenómenos no es reciente, problemas clásicos como el de la corona de Hierón, rey de Siracusa, ponen de manifiesto que el álgebra lineal ofrece métodos adecuados para estudiar y controlar los resultados de una aleación, al igual que para el resto de situaciones que hemos considerado.

Las situaciones en las que se conocen los resultados de sumar o restar distintas cantidades, o diferentes múltiplos de esas cantidades, corresponden al tipo de fenómenos que estudia y resuelve el álgebra lineal.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Una relación lineal entre n variables representa un hiperplano en el espacio n-dimensional definido por esas variables. Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas plantea el problema de determinar cuántos puntos pertenecen simultáneamente a los m hiperplanos. La solución única supone que hay un único punto en la intersección de todos ellos; la infinidad de soluciones supone que hay un subespacio de soluciones; mientras que la carencia de soluciones indica que los hiperplanos no tienen ningún punto en común. Se modelizan así los sistemas compatibles y determinados; compatibles e indeterminados; e incompatibles.

El álgebra lineal ofrece un sistema de modelos adecuados para los distintos problemas y cuestiones que pueden plantearse. La simbolización vectorial permite ligar la representación de las matrices en forma de tabla, destaca su carácter doblemente lineal, por filas y por columnas, al mismo tiempo que proporciona unos criterios claros para los algoritmos de las operaciones.

En cuanto hay que trabajar con más de dos ecuaciones y más de dos incógnitas, el soporte informático se convierte en un elemento imprescindible para trabajar con agilidad y soltura. Los programas ya citados anteriormente, Derive y Calculus entre otros, ofrecen un manejo sencillo, junto con una variedad de aplicaciones en el estudio de sistemas.

5. Errores y dificultades.

Desde el punto de vista matemático, los conceptos y procedimientos del álgebra lineal ofrecen junto a una claridad y sencillez de planteamientos, una regularidad y simplicidad en los métodos para obtener las soluciones de un sistema que raras veces se presenta en otras ramas de la matemática. Sin embargo, su ejecución correcta necesita de una selección de la relación correcta y no equivocarse en ninguno de los múltiples cálculos sencillos que hay que realizar durante la ejecución del procedimiento de resolución. Los pequeños errores impiden muchas veces la obtención de las soluciones correctas; conscientes de ello, muchos alumnos se concentran excesivamente en realizar todos los cálculos correctamente, descuidando la interpretación del problema y su expresión algebraica correcta, lo cual produce un nuevo tipo de errores. Finalmente, la falta de significado práctico o de expresión gráfica de la gran mayoría de los problemas que se trabajan convierten el estudio del álgebra lineal en un modelo formal, carente de sentido para la mayor parte de los alumnos.

Molina ha estudiado el comportamiento de alumnos de 15 años a los que se les propone la resolución de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, sin instrucción previa, y que tienen como único instrumento un programa de ordenador que permite transformar el sistema en estudio en otro equivalente mediante las siguientes transformaciones: sumar a una ecuación otra cualquiera del sistema; restar a una ecuación otra cualquiera del sistema; multiplicar todos los coeficientes de una ecuación por un mismo número; dividir todos los coeficientes de una ecuación por un mismo factor común; suprimir las operaciones hechas y volver al comienzo.

Los alumnos trataron de simplificar los coeficientes cuando apreciaban un factor común; de multiplicar por -1 cuando encontraban muchos coeficientes negativos; de eliminar incógnitas para reducir el sistema a otro con menos incógnitas. La técnica usual de resolución consistió en triangular o escalonar el sistema despues de un número considerable de intentos.

Es obvio que los alumnos de esta edad no aprecian que el álgebra lineal trabaja con relaciones lineales, y que cada objeto básico en este caso es una de estas relaciones. El tener que realizar operaciones paso a paso hace que cada incógnita se presente como dato simple de referencia, mientras que la relación, expresada por la ecuación, parece de un nivel superior. No hay un dominio conceptual claro de los objetos con los que se trabaja: ecuaciones, y de las relaciones entre esos objetos: sistema. La notación empleada pone el énfasis en que el objeto es la incógnita y la relación es la ecuación; por ello hay dificultades en la comprensión, planteamiento e interpretación de estos problemas, aun cuando sus procedimientos sean formalmente sencillos.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Momentos y autores importantes en el desarrollo histórico de estos contenidos fueron:

1. Los primeros problemas de sistemas en juegos y adivinanzas con números.
2. Problemas de mezclas y aleaciones en el Renacimiento.
3. El trabajo de G. Cramer para la resolución de ecuaciones lineales.
4. Avances en el siglo XVIII: Bezout, Vandermonde y Laplace.
5. Las aportaciones de Cauchy, Jacobi y Lebesgue.
6. Cayley, Sylvester y la notación matricial actual.

7. Bibliografía:

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev (1976); Alsina, Trillas (1984); Artín (1970); Barnett (1980); Bellman (1965); Blum, Berry, Biehler y otros (1989); Bourbaki (1962); Burgos (1980); Carbó, Hernández (1976); Cajori (1952); Dieudonné (1987); Florey (1979); Freudenthal (1973); Gantmacher (1966); Golovina (1980); Guzmán, Colera (1991); Guzmán, Colera, Salvador (1988); Lang (1974); Lelong-Ferrand, Arnaudiès (1979); Molina (1989); Primo (1988); Steen (1981); Howson, Kahane, Langinie, Turckheim (1988); Queysanne (1973); Smith (1958); Van der Waerden (1985); Van Lint (1983); Xambó (1977).

Tema 29

Título: Integración.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Este contenido no figura entre los establecidos para Educación Secundaria Obligatoria. La integración aparece dentro de los contenidos marcados en el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato de las especialidades Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Humanidades y Ciencias Sociales, y Tecnología. En primer curso se señala el carácter intuitivo y aplicado que debe tener el estudio del tópico, mientras que para segundo curso se establece un estudio sistemático.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Area bajo la curva de velocidad. Area bajo una curva. Integral definida.
2. Primitivas de una función. Teorema fundamental. Regla de Barrow.
3. Cálculo de primitivas. Técnicas de integración: sustitución e integración por partes.
4. Propiedades de la integral definida. Valor medio de una función.
5. Aplicaciones de la integración al cálculo de áreas. Otras aplicaciones de la integral definida.
6. Integración numérica. Método del rectángulo; método del trapecio.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes:

1. Expresar y simbolizar la doble relación que existe entre una función y su primitiva.
2. Representar el espacio recorrido por un móvil como el área comprendida bajo la curva de la función de velocidad.
3. Representar el área bajo una curva, o el área comprendida entre dos o más curvas, como una integral definida.
4. Obtener gráficamente diferentes aproximaciones del área bajo una curva.

b) Algoritmos y destrezas:

5. Calcular la función primitiva de una función polinómica, o racional con un solo polo, exponencial o trigonométrica. Utilizar las técnicas de sustitución e integración por partes para el cálculo de primitivas.
6. Calcular el área bajo una curva o limitada por varias curvas.
7. Realizar la integración numérica de una función mediante el método del rectángulo o mediante el método del trapecio.

Estrategias.

1. Obtener la primitiva de una función combinando las reglas de sustitución e integración por partes junto con el conocimiento de las funciones primitivas elementales.
2. Aproximar la medida del área limitada por una curva mediante diversos procedimientos de acotación: cuadrícula, triangulación, polígonos inscritos o circunscritos, integración por trozos, etc, y establecer una cota de error para la aproximación hecha.
3. Conocido el ritmo al que está cambiando una determinada cantidad en función de otra (velocidad de un movil, caudal de agua, etc), interpretar el valor de la cantidad mediante los conceptos de la integración y obtenerla a partir de las diferentes técnicas.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas.
1. Curiosidad e interés por conocer la conexión entre la primitiva de una función f y el área limitada por el gráfico de f entre dos ordenadas cualesquiera.
2. Valorar la potencialidad de las técnicas de integración para obtener las funciones primitivas de una familia de funciones.
3. Apreciar la utilidad de la regla de Barrow para conocer una cantidad de una determinada magnitud en un periodo de tiempo, a partir de su ritmo de variación en el mismo periodo.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
4. Conseguir cierta destreza en el dominio de la tabla de primitivas y en la aplicación de las técnicas para el cálculo de primitivas.
5. Seleccionar un procedimiento para delimitar y aproximar el área bajo una curva, o limitada

por una curva cerrada, atendiendo a la información disponible sobre la curva. Realizar ordenadamente las divisiones gráficas y los cálculos necesarios para obtener un valor aproximado indicado.

3. Fenomenología de los conocimientos.

El cálculo integral tiene su origen en el estudio de problemas en los que se conoce el ritmo de cambio de una cantidad y el objetivo es hallar una expresión para la propia cantidad. Como el ritmo de cambio se obtiene por la derivada de la función que expresa la cantidad, la ley de la cantidad se obtiene por integración. Se trata de resolver el problema inverso al de la derivación: conocida la expresión de la derivada de una función se quiere calcular la expresión analítica de la función. Los fenómenos sobre los que estudiar la integración son, esencialmente, los mismos fenómenos dinámicos que ya se enumeraron en el tema de Derivación: móviles, crecimiento de poblaciones, fenómenos de difusión, productividad, índices, ganancias, fiscalidad progresiva, cambios de temperatura, etc. En todos estos casos se trabaja con nociones de integración cuando se conoce la ley de la razón de cambio y se pide la ley a la que se ajusta la magnitud que está sometida a cambio.

También el teorema fundamental del cálculo integral plantea otro conjunto de fenómenos que se estudian mediante el cálculo integral: la medida de superficies, cuyos dos tipos más conocidos son los que se denominan área bajo una curva y área delimitada por una curva cerrada o por varias curvas que dan un contorno cerrado.

El cálculo de áreas se extiende al cálculo de superficies y volúmenes de revolución y longitud de una curva. Un estudio más profundo de mecánica que incluya centros de masas, momentos de inercia, etc. hace uso sistemático de estos conceptos.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Conviene distinguir entre la noción de integral definida y la de integral indefinida. La integral indefinida establece una relación entre funciones, inversa a la derivación; la funcies que se calculan se denominan primitivas de la anterior. Este nivel se estudia muy brevemente en bachillerato y sólo con carácter técnico o algorítmico. El concepto que se estudia con mayor detalle es el de integral definida y encontramos de nuevo cuatro sistemas simbólicos esenciales para su modelización: modelo verbal, que proporciona el valor de una cantidad en un intervalo de tiempo, cuando se conoce la ley de ritmo de cambio de esa cantidad durante el mismo intervalo temporal; modelo geométrico, que presenta la integral definida de una función en un intervalo como el área bajo la curva que representa a la función en ese intervalo; modelo numérico, en el que la integral definida queda establecida como el límite de una suma de rectángulos que se obtienen como productos de valores de la función en un intervalo de la variable por la longitud de ese intervalo; finalmente, el modelo analítico lo expresa la regla de Barrow:

$\int_a^b f(x)\, d\, x = F(b) - F(a)$, en donde F es una primitiva de f.

En el caso de la integración el modelo básico con el que se trabaja es el modelo geométrico; la regla de Barrow se presenta como una técnica para poder obtener valores del área bajo una curva de expresión analítica sencilla y fácilmente integrable; el cálculo de primitivas es el complemento algorítmico necesario para poder aplicar la regla de Barrow.

La conexión entre derivación e integración sólo se presenta con claridad en el calculo de primitivas; aún así, la idea de que una misma función admite infinitas primitivas sólo se justifica formalmente. Hay representaciones gráficas en las que aparece representada una función y=f(x) y diversas traslaciones verticales de la misma:

$y_1= f(x) + c_1$; $y_2= f(x) + c_2$; . . . ; $y_n= f(x) + c_n$, en donde se entiende de modo intuitivo que todas esas funciones tienen la misma pendiente en cada uno de los puntos, es decir, tienen la misma derivada y, por tanto, son todas ellas primitivas de la misma función.

Sin embargo, el hecho de que el valor de la derivada de una función en un punto tenga carácter local, mientras que la integral definida deba extenderse a un intervalo, forma parte de la misma interpretación dinámica de las funciones: la velocidad o razón de cambio es un valor instantáneo, reducido a un punto; el espacio recorrido por un móvil es necesariamente una cantidad que necesita de duración, o intervalo temporal. El juego con los diferentes modelos, el carácter de operación inversa de la derivación pero con diferencias acusadas, el empleo de representaciones geométricas no limitadas sólo a superficies, y otros, son algunas de las consideraciones que deben hacerse en relación con el estudio de la integración.

Materiales para el trabajo con este tema son el intégrafo y los diferentes tipos de planímetros propios de estudios tecnológicos y prácticamente ausentes en los centros de Bachillerato. El software informático dedicado al estudio de funciones es, en la actualidad, el material más práctico y que mejor auna el carácter dinámico con las representaciones geométricas.

5. Errores y dificultades.

Se han señalado en el apartado anterior algunas dificultades que surgen al tratar de presentar la integración mediante el uso, lo más completo posible, de los diferentes modelos con los que se trabaja, así como los que surgen de las dificultades de interpretar la integral definida como inversa de la derivada en un punto, por analogía con la relación entre la primitiva de una función y la propia función. Orton ha realizado estudios descriptivos, basados en pruebas y entrevistas a estudiantes, para señalar los errores usuales de los alumnos en el trabajo sobre integración. En estudios recientes, Artigue señala como causas iniciales de error en el estudio del cálculo la dificultad de utilizar representaciones gráficas relevantes y el nivel mínimo de significación que atribuyen a las simbolizaciones utilizadas. El Grupo dedicado al estudio del Pensamiento Matemático Avanzado (Advanced Mathematical Thinking) ha presentado recientemente un estudio sistemático en el que se incluyen pocos datos definitivos para explicar los errores y dificultades en el aprendizaje del cálculo, pero en el que se señalan líneas de trabajo e investigación bien fundadas y orientadas. Schoenfeld también ha estudiado las dificultades que surgen en el cálculo de primitivas cuando se da prioridad a un método estándar de resolución en vez de comenzar por una sustitución que permita una simplificación considerable de los cálculos. A partir de sus observaciones elaboró un modelo de estrategia de control para el cálculo de primitivas, que puede emplearse para diagnóstico, corrección y orientación, y que incluye tres pasos fundamentales: simplificación, clasificación y modificación.

6. Evolución histórica del tópico.

Momentos y autores importantes en la evolución de estos conceptos son:

1. Eudoxo y el método de exhausción.
2. Arquímedes y el método de división.
3. Cavalieri y el método de los indivisibles.
4. El nacimiento del cálculo. Newton y Leibniz.
5. La integral definida de Cauchy. La integral de Riemann.
6. Las funciones medibles, Lebesgue. Generalización del concepto de integral.

7. Bibliografía de referencia.

Abreu, Canavati, Ize, Minzoni (1983); Apostol (1960); Artigue (1991); Bishop, Bridges (1985); Boyer (1986); Bryant (1990); Bynum, Browne, Porter (1986); Courant, John (1989); Delachet (1967); Engel (1979); Eves (1983); Fernández Viña (1992); Forcada (1988); Freudenthal (1973); Grattan-Guinnes (1984); Guzmán, Rubio (1992); Guzmán (1979); Guzmán, Colera, Salvador (1988a); Guzmán, Colera, Salvador (1988b); Hardy (1987); Hoffmann (1983); Lages (1991); Nemirovsky (1991); Orton (1983); Puig Adam (1962); Rey Pastor (1952); Rudin (1967); Schoenfeld (1985);Tall (1991); Volkov (1987).

Tema 30
Título: Números complejos.
1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

No hay referencia a números complejos en los contenidos señalados para Educación Sencundaria Obligatoria. Tampoco aparece ninguna mención explícita a estos contenidos en el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato.

Sin embargo, en el Disseny Curricular para la Ensenyament Secundari Obligatori de la Generalitat de Catalunya aparecen nombrados explícitamente los complejos dentro de los contenidos de la asignatura Matemátiques.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos. Unidad imaginaria. Números complejos; notación binómica. Suma, resta, producto y división de números complejos.
2. Representación geométrica de los números complejos. Representación de la suma de complejos, del producto de un complejo por la unidad imaginaria y del conjugado.
3. Notación polar de un complejo. Expresión trigonométrica; relación entre las distintas notaciones. Producto, división, potencia y radicación de un complejo en forma polar.
4. Raices enésimas de la unidad. Fórmula de Moivre. Aplicaciones a la trigonometría.
5. Regiones y figuras en el plano complejo.

Procedimientos.

a) <u>Utilización de distintos lenguajes</u>.
1. Expresar raices de números negativos como números imaginarios. Ampliar el cálculo de las raices de una ecuación de segundo grado a las soluciones complejas.
2. Simbolizar números complejos empleando las diferentes notaciones: binómica, polar y trigonométrica; representar geométricamente números complejos.
3. Representar gráficamente igualdades en las que intervienen números complejos.

b) Algoritmos y destrezas.

4. Sumar, restar, multiplicar, y dividir complejos en forma binómica. Multiplicar y dividir complejos en forma módulo-argumental o trigonométrica.

5. Calcular las potencias n-ésimas de la unidad imaginaria y las raices n-ésimas de la unidad. Calcular potencias y raices de un número complejo.

6. Resolver ecuaciones con números complejos.

7.Calcular el sen n α y cos n α en función de sen α y cos α.

Estrategias.

1. Elegir la notación más adecuada para expresar relaciones entre números complejos y resolver problemas basados en tales relaciones.

2. Expresar simbólicamente regiones sencillas en el plano complejo; representar en el plano identidades entre complejos.

3. Interpretar geométricamente operaciones con números complejos.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:

1. Valorar las distintas formas de notación para números complejos y sus ventajas para la realización de determinadas operaciones.

2. Curiosidad e interés por expresar mediante identidades complejas regiones o figuras sencillas del plano.

3. Apreciar la definición de números complejos como objeto que viene a proporcionar solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$, a las ecuaciones de segundo grado, y a todos los polinomios de coeficientes reales, en general.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:

4. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos escritos y en la simplificación de expresiones complejas.

5. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido, de los resultados obtenidos y de su representación en el plano, en la realización de operaciones con números complejos.

3. Fenomenología de los conocimientos.

La física contemporánea utiliza los números complejos desde hace más de doscientos años y su presencia, hoy día, es tan frecuente que se puede hablar de una *"complejificación"* de la física. La importancia de los números complejos radica en el hecho de su multiplicación, que liga las partes real e imaginaria, y en las propiedades que tiene esta operación. Ahora bien, todo conjunto de relaciones físicas en las que aparecen números complejos puede reemplazarse por un conjunto equivalente en el que sólo haya números reales, separando las partes real e imaginaria y considerando pares ordenados de números reales. Esto ocurrió desde el comienzo cuando D'Alembert encontró la solución general del sistema de ecuaciones de Cauchy-Riemann, mediante las partes real e imaginaria de la solución general compleja que hoy conocemos.

Los desarrollos en series trigonométricas utilizados en la teoría de las vibraciones también trabajaron de modo independiente las partes real e imaginaria de los desarrollos de las exponenciales imaginarias.

Los números complejos también los encontramos en óptica, al resolver ecuaciones diferenciales que describen fenómenos ondulatorios por el método de las funciones propias. Sin embargo, no hay un fenómeno físico relativamente sencillo cuya interpretación matemática sugiera el concepto de unidad imaginaria o de número complejo. Nos encontramos en el campo de los números complejos con unos conceptos y procedimientos cuyo origen y motivación inicial están únicamente dentro del campo de las matemáticas, aunque su empleo posterior en diferentes campos de la física permita estudiar, resolver e interpretar múltiples problemas ligados a los fenómenos físicos. Esta situación especial hace que los números complejos tengan que presentarse e introducirse únicamente mediante referencias matemáticas y que los planteamientos fenomenológicos queden muy lejanos a las posibilidades de los alumnos de Bachillerato.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

La unidad imaginaria tiene distintas representaciones:
solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$; operatoria: $\sqrt{-1}$; simbólica: i ; relacional: $i^2 = -1$;

geométrica: punto unitario del eje de ordenadas en el plano complejo; vectorial: vector unitario en el eje de ordenadas. Tenemos de nuevo los diferentes sistemas simbólicos usuales en matemáticas: verbal, numérico-operativo, gráfico y algebraico, con los que se presenta la noción de unidad imaginaria. Esta variedad de representaciones permite poner de manifiesto la riqueza de relaciones que conforman este concepto. Por extensión, surgen los modelos de los números complejos: par de números reales (a, b); binomio entre la componente real e imaginaria: a + bi; expresión módulo argumental ρ_θ; expresión trigonométrica ρ (cos θ + i sen θ); punto del plano complejo de coordenadas (a, b); vector con origen en (0,0) y extremo en (a, b).

Cada una de estas representaciones tiene unas determinadas ventajas y, a su vez, unas limitaciones. La notación binómica, que se corresponde con la representación vectorial, es útil para representar las operaciones suma y resta de complejos o el paso al conjugado.

La notación módulo argumental, que se corresponde con la representación en coordenadas polares, es adecuada para expresar las operaciones producto y división de complejos, al menos que nosotros conozcamos, aunque se pueden utilizar las construcciones físicas preparadas para utilizar como un plano cartesiano o un plano polar y el software informático que trabaje con ambos tipos de coordenadas.

5. Errores y dificultades.

El carácter puramente formal de la unidad imaginaria y, por tanto, de los números complejos hace más difícil poner de manifiesto las interpretaciones erróneas que se realizan en el trabajo con números complejos o los fallos en la ejecución de procedimientos. Sólo cuando concluye una tarea es posible apreciar su incorrección por las contradicciones que se derivan de un planteamiento erróneo. El caso más conocido es la paradoja:

en donde se utilizan las reglas de cálculo de modo aparentemente correcto, pero poniendo de manifiesto una falta de comprensión o desconocimiento de las operaciones entre complejos.

En notación binómica las operaciones producto y división tienen mayor dificultad operatoria debido a la propia complejidad de las reglas, y dan lugar a una mayor cantidad de errores procedimentales. En notación módulo argumental hay una dificultad considerable con la obtención de las raices n-ésimas de un complejo; en este caso hay que recordar que todo número complejo tiene infinitos argumentos que, si bien son equivalentes para el producto, la división y la potenciación, no lo son para la radicación y que, por tanto, la clase formada por todos los complejos de igual módulo y argumentos congruentes módulo 2π se parte en n clases diferentes, cuyos argumentos vienen dados mediante la expresión:

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

En este paso la información disponible por parte del alumno es únicamente la que le proporciona su profesor y, difícilmente, llega a comprender la sutileza del argumento justificativo. Carecemos de estudios sistemáticos que nos aporten información contrastada sobre errores y dificultades en el aprendizaje de los complejos.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Algunos momentos y autores importantes en la evolución de los números complejos son:

1. La solución de la ecuación cúbica. Cardano, Bombelli.
2. Las primeras representaciones gráficas. Wallis, Cotes.
3. Números complejos y funciones circulares. Leibniz, Moivre y John Bernouilli.
4. La exponencial imaginaria. Euler.
5. El teorema fundamental del Algebra. Gauss y D'Alembert.
6. Las funciones complejas. Cauchy.

7. Bibliografía básica.

Apostol (1960); Ahlfors (1966); Birkhoff, MacLane (1963); Bishop, Bridges (1985); Bochner (1991); Boyer (1986); Bravo (1971); Bunch (1987); Cartan (1968); Courant, John (1989); Davis, Hersch (1988) Dieudonné (1989); Euler (1988); Feferman (1989); Freudenthal (1973); Guzmán, Colera, Salvador (1988); Hardy (1987); Keldysch (1974); Lang (1976); Lovell (1977); Pozniak (1991); Rey Pastor (1941); Smith (1958); Sondheimer, Rogerson (1981); Stillwell (1989); van der Waerden (1985); Whitehead (1946).

Tema 31

Título: Geometría Analítica plana.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y

Comunidad Autónoma Andaluza.

En el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato aparece la geometría analítica del plano dentro de los contenidos correspondientes a primero y segundo cursos de las especialidades Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología. Estos contenidos no se proponen para la especialidad de Ciencias Sociales y Humanidades.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Vectores en el plano. Producto escalar. Vectores ortogonales. Base ortonormal. sistema de representación. Coordenadas cartesianas.
2. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de dos rectas. Cálculo de distancias. Mediatriz de un segmento.
3. Estudio analítico de la circunferencia. Potencia de un punto con respecto a una circunferencia. Eje radical de dos circunferencias.
4. Las secciones del cono. Estudio analítico de la elipse, la hiperbole y la parábola. Asíntotas de la hipérbola. Tangente a una elipse, hipérbola o parábola.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes:

1. Expresar la ecuación de una recta en forma vectorial, paramétrica, continua, punto-pendiente, explícita o general y realizar la interpretación geométrica en cada caso.
2. Estudiar analíticamente y representar gráficamente la posición relativa de dos rectas.
3. Obtener la ecuación de una circunferencia a partir de diferentes condiciones; determinar el centro y radio de una circunferencia a partir de su ecuación y representarla gráficamente.
4. Estudiar analíticamente y representar gráficamente la posición relativa de una recta y una circunferencia o de dos circunferencias.
5. Obtener la ecuación de una cónica a partir de diferentes condiciones; determinar los elementos principales de una cónica a partir de su ecuación y representarla gráficamente.
6. Estudiar analíticamente y representar gráficamente la posición relativa de una recta y una cónica.

b) Algoritmos y destrezas:
7. Obtener la ecuación de una recta a partir de unas condiciones propuestas. Determinar el punto de corte de dos rectas y calcular el ángulo que forman. Calcular la distancia entre un punto y una recta y entre dos rectas paralelas.
8. Obtener la ecuación de las rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto; obtener la ecuación del eje radical de dos circunferencias.
9. Obtener la ecuación de las rectas tangente y normal a una cónica en un punto; obtener las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola.

Estrategias.

1. Interpretar geométricamente y encontrar relaciones entre los coeficientes de las diferentes ecuaciones de una recta.
2. Comprobar analíticamente relaciones entre rectas, rectas y circunferencias o entre circunferencias, y deducir o interpretar propiedades y relaciones de geometría clásica en las que intervienen rectas y circunferencias.
3. Expresar analíticamente las condiciones de un lugar geométrico y obtener su ecuación.
4. Aplicar los métodos de la geometría analítica del plano para plantear y resolver problemas de incidencia y otras relaciones entre rectas, circunferencias y cónicas.

Actitudes.

a) Referentes a la apreciación de las matemáticas:
1. Valorar la riqueza de expresiones para la ecuación de una recta y la interpretación de los coeficientes en cada caso.
2. Curiosidad e interés por la expresión analítica de propiedades y relaciones de la geometría clásica.
3. Apreciación de la simplicidad y eficacia de los métodos cualitativos para la resolución de problemas geométricos y la claridad en la expresión de los resultados.
4. Apreciación de la potencia de los métodos de la geometría analítica al conjugar el carácter intuitivo de las representaciones gráficas con la simplicidad simbólica y operatoria de la notación algebraica.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:

5. Sistematizar la expresión gráfica de relaciones analíticas y la interpretación analítica de representaciones gráficas.

6. Seleccionar y encontrar la expresión analítica más adecuada para una recta, circunferencia o cónica según la situación y el problema que se trate de resolver.

7. Aplicar ordenada y eficazmente las relaciones y reglas de los procedimientos para la resolución de problemas de geometría analítica del plano.

3. Fenomenología de los conocimientos.

La localización utilizando coordenadas conduce a la algebrización de la geometría. Mientras que el sistema de coordenadas polares utilizado para describir la bóveda celeste y la superficie terrestre ha servido para sistematizar la localización, el sistema de coordenadas cartesianas resulta particularmente eficaz para describir figuras geométricas y movimientos mecánicos y, más adelante, funciones en general. Una figura se traduce algebraicamente en una relación entre coordenadas, un movimiento en una función que depende del tiempo y una aplicación geométrica en un sistema de funciones de un cierto número de variables. De este modo, como ocurrió históricamente, se algebrizó la teoría de las cónicas y al mismo tiempo se amplió; la mecánica geométrica de Newton se transformó en la mecánica analítica, mucho más eficiente; y la teoría de funciones se pudo elaborar algebraico-analíticamente.

Los “fenómenos” que estudia la geometría analítica son, inicialmente las figuras geométricas simples: recta, circunferencia y cónicas; cada una de estas figuras procede a su vez, como ya se ha indicado anteriormente, de una serie de fenómenos estáticos: contornos, huecos, etc, y dinámicos: movimientos lineales uniformes, movimientos circulares y movimientos de proyectiles. Las secciones del cono las encontramos también en las órbitas de los cuerpos celestes. Los movimientos de los planetas y el movimiento relativo de la tierra respecto del sol intentaron interpretarse durante muchos años mediante la circunferencia; después de Kepler el modelo de la elipse fue el que dió la interpretación correcta. Los fenómenos de reflexión en espejos parabólicos, hiperbólicos, elipticos y circulares hacen también uso de conceptos analíticos, y permiten la construcción de hornos, paneles y centrales solares. Las pantallas de radar, antenas parabólicas, etc, son otros tantos productos industriales basados en las propiedades de secciones y superficies cónicas.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

Cada uno de los objetos matemáticos: línea recta, circunferencia, elipse, hipérbola y parábola es un modelo matemático para una serie de fenómenos que hemos comentado; estos modelos se presentan conjuntamente en las secciones del cono. La geometría analítica hace el estudio de estos modelos expresando algebraicamente las relaciones entre las coordenadas de un punto cualquiera que pertenezca a una de estas figuras, cuando se las considera en un plano cartesiano. La identificación de las cónicas con las funciones bicuadráticas, incluyendo los pares de rectas y rectas dobles, fue uno de los resultados más notables de la geometría analítica, posteriormente ampliado a la geometría proyectiva. En este tema el estudio se realiza sobre las expresiones canónicas más sencillas de la circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, pero no cabe duda que se proporciona una ocasión para familiarizar a los jóvenes con unos conceptos cuyo interés en la historia de la matemática y la ciencia ha sido considerable. Cada cónica se presenta como una figura y una ecuación asociada, pero hay otras representaciones interesantes. Si utilizamos un sistema de coordenadas determinado por dos tramas de circunferencias concéntricas a distancia constante de centros respectivamente C1 y C2, es fácil ir señalando puntos del plano cuya suma -o diferencia- de distancias a C1 y C2 respectivamente, sea constante. Se obtienen así una serie de puntos que forman parte de una misma elipse, o hipérbola, con focos los puntos C1 y C2. Por cada valor que se tome como constante para la suma, o diferencia, de distancias se obtiene una elipse, o hipérbola, con iguales focos (se denominan confocales).

La familia de elipses - o hipérbolas - confocales no se cortan entre sí, pero cada elipse corta a cada hipérbola en ángulo recto. Igualmente se puede hacer la representación de una parábola combinando una trama de circunferencias concéntricas a una distancia constante, d, con una trama de rectas paralelas a una recta dada, con igual distancia constante d. La elipse se puede representar por el método del jardinero, mediante doblado de papel, con el método del triángulo de Leonardo, o bien con un elipsógrafo.

La hipérbola también puede dibujarse con una regla fija por un extremo A y un hilo fijo al otro extremo de la regla y a un punto B; apoyando un lápiz sobre el hilo y la regla, hace el recorrido de una hipérbola de focos A y B. También se puede construir como envolvente, utilizando hilos. Igualmente hay parabológrafos, y no debemos olvidarnos de citar la regla y el compás. Las representaciones de las cónicas son curiosas e interesantes, y muestran en su elaboración distintas propiedades de estas figuras.

Son variados los materiales escolares que muestran las secciones cónicas mediante diferentes cortes en un cono. Hay cuerpos en madera y en plástico transparente en donde las secciones se visualizan con facilidad. Muchos objetos industriales tienen contornos o secciones que corresponden a diferentes tipos de estas figuras y que se pueden utilizar fácilmente como recursos para el aula.

5. Errores y dificultades.

Los contenidos de Geometría Analítica han formado parte casi siempre de cursos de especialización en matemáticas dentro de los estudios de Bachillerato, para la especialidad de Ciencias o similares. Se trata pues, de unos conocimientos que se transmiten sólo a una parte de los alumnos, aquellos que tienen mayor interés y están más motivados por alcanzar un dominio más completo en el campo de las matemáticas y que, por tanto, han superado suficientemente las dificultades anteriores. Trabajar en Geometría Analítica implica tener un dominio aceptable de expresiones algebraicas de primer y segundo grado con dos variables; operar con tales expresiones: despejando, obteniendo factores comunes cuando proceda, simplificando, etc. También hay que interpretar y resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y seguir procesos deductivos de cierta complejidad. Por otra parte hay que tener un dominio básico de las relaciones que se presentan entre dos o más rectas, rectas y circunferencias y dos o más circunferencias. El concepto de lugar geométrico como conjunto de puntos del plano que satisfacen cierta propiedad es muy importante para estos contenidos. La presentación intuitiva de la elipse, hipérbola y parábola, que permita disponer de un concepto sencillo asociado a las representaciones correspondientes tiene también importancia. No es suficiente tener la imagen gráfica sino que conviene disponer de experiencias asociadas que conecten de inmediato con algunas propiedades fundamentales.

El núcleo de la Geometría Analítica consiste en la expresión y tratamiento algebraico de las rectas, circunferencias y cónicas, así como de sus propiedades y relaciones. Su comprensión necesita de un dominio básico del lenguaje algebraico y del geométrico y de una conexión adecuada entre ambos. Sorprendentemente, donde mayores dificultades se presentan es en el estudio analítico de la recta y de las propiedades y relaciones que se derivan. Esto es debido a la multiplicidad de expresiones que se presentan, al significado atribuido a cada una de ellas y a las necesarias transformaciones que hay que realizar para resolver los problemas y cuestiones planteados cuando la ecuación inicial de la que se dispone no tiene la expresión adecuada.

Muchos alumnos se pierden en ejercicios de transformación de unas expresiones en otras equivalentes, a las que no terminan de encontrar significado. Se trata de problemas de notación algebraica más que geométricos, y una vez hecha la representación pierden gran parte de su interés. No conocemos ningún estudio sistemático sobre errores y dificultades en la iniciación a la Geometría Analítica; sí es usual que los alumnos terminen encontrando tediosos estos contenidos por el exceso de rutinas que generan y la falta de interés y de situaciones abiertas y creativas.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Momentos y periodos importantes en la evolución histórica de estos conceptos son:
1. Geometría Griega. Apolonio y Euclides.
2. El comienzo de la Geometría Analítica. Descartes, Fermat, Wallis.
3. El estudio de las cónicas y los movimientos. Kepler, Newton, Leibniz.
4. Avances de la geometría en el siglo XVIII. Euler, Clairaut, D'Alambert.
5. Desarrollo de la geometría analítica en el siglo XIX. Plücker, Bobillier.
6. La fundamentación de Hilbert. Geometría analítica actual.

7. Bibliografía:

Alsina, Burgués, Fortuny (1988); Alsina, Trillas (1984); Burgos (1980); Castelnuovo (1979); Castelnuovo (1981); Coxeter (1971); Freudenthal (1978); Guerra, Figueroa (1991); Guelfand, Glagolieva, Kirillov (1981); Grupo Cero (1979); Gutiérrez, García (1983); Guzmán, Colera, Salvador (1988); Henderson (1973); Hilbert, Cohn-Vossen (1983); Lang-Murrow (1988); Lindquist, Shulte (1987); Morris (1986); Lucio (1984); Pedoe (1979); Puig Adam (1961); Rey Pastor, Santaló, Balanzat (1959); Reyes (1984); Skemp (1980); Smith (1958); Velasco (1983); Wells (1991); Yákovliev (1985).

Tema 32

Título: Geometría Analítica del espacio.

1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.

Los contenidos de este tema aparecen entre los que se señalan para el segundo curso de las Especialidades Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología, en el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato, publicado por Ministerio de Educación y Ciencia.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.

Conceptos.

1. Vectores en el espacio. Producto escalar. Vectores ortogonales. Base ortonormal. Sistema de representación. Coordenadas cartesianas.
2. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de dos rectas. Angulo de dos rectas.
3. Ecuaciones del plano. Posiciones relativas de planos y rectas. Representación gráfica de planos y rectas. Vector perpendicular a un plano. Angulos entre rectas y planos.
4. Distancias entre puntos, rectas y planos.
5. Producto vectorial; propiedades. Producto mixto de vectores. Cálculo de volúmenes.
6. Ecuaciones del cilindro, cono y esfera. Otras superficies de revolución.

Procedimientos.

a) Utilización de distintos lenguajes:
1. Expresar la ecuación de una recta en forma vectorial, paramétrica o continua y realizar la interpretación geométrica en cada caso.
2. Estudiar analíticamente y representar gráficamente la posición relativa de dos rectas en el espacio.
3. Expresar la ecuación de un plano en forma vectorial, paramétrica o implícita y relizar la interpretación geométrica en cada caso.
4. Estudiar analíticamente y representar gráficamente la posición relativa de una recta y un plano o de dos planos.
5. Interpretar geométricamente el producto escalar, el producto vectorial y el producto mixto.
6. Expresar la ecuación de un cilindro y de un cono, en casos sencillos, y la de una esfera; realizar la interpretación geométrica en cada caso.

b) Algoritmos y destrezas:
7. Utilizar las coordenadas para determinar el vector que une dos puntos, el punto medio de un segmento, el simétrico de un punto respecto de otro, el baricentro de un triángulo, y otros problemas similares.
8. Obtener la ecuación de un plano a partir de unas condiciones propuestas. Determinar la

interacción de dos planos o de una recta y un plano.
9. Obtener la ecuación de un plano a partir de unas condiciones propuestas. Determinar la interacción de dos planos o de una recta y un plano.
10. Obtener un vector perpendicular a un plano. Calcular el ángulo que forman dos planos o una recta y un plano.
11. Calcular la distancia de un punto a un plano o a una recta, distancia entre dos rectas, distancia entre una recta y un plano y distancia entre planos paralelos.
12. Calcular el producto escalar, vectorial o mixto de vectores. Calcular el volumen de un paralelepípedo.

Estrategias.

1. Interpretar geométricamente las diferentes ecuaciones de una recta, de un plano o de una superficie de revolución.
2. Comprobar analíticamente relaciones entre rectas, rectas y planos o entre planos, y probar o interpretar propiedades y relaciones de geometría en las que intervienen planos y rectas.
3. Utilizar el producto escalar, el producto vectorial y el producto mixto de vectores para el cálculo de longitudes, ángulos, superficies y volúmenes en el espacio.
4. Aplicar los métodos de la geometría analítica del espacio para plantear y resolver problemas de incidencia y otras relaciones entre rectas, planos y algunas superficies de revolución sencillas.

Actitudes.

a) <u>Referentes a la apreciación de las matemáticas</u>:
1. Valorar la riqueza de expresiones para la ecuación de una recta, de un plano o de una superficie de revolución, interpretando los coeficientes en cada caso.
2. Curiosidad e interés por encontrar la expresión analítica de propiedades y relaciones de la geometría clásica del espacio.
3. Apreciación de la sencillez y eficacia de los métodos analíticos para la resolución de problemas geométricos y la claridad en la expresión de los resultados.

4. Apreciación de la potencia de los métodos de la geometría analítica al conjugar el carácter intuitivo de las representaciones gráficas con la sencillez simbólica y operatoria de la notación algebraica.

b) Referentes a la organización y hábitos de trabajo:
5. Sistematizar la expresión gráfica de relaciones analíticas y la interpretación analítica de representaciones gráficas en el espacio.
6. Seleccionar y encontrar la expresión analítica más adecuada para una recta, un plano o una superficie de revolución, según la situación y el problema que se trate de resolver.
7. Aplicar ordenada y eficazmente los procedimientos para la resolución de problemas de geometría analítica del espacio.

3. Fenomenología de los conocimientos.

La geometría analítica se considera como aquella parte de la matemática que, aplicando el método de las coordenadas, estudia los objetos geométricos por medios algebraicos. De este modo, problemas clásicos de construcción geométrica pasaron a tener un proceso de solución mediante técnicas algebraicas, como ocurre con la determinación de un punto que divide a un segmento según una razón dada, el cálculo de la distancia entre dos puntos, el área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices o el volumen de un paralelepípedo. El desarrollo de la geometría analítica proporcionó, junto con el cálculo diferencial y el cálculo integral, el instrumento matemático para el desarrollo de la física que se acelera a partir del siglo XVII, con la teoría de la gravitación universal.

La geometría analítica del espacio no comienza hasta la primera mitad del siglo XVIII, cuando para representar un punto en el espacio se toman tres ejes perpendiculares y se consideran las distancias del punto a cada uno de los planos determinados por los ejes como las coordenadas de dicho punto. A partir de las coordenadas espaciales, y al adoptar la representación vectorial para las fuerzas, velocidades y aceleraciones, cada cantidad de una de estas magnitudes viene dada por sus coordenadas. Los vectores en el espacio, sus operaciones y propiedades expresadas por métodos analíticos permiten dar un tratemiento matemático unificado a las magnitudes vectoriales, proporcionando una teoría clara y precisa para trabajar con fenómenos físicos y tecnológicos.

4. Modelos, representaciones, materiales y recursos.

La noción clave en la geometría analítica del espacio es la de vector en la que tenemos un segmento orientado, un punto (cuando el origen del vector lo tomamos en el origen de coordenadas), unas coordenadas -las del extremo-, un módulo o medida del vector, junto con su dirección y sentido. Esta noción, aparentemente sencilla, permite representar las cantidades de aquellas magnitudes en las que hay que tener en cuenta no sólo su medida sino también la dirección y el sentido. Por ello mismo se les llama magnitudes vectoriales. La geometría analítica del espacio ofrece un modelo tridimensional para el estudio del espacio en el que se pueden representar puntos, rectas, planos, líneas y superficies. Pero cada punto -objeto estático- se identifica con un vector -objeto dinámico- permitiendo una dualidad de interpretaciones a las relaciones y propiedades que se establecen en geometría analítica.

La representación de un punto se hace con una letra: P; con un vector OP; con una terna: las coordenadas (x,y,z,) de P; con una marca gráfica en un sistema cartesiano tridimensional; también puede darse mediante coordenadas polares. A partir de este modelo básico y de sus diferentes representaciones se produce un desarrollo de la geometría analítica. Ideas básicas son que los puntos alineados con el origen deteminan vectores que comparten una misma dirección y sentido y sólo se diferencian por su módulo; esto permite establecer relaciones lineales. Los puntos de un plano vienen dados por vectores que son combinación lineal de otros dos, etc. Con este sistema se deducen propiedades geométricas empleando un número mínimo de principios por métodos puramente analíticos, que se pueden emplear igualmente en mecánica para el estudio del equilibrio y el movimiento en el espacio.

Los materiales para trabajar en geometría analítica tridimensional son escasos y de poca utilidad para los aspectos dinámicos. Los recursos actuales en la representación del espacio tridimensional mediante programas informáticos proporcionan un soporte adecuado para trabajar en este campo, todavía pendiente de una mayor exploración y difusión.

5. Errores y dificultades.

La geometría analítica del espacio tiene mayor dificultad que la geometría analítica del plano. En primer lugar, se presentan problemas de representación: el espacio tridimensional se trabaja sobre una representación plana con las dificultades de perspectiva subsiguientes. En segundo lugar la mayor dimensión del espacio plantea una complejidad mayor de subespacios y variedades, con los consiguientes problemas de incidencia, distancias, ángulos, etc. Las ecuaciones de las rectas en el espacio son menos intuitivas y, por otra parte, la similitud entre las ecuaciones de la recta para la geometría plana con las ecuaciones del plano para la geometría del espacio también induce a confusión. Se dispone de mayor número de conceptos e instrumentos, como ocurre con el producto vectorial, que proporcionan nuevas posibilidades de resolver problemas; pero ello mismo provoca que los alumnos resulten confundidos ante la variedad de opciones a seguir y no tengan claro cuál es la mejor elección en cada caso. Un dominio de la geometría analítica supone, por otra parte, una capacidad considerable de intuición visual y captación de representación de relaciones espaciales que no todos los alumnos de estos niveles están en condiciones de dominar.

6. Desarrollo histórico del tópico.

Momentos y autores importantes en la evolución histórica de estos conceptos fueron:

1. Geometría Griega. Euclides.
2. Comienzo de la Geometría Analítica. Descartes, Fermat, Wallis.
3. Geometría analítica de magnitudes vectoriales. Lagrange, Monge.
4. Expresión analítica de magnitudes vectoriales. Grassmann, Cayley.
5. Espacios de Hilbert.

7. Bibliografía:

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev (1973a); Alsina, Trillas (1987); Bochner (1991); Boyer (1986); Burgos (1980); Castelnuovo (1981); Coxeter (1971); Efimov (1978); Gelfand, Glagolieva, Kirillov (1981); Golovina (1980); Gutiérrez, García (1983); Guzmán, Colera (1989); Henderson (1973); Hilbert, Cohn Vossen (1983); Lang, Murrow (1988); Lindquist, Shulte (1987); Menna (1981); Morris (1986); Rey Pator, Santaló, Balanzat (1959); Roanes (1980); Smith (1958); Yakovliev (1985).

III.3. La Asignatura: Prácticas de Enseñanza.

III.3.1. Fundamento del Programa.

La Didáctica de la Matemática, ya se ha dicho, se ocupa de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza como actividad es una práctica humana y social. Es, precisamente, el compromiso de la Didáctica Matemática con la práctica educativa lo que da sentido a su desarrollo como disciplina. Todo el planteamiento teórico quedaría incompleto si no tuviese lugar una planificación, un contacto con el sistema escolar, una actuación práctica y una reflexión crítica posterior sobre el grado de realización conseguido y la calidad de lo actuado. Esto parece justificable porque los procesos de enseñanza-aprendizaje -incluidos los relativos a matemáticas- ocurren en un contexto institucional; los procesos de enseñanza aprendizaje se pueden interpretar teniendo en cuenta el carácter intencional de los sistemas de comunicación humana; y porque el sentido interno de los procesos de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas consiste en hacer posibles determinados aprendizajes y proporcionar oportunidades apropiadas para los mismos. Ninguna de estas dimensiones puede verificarse mediante consideraciones meramente teóricas; sólo la realización práctica, orientada y controlada, permite apreciar la validez de los planteamientos y el grado de consecución.

La práctica se constituye así en elemento esencial del trabajo didáctico, sin la cual toda la reflexión teórica puede degenerar en discursos especulativos cuya vacuidad queda disfrazada por la artificialidad del lenguaje, la complejidad de los esquemas y la ininteligibilidad del discurso, pero sin correspondencia con la dinámica de funcionamiento del aula ni los intereses de los alumnos.

En otros lugares de este Proyecto, en particular en el apartado II-2-6, se ha hecho una reflexión detallada sobre el papel de la práctica en la formación inicial y permanente del Profesorado de Matemáticas y su interés para la investigación en Didáctica de la Matemática. No corresponde volver a reiterar los argumentos ya desarrollados pero sí destacar de nuevo el hecho de que la Práctica no es un adorno complementario sino un elemento esencial en la formación inicial sobre Didáctica de la Matemática, tanto para el futuro profesor como para el investigador en este Area. Teniendo en cuenta estas consideraciones incluimos en este Proyecto el Programa de la Asignatura Prácticas de Enseñanza.

El Plan de Estudios de la Especialidad de Metodología para la Licenciatura de Matemáticas incluye en 5º Curso, junto con la Asignatura Didáctica de la Matemáticas, la Asignatura Prácticas de Enseñanza en Instituto. Ambas asignaturas se complementan y, conjuntamente, constituyen el núcleo del Plan de Formación inicial de Profesores de Matemáticas en cuyo diseño, desarrollo y ampliación se encuentra comprometido nuestro Departamento.

La complementariedad de ambas materias se pone de manifiesto si tenemos en cuenta que uno de los objetivos esenciales de la formación inicial del Profesorado consiste en dotar de sentido a los conocimientos y planteamientos teóricos, por medio de la experiencia. En particular, se pretende que el Profesor en formación obtenga conocimientos y adquiera experiencia sobre los siguientes elementos de la práctica docente:

1. Planificación. 3. Aprendizaje producido. 5. Evaluación..
2. Realización 4. Gestión y toma de decisiones. 6. Trabajo de Seminario.

Cada una de las especificaciones que se realicen sobre estos elementos tiene una vertiente teórica y otra vertiente práctica. Algunos de los aspectos teóricos han sido ya contemplados en la Asignatura Didáctica de la Matemática, mientras que otros no parece pertinente separarlos de su realización práctica. Es por esto que cada uno de los núcleos de interés que se analicen y estudien en el programa de esta asignatura tienen que considerarse en relación con estas dos dimensiones: **conocimientos y experiencias**. Veamos algunos ejemplos:

1. Planificación. Selección de contenidos.
Conocimientos: Estructura de los contenidos de un tema y conexión con otros temas, de acuerdo con las metas generales y los objetivos del nivel, etapa o ciclo.
Experiencias: Diferentes opciones para la organización de un tema; selección de una organización para un tema, de acuerdo con unos criterios que se siguen de los objetivos.

2. Planificación. Desarrollo de una unidad didáctica y secuenciación.
Conocimientos: Esquema de organización de una unidad didáctica o un conjunto de ellas; diseño de actividades, temporización y selección de tareas para el tratamiento adecuado de los contenidos.
Experiencias: Puesta en práctica de un esquema de organización; valoración e integración de las reacomodaciones necesarias; organización temporal; revisión de las tareas propuestas, composición, utilidad y resultados obtenidos.

3. Planificación. Ejemplos, motivaciones, situaciones de trabajo y materiales.
Conocimientos: Información, ejemplos y aplicaciones prácticas, conectadas con los contenidos del tema en estudio; selección de situaciones y materiales con los que los contenidos del tema adquieran significado y permitan explicitar relaciones.
Experiencias: Presentación de los ejemplos; actuaciones y reflexión logradas con los alumnos sobre los ejemplos utilizados; ventajas e inconvenientes prácticos de cada material; viabilidad de las situaciones y materiales para producir aprendizajes significativos.

4. Realización. Organización del trabajo de los alumnos y coordinación.
Conocimientos: Métodos generales para promover el trabajo en grupo mediante reparto de tareas, elaboración de resúmenes, presentación de resultados, discusión y debate, realización y aceptación de críticas, y elaboración de síntesis finales.
Experiencias: Organización de tareas e implicación en el trabajo de un grupo, detección y propuesta de actividades para la superación de las dificultades que surgen al intentar sintetizar y resumir los resultados de un trabajo; orientación de las discusiones en los puntos relevantes; interpretación de críticas e integración de

aportaciones positivas; discusión y elaboración de síntesis finales.

5. Realización. Presentación de contenidos.

Conocimientos: Técnicas de presentación de los distintos conceptos y procedimientos que constituyen un campo de conocimientos matemáticos, explicitando sus relaciones fundamentales.

Experiencias: Presentación en el aula de las ideas básicas que conforman un conocimiento matemático concreto, comenzando por sus aspectos intuitivos, continuando con sus aspectos formales, realizando las pruebas y demostraciones perinentes y presentando algunas de sus aplicaciones.

6. Aprendizaje. Expresión del conocimiento matemático.

Conocimientos: Esquemas e instrumentos para analizar los diferentes modos de representación, organización y expresión de los conceptos y procedimientos relativos a un tópico matemático.

Experiencias: Explicitar las representaciones de conceptos y organizaciones de conocimientos que sobre un tópico determinado tienen alumnos concretos. Conocer diferentes modos de expresar un conocimiento y detectar las deficiencias de comprensión existentes, en base a las producciones de los alumnos.

7. Aprendizaje. Tratamiento de errores.

Conocimientos: Información organizada sobre errores usuales que se presentan en la realización de tareas matemáticas y sobre deficiencias en la comprensión de conceptos, así como sobre su diagnóstico y corrección. Esta información debe conocerse con carácter general y para temas específicos; a nivel de grupo e individualmente.

Experiencias: Detección de fallos en la ejecución de tareas de los alumnos mediante actividades y ejercicios diseñados para ello; propuesta de tareas para poner de manifiesto los errores detectados, tanto en la ejecución como en la comprensión de conceptos; revisión y reorganización de la información de los alumnos.

8. Gestión de clase. Contrato didáctico.

Conocimientos: Condiciones y reglas generales del contrato didáctico, el modo de presentarlo y su aprobación. Negociación y renegociación.

Experiencias: Explicitar y presentar en un grupo las reglas de funcionamiento para una clase de matemáticas, llevarlas a la práctica y renegociarlas cuando sea necesario.

9. Gestión de la clase. Dinámica del grupo.

Conocimientos: Estrategias para mantener el interés de los alumnos, actividades, actuaciones, y trabajo constructivo.

Experiencias: Consecución de un trabajo fluido, un ambiente de interés y un mantenimiento de la disciplina y el respeto mútuo mediante la propuesta de actividades para un tópico matemático concreto. Atención de casos particulares: alumnos con dificultades y alumnos más avanzados.

10. Gestión de la clase. Toma de decisiones.

Conocimientos: Interacción sobre la oportunidad y momentos en que es necesario reavivar el interés en el transcurso de una clase, replantear cuestiones, integrar nueva información y promover o estimular el trabajo de los alumnos.

Experiencias: Tomar decisiones concretas con la finalidad de incentivar o motivar a los alumnos individual o colectivamente; aceptar o rechazar las aportaciones que realizan éstos; proponer tareas específicas y modos de trabajo concretos; decidir el momento en que hay que concluir un debate u obtener una determinada conclusión.

11. Evaluación. Corrección de los trabajos.

Conocimientos: Criterios para valorar las actuaciones de los alumnos, detectar fallos o incorrecciones, proponer nuevas realizaciones e incentivar el autocontrol del trabajo propio o del grupo al que se pertenece.

Experiencias: Aplicar criterios concretos para valorar las producciones de los alumnos en relación con un tópico; elaborar instrumentos para poner de manifiesto los fallos o incorrecciones; planificar diversas tareas con las que se evalúen las mismas competencias; proporcionar técnicas de reflexión y control de las propias producciones.

12. Evaluación. Promoción de los alumnos.

Conocimientos: Estrategias para interesar a los alumnos en el trabajo bien hecho; favorecer la autoestima; potenciar la capacidad de comprensión y el interés por realizar razonamientos correctos.

Experiencias: Agilizar criterios para valorar globalmente la calidad de un trabajo, la precisión de una respuesta, la adecuación y validez de un argumento, el empleo de diversidad de conceptos y procedimientos para la obtención de una conclusión. Promover explícitamente la satisfacción por el propio trabajo y el esfuerzo realizados.

13. Trabajo en Equipo. Tareas de Seminario.

Conocimientos: Información sobre las fases y etapas para realizar el Proyecto Curricular de Centro y los Programas de las asignaturas del Area de Matemáticas. Organizadores de cada uno de los temas y bloques de contenidos.

Experiencias: Elaboración detallada de los objetivos, contenidos, metodología y evaluación para temas concretos, explicitando sus aspectos de fenomenología, modelos, representaciones, materiales, recursos, errores y dificultades correspondientes a temas concretos del currículo.

14. Trabajo en Equipo. Tareas de Centro.

Conocimientos: Organización y funcionamiento de los Centros de Secundaria; diversas tareas que realizan los profesores; responsabilidades y competencias.

Experiencias: Estudios sobre la adecuación de las instalaciones y servicios del Centro en el que se realizan las prácticas; participar en tareas específicas; conocer la dinámica de gestión, participación y toma de decisiones tanto en el Seminario de Matemáticas como en el Centro en general.

Debido a estas características, el desarrollo de esta Asignatura que figura en el Plan de Estudios como una materia de curso completo con 3 horas lectivas semanales, requiere una programación especial, distinta de otras asignaturas.

Consideramos que una Asignatura de Prácticas, sin una permanencia física de los alumnos en Institutos de Bachillerato como Profesores en formación, carece de sentido. Por ello, eje central de esta Asignatura es la observación dirigida de clases impartidas por Profesores tutores y, también, la impartición de clases por el propio alumno. Por este motivo, la articulación del Programa de esta materia incluye un periodo de estancia en un Centro de Bachillerato o Formación Profesional, cuya duración actual es de un mes.

III.3.2. Criterios para la organización de la asignatura:

Los Profesores Tutores.

Un factor importante de la formación práctica del futuro profesor de matemáticas lo constituye el Tutor de Prácticas, función que es asumida por profesores de Bachillerato y Formación profesional con experiencia, los cuales aportan el componente de destreza personal de la acción del profesor en el aula.

Seminarios Didácticos.

Con objeto de garantizar una acción coordinada del trabajo de los tutores y de establecer una red de centros comprometidos con la innovación e investigación en Didáctica de la Matemática, se organizan Seminarios periódicos entre los profesores tutores en el Departamento de Didáctica de la Matemática. De este modo se estimula el intercambio de recursos y de puntos de vista para la mejora de la calidad de la Asignatura de Prácticas. Por consiguiente, la formación del futuro profesor de matemáticas, impartida por el Departamento de Didáctica de la Matemática, mejora al potenciarse su componente profesional.

Duración y observación de las prácticas.

Durante el periodo de realización de las prácticas, de cuatro semanas de duración, el alumno asiste a un Centro de Bachillerato o Formación Profesional, acompañando al profesor tutor en todas sus actividades docentes; de este modo, queda inmerso en la vida del Centro. Con objeto de llevar a cabo una labor de apoyo didáctico y de evaluación formativa, el Profesor de Prácticas, efectúa visitas periódicas al Centro. Esta función de observación y apoyo puede ser llevada a cabo por otros profesores del Departamento, cuando el número de alumnos así lo requiera.

Fases de desarrollo de la Asignatura.

La Asignatura, de acuerdo con las consideraciones hechas, se estructura en tres fases:

1. **Planificación.**
2. **Realización.**
3. **Evaluación.**

La **fase de planificación** precede a las prácticas en el Centro, y en ella se estudian y analizan los materiales curriculares, se práctica la función docente de programación de la enseñanza y, en general, se organizan y sistematizan los conocimientos relativos a la puesta en práctica de los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

La **fase de realización** es la que se lleva a cabo en los Centros y constituye el núcleo práctico de la asignatura. En esta fase el alumno pone a prueba los conocimientos adquiridos y los dota de significado mediante la experiencia. La dimensión práctica se consolida con la adquisición de experiencia relativa a cada uno de los elementos docentes antes mencionados.

Finalmente, hay una tercera **fase de valoración** para evaluar, criticar, analizar y reflexionar sobre el trabajo observado e, igualmente, sobre el trabajo realizado, así como sobre los logros alcanzados por cada alumno en la realización de su trabajo práctico.

Cada una de estas fases tiene un tratamiento diferenciado en el Programa de la Asignatura.

Selección de contenidos.

En la selección de los contenidos y actividades a realizar en la asignatura *"Prácticas de Enseñanza"* se han tenido en cuenta los componentes pedagógicos y psicológicos de la actuación del profesor en un centro de Enseñanza Media y en el aula, describiéndose las funciones y rasgos característicos del profesor de matemáticas y los componentes afectivos y actitudinales de los alumnos. Pero el eje fundamental de actuación ha de ser didáctico, centrándose en el dominio de recursos técnicos, curriculares, metodológicos y en la práctica del diseño y análisis crítico de situaciones didácticas específicas del contenido matemático a enseñar. Esta labor se llevará a cabo teniendo en cuenta los aportes más recientes de nuestra disciplina y en el uso de las nuevas tecnologías de la información en los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Se considera fundamental inducir en el futuro profesor de matemáticas un espíritu innovador y una actitud favorable a la investigación-acción pero, al mismo tiempo, una postura abierta y receptiva, aunque crítica, al progreso de la investigación en Didáctica de la Matemática. Por ello, en las prácticas de programación se estimulará la consulta tanto de los materiales curriculares actualmente en uso, como de las colecciones de revistas de profesores de matemáticas disponibles en el Departamento.

Los contenidos de esta Asignatura no son conocimientos en cuya estructura formal haya que profundizar. El trabajo fundamental se realiza en sesiones de Seminario: reflexión, debate y crítica; participación, observación, revisión y evaluación; planificación, realización, valoración de actuaciones y asunción de las críticas, para llegar a una nueva organización y puesta en práctica.

III.3.3. Programa de la Asignatura.

OBJETIVOS:

A través de las Prácticas de Enseñanza el alumno, además de conocer la realidad educativa, apreciar la necesidad de una mejora del currículo, y descubrir o reafirmar la propia vocación docente, adquirirá capacidades sobre los siguientes aspectos:

1) Considerar la práctica docente como objeto de análisis y reflexión.
2) Conocer y evaluar los currículos actuales de matemáticas, tomando conciencia de la necesaria transposición didáctica de las nociones y procesos matemáticos en su adaptación a la realidad escolar.
3) Reconocer, valorar y respetar diferencias individuales en intereses y conocimientos de los alumnos y adaptar los métodos de enseñanza a tales diferencias.
4) Apreciar las interacciones entre los sujetos (profesor y alumnos) y el conocimiento dentro del aula.
5) Planificar y usar una variedad de métodos de enseñanza de las matemáticas y materiales curriculares para conseguir unos objetivos determinados.
6) Comprobar el progreso individual de los alumnos y prescribir trabajos de corrección o enriquecimiento en vista de los resultados.
7) Usar distintas técnicas para evaluar y mejorar los propios métodos de enseñanza.
8) Valorar la necesidad de armonizar en todo momento teoría y práctica.
9) Descubrir o reafirmar la propia vocación docente.

CONTENIDOS Y DESTREZAS:

FASE I.- PLANIFICACION DE LA ENSEÑANZA.- TEMAS:

1. Funciones y competencias del profesor en acción.
2. Organización y programación de un curso de matemáticas.
3. Diseño de Unidades Didácticas de Matemáticas.
4. Actitudes hacia la matemática de los alumnos de Secundaria Obligatoria, Bachillerato y

5. Seminarios Didácticos. Tutorías.
6. Observación y registro de la actividad docente.

FASE II.-REALIZACION.

Durante la fase de realización de las prácticas el alumno recibirá información de los Profesores Tutores acerca de los aspectos organizativos de un Centro de Enseñanza Media, del Plan de Centro y las actividades llevadas a cabo por el Seminario de Matemáticas. Así mismo, estudiará las programaciones y materiales curriculares del Seminario de Matemáticas del Instituto en que realice las prácticas.

Además, realizará las siguientes actividades:

1) Observación de clases impartidas por el Profesor Tutor.
2) Programación de las unidades didácticas que se le asignen de acuerdo con las directrices del Plan de Centro. Preparación de clases.
3) Impartición de la enseñanza compartiendo con el Tutor la responsabilidad de la misma.
4) Cumplimentación del diario de clase.
5) Colaboración con el Profesor Tutor en la aplicación y corrección de pruebas de evaluación.
6) Participación en distintas tareas académicas y organizativas del Centro (reuniones de seminario, de evaluación, etc.).
7) Asistencia a las reuniones de Seminario que se celebrán semanalmente en el Departamento de Didáctica de la Matemática para el seguimiento de las prácticas y compartir la experiencia con el resto de los compañeros.

FASE III.- VALORACION.- TEMAS:

7. Análisis didáctico de clases de matemáticas.

8. Estilos de enseñanza de las Matemáticas. Incidencias en el aula de matemáticas.

9. Prácticas de diseño de unidades didácticas.

10. Evaluación de un programa escolar de Matemáticas.

METODOLOGIA.

1) Las fases I y III se basarán tanto en el método expositivo como en el trabajo dirigido en pequeños grupos, lecturas recomendadas y en seminarios de discusión.
2) Funciones del Profesor de la Asignatura Prácticas de Enseñanza:
   - Impartición de la docencia en las fases I y III.
   - En colaboración con la Delegación Provincial de Educación, y entre Seminarios de Matemáticas de distintos Centros de Enseñanza Media, asignación de los Profesores Tutores de prácticas.
   - Organización de Seminarios con los Profesores Tutores, orientados a conseguir una

coordinación en las prácticas de los alumnos, apertura hacia la innovación y mejora del currículo, estimulando la investigación-acción.

- Como observador participante asistirá a clases impartidas en los Centros de Enseñanza Media por los alumnos en prácticas durante la fase de realización de las mismas. Algunas de las clases impartidas por los alumnos en prácticas serán grabadas en vídeo para su posterior análisis en la fase de valoración de la asignatura.

EVALUACION.

La evaluación del alumno se realizará en base a:

1) Los trabajos prácticos de programación de unidades temáticas.
2) El informe del Profesor Tutor y la observación del trabajo realizado, llevada a cabo por el Profesor de Prácticas.
3) Memoria de Prácticas.

Para evaluar esta fase de realización de prácticas se aplicarán dos instrumentos elaborados con este fin:

- Cuestionario sobre expectativas respecto a las prácticas y necesidades para la docencia. (Aplicado antes de incorporarse a los Institutos).
- Cuestionario sobre logros alcanzados durante las prácticas y nuevas necesidades para la docencia. (Aplicado despues de incorporarse a los Institutos).

La asistencia a clase se considera esencial en esta asignatura.

TEMPORIZACION.

1) La fase II (Realización) tendrá una duración de cuatro semanas en las cuales el alumno asistirá al centro de Enseñanza Media que se le asigne, interrumpiéndose las clases de las restantes asignaturas. Estas cuatro semanas serán del segundo trimestre del curso.

2) Las fases de planificación y valoración tendrán lugar, respectivamente, antes y despues del período de realización y estarán coordinadas con la asignatura "Didáctica de la Matemática en Bachillerato". La fase de valoración se iniciará simultáneamente con la de realización, mediante los Seminarios semanales de discusión y apoyo del trabajo práctico en curso.

III.3.4. Desarrollo del Programa:

La Programación de esta Asignatura comprende 6 Temas en la Fase de Planificación y 4 Temas en la Fase de Valoración, además de la Fase de Realización cuyo plan de trabajo se ha descrito anteriormente.

Los 10 temas de las Fases I y III se estructuran de acuerdo con los siguientes apartados:

Título.
Objetivos.
Contenido.
Bibliografía básica.
Otros Materiales.
Actividades.
Evaluación.

Este esquema es similar al que utilizamos en la Parte A del Programa de la Asignatura Didáctica de la Matemática y, por tanto, mantiene el modelo de diseño curricular articulado sobre los componentes: Objetivos, Contenidos, Metodología y Evaluación.

Tomar conciencia de las dimensiones de la actuación docente y de la necesaria coordinación de la teoría con la práctica son objetivos comunes a todos los temas de este Programa cuyo desarrollo pasamos a detallar:

Tema 1.

Título: Funciones y competencias del profesor en acción.

Objetivos:

- Caracterizar la profesión docente y las funciones que corresponden a los profesores.
- Explicitar las concepciones de los futuros profesores sobre los rasgos y comportamientos (positivos y negativos) del profesor de matemáticas.
- Considerar la práctica docente como objeto de análisis y reflexión.
- Reflexionar sobre los diferentes conceptos de enseñanza eficaz de las matemáticas.

Contenidos:

- Funciones del profesor. Características profesionales de los docentes.
- Concepto de eficacia docente; diversas aproximaciones.
- Dimensiones de la labor docente del profesor de matemáticas:
    * Relaciones profesor - institución escolar.
    * Relaciones profesor - alumno.
    * Relaciones profesor - conocimiento matemático.
    * Relaciones profesor - funcionalidad del conocimiento matemático.
    * Rasgos o características personales; diversos perfiles de profesor según capacidades.

Bibliografía básica:

Aebli H. (1988); Anguera M.T. (1983); Imbernon F. (1989); Ketele J.M. De (1984); Lappan G. (1991); Fortuny J., Azcárate C. (1992); Marcelo C. (1991); Postic M. (1978); Rosenshine B. y Stevens R. (1986).

Otros Materiales:

Se utilizarán las siguientes parrillas de observación:

- Postic (1978): Ficha de observación y lista de criterios operacionales.
- Rosenshine y Stevens (1986): Teaching function.
- Análisis del acto didáctico por medio del CCTV (cuestionario de observación. Dpto de Didáctica y Organización Escolar. Universidad de Granada.
- Ryans (1978): Características de los profesores. En: Postic (1978), Observación y formación de profesores.
- Boujold (1986): Pauta para el análisis de prácticas pedagógicas. En: A. Bouvier (Ed.) Didactique des mathématiques.
- Brousseau (1990): Método de observación de una situación didáctica. IREM de Burdeos.

Actividades:

- Confrontar las concepciones de los profesores en formación sobre enseñanza eficaz de las matemáticas con pautas derivadas de investigaciones sobre pensamiento y creencias del profesorado.
- Cumplimentar un cuestionario abierto sobre las funciones y competencias del profesor de matemáticas.
- Organización de las respuestas y elaboración de una parrilla para interpretar las respuestas de los alumnos.
- Presentación y discusión de distintas pautas de valoración de las actuaciones de los profesores en el ejercicio de la función docente.
- Revisión de las respuestas elaboradas por los alumnos mediante comparación con las pautas teóricas de valoración presentadas.
- Observación de grabaciones en vídeo de clases de matemáticas impartidas por profesores expertos y noveles y aplicación de las pautas de valoración establecidas con anterioridad.

Evaluación:

Al concluir este tema se valorará la capacidad de los profesores en formación para:

- Determinar las diversas funciones del profesor en acción y las conexiones entre ellas.
- Argumentar las propias concepciones sobre las prioridades para el desempeño eficaz de las funciones docentes.
- Apreciar las competencias puestas de manifesto por un profesor en el desempeño de una clase e indicar las carencias observadas.
- Distinguir diferentes tipos de profesor en acción.

Tema 2.

Título: Organización y Programación de un curso de Matemáticas.

Objetivos:

- Explicitar las variables que, en la fase preactiva, intervienen en la reflexión sobre el curriculo. Enmarcar los elementos que conforman un Proyecto Curricular de Centro.
- Analizar los contenidos de un Curso de Secundaria Obligatoria o Bachillerato para la Asignatura de Matemáticas y diseñar diversas organizaciones y secuencias para los mismos.
- Seleccionar y planificar una variedad de métodos de enseñanza de la matemática y materiales curriculares para conseguir unos objetivos determinados mediante el desarrollo de un curso de Secundaria Obligatoria o Bachillerato.
- Planificar la evaluación , los diversos instrumentos a utilizar y las tareas de recuperación previsibles en relación con el programa, para la Asignatura de Matemáticas de un curso de Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

Contenidos:

- Fase preactiva de la enseñanza: decisiones y rutinas.
- Proyecto Curricular de Centro: planificación.
- Variables curriculares en la fase preactiva: objetivos, contenidos, actividades y evaluación.
- Programas de la Asignatura de Matemáticas de los diferentes cursos de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
- Relaciones prioritarias entre las variables curriculares.

Bibliografía básica:

Bell A., Burkhardt H., Swan M. (1991); Cockroft W. (1985); Fortuny J., Azcárate C. (1992); González A., Naves S. y Salvat A. (1983); Lappan G. (1991); Luengo R. (1991); Martínez J. y Salinas D. (1988); M.E.C. (1989); M.E.C. (1975); Rico L. (1990); Rotger B. (1978); Zabalza M. (1987).

Otros Materiales:

- Ejemplos de programaciones
- Documentos curriculares: administrativos, legales, diseños curriculares, ensayos didácticos.
- Libros de texto de Bachillerato y Formación Profesional.
- Ejemplos de pruebas y actividades para la evaluación.
- Ejemplos de pruebas calificadas con diferentes criterios.

Actividades:

- Presentación y discusión de ejemplos de programaciones de curso elaboradas por profesores expertos.
- Negociación de los apartados que debe incluir un modelo de programación de un curso de matemáticas.
- Elaboración de Proyectos Curriculares de Centro para Cursos y Ciclos.
- Presentación y discusión de los Proyectos Curriculares elaborados.
- Organización y secuenciación de los contenidos de matemáticas de un curso.
- Presentación y discusión de métodos y recursos adecuados para el tratamiento y desarrollo de un contenido.
- Presentación y discusión de métodos, instrumentos y criterios para la evaluación y recuperación de contenidos matemáticos concretos.

Evaluación:

Al concluir este tema se valorará la capacidad de los alumnos-profesores en formación para:

- Destacar aspectos prácticos en las programaciones propuestas
- Lograr un nivel de profundización en los distintos componentes curriculares.
- Incorporar características innovadoras, teniendo en cuenta resultados de investigaciones didácticas.
- Discriminar y mostrar sensibilidad y coherencia en las argumentaciones acerca de las propuestas curriculares debatidas.

Tema 3.

Título: Diseño de Unidades Didácticas de Matemáticas.

Objetivos:
- Ampliar el repertorio de instrumentos a emplear en el diseño de unidades didácticas.
- Proporcionar técnicas de diseño de unidades didácticas en matemáticas
- Articular los contenidos de un bloque de conocimientos de matemáticas en unidades didácticas dentro de un mismo curso de Secundaria Obligatoria o Bachillerato.
-Seleccionar y planificar una variedad de métodos de enseñanza de la matemática y materiales curriculares para conseguir unos objetivos determinados mediante el desarrollo de los contenidos de una unidad didáctica.
- Planificar la metodología de evaluación, instrumentos a utilizar y tareas de recuperación en relación con la organización de una unidad didáctica de matemáticas para un curso de Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

Contenidos:
- Programación de unidades didácticas en las Asignaturas de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

- Objetivos de una unidad didáctica; niveles de concrección.
- Los contenidos: conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes. Modelos y representaciones.
- Actividades. Fenomenología de los conocimientos estudiados. Materiales y recursos.
- Evaluación. Errores y dificultades. Diagnóstico y tratamiento.

Bibliografía básica:
Bell A., Burkhardt H., Swan M. (1991); Cockroft W. (1985); Fortuny J., Azcárate C. (1992); González A., Naves S. y Salvat A. (1983); Lappan G. (1991); Luengo R. (1991); Martínez J. y Salinas D. (1988); M.E.C. (1989); M.E.C. (1975); N.C.T.M. (1989); Rico L. (1990); Rotger B. (1978); Suydam M. (1986); Tourner Y. (1972);.

Otros Materiales:
- Ejemplos de diseños de unidades didácticas
- Documentos curriculares: administrativos, diseños curriculares, ensayos didácticos.
- Libros de texto de Bachillerato y Formación Profesional.
- Materiales y recursos usuales en el tratamiento y desarrollo de contenidos de matemáticas.
- Pruebas de diagnóstico y evaluación.

Actividades:

- Discusión y puesta en común sobre las variables curriculares que deben configurar el diseño de una unidad didáctica y las relaciones prioritarias entre las mismas.
- Presentación y discusión de ejemplos de programaciones de unidades didácticas elaboradas por profesores expertos.
- Elaboración de programaciones de unidades didácticas sobre tópicos concretos.
- Presentación y discusión de las programaciones elaboradas.
- Concreción de los objetivos de una unidad didáctica y especificación de diversos niveles de análisis.
- Concreción de los distintos tipos de contenidos de un tópico y explicitación de las relaciones entre ellos.
- Presentación, discusión y selección de los materiales y recursos adecuados para el desarrollo de una unidad didáctica.
- Presentación y discusión de instrumentos para diagnosticar errores y dificultades en la adquisición de conocimientos matemáticos y evaluar el dominio sobre los mismos.

Evaluación:

Al concluir este tema cada alumno habrá realizado el diseño de una Unidad Didáctica correspondiente a la Asignatura de Matemáticas en Educación Secundaria o Bachillerato.
Sobre ese documento se valorará:

- su coherencia con las programaciones referidas al curso correspondiente.
- el carácter práctico del diseño propuesto.
- el nivel de concreción en los distintos componentes curriculares.
- las características innovadoras incorporadas, teniendo en cuenta los resultados de

investigaciones didácticas.
- la capacidad de discriminación, sensibilidad y coherencia en las argumentaciones acerca de las propuestas curriculares debatidas.

Tema 4.

Título: Actitudes hacia la Matemática de los alumnos de Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación profesional.

Objetivos:
- Tomar conciencia de la diversidad de intereses de los alumnos en relación con el aprendizaje de las matemáticas.
- Apreciar la importancia del tratamiento de la diversidad de actitudes de los alumnos en los procesos de enseñanza de las matemáticas.
- Reconocer y valorar diferencias individuales en intereses y actitudes hacia la matemática en los alumnos de Educación Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional.
- Valorar el desarrollo de actitudes positivas y de apreciación hacia las matemáticas dentro de los procesos de su enseñanza-aprendizaje.
- Valorar el desarrollo de actitudes positivas hacia el pensamiento organizado y la promoción de hábitos de trabajo mediante la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Contenidos:
- Las actitudes como componentes del conocimiento matemático de los alumnos.
- Papel de las actitudes en el desarrollo metodológico, gestión y toma de decisiones de una clase de matemáticas.
- Dimensiones para analizar las actitudes hacia la matemática de los alumnos:

* Las matemáticas y yo mismo. * Las matemáticas como proceso.
* Las matemáticas y la sociedad. * Las matemáticas en la escuela.

- Diversificaciones en el aula de matemáticas atendiendo a las actitudes de los alumnos, en relación con:

* Las técnicas de trabajo. * Los agrupamientos flexibles. * Las consignas impartidas oralmente.
* Las actividades de aprendizaje. * Los canales de expresión.

- Motivación en la clase de matemáticas.

Bibliografía básica:
Arana J., Escudero T., Garcés R., Palacián E. (1986); Escudero T., Garcés R., Palacián E. (1984); Gairin J. (1987); Lázaro A., Asensi J. (1987); M.E.C. (1989); Sancho J. (1987); Rosales C. (1990).

Otros Materiales:

- Instrumentos de valoración de actitudes.
- Encuesta sobre actitudes hacia la matematica del IEA (II) "International Evaluation Achievement in Mathematics".
- Encuesta sobre "Intereses y actitudes hacia la enseñanza" de J. Sancho (1987).
- Resultados de encuestas realizadas a alumnos de diversos niveles.

Actividades:

- Presentación y discusión de instrumentos para determinar y valorar las actitudes de los alumnos hacia la matemática.
- Presentación y análisis de datos sobre actitudes obtenidos de una muestra de alumnos de Bachillerato y Formación Profesional.
- Determinación de factores que conforman diferentes valoraciones del conocimiento matemático. Tipificación de alumnos según su escala de valores hacia las matemáticas.
- Análisis y discusión de las diferencias de valoración sobre matemáticas entre profesores y alumnos. Implicaciones educativas y para la motivación.

Evaluación:

Al concluir este tema el alumno debe:
- Explicitar su grado de tolerancia ante la existencia de actitudes diferentes hacia las matemáticas.
- Conocer diversificaciones para el trabajo en el aula y diversas situaciones y recursos que favorezcan la motivación de los alumnos.
- Elaborar un instrumento para determinar las actitudes generales de los alumnos de Educación Secundaria y Bachillerato hacia las matemáticas, explicitando los criterios empleados.

Tema 5.

Título: Seminarios Didácticos. Tutorías.

Objetivos:

- Conocer la organización de un centro de enseñanza de Bachillerato, particularmente las funciones del Seminario de Matemática.
- Tomar conciencia y apreciar el valor del trabajo en equipo; valorar las interacciones entre los compañeros del Seminario y del Centro.
- Determinar las posibilidades y limitaciones de proyectos inter y multidisciplinares.
- Conocer el papel de la tutoría para la formación de los alumnos.
- Conocer técnicas de orientación tutorial para el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

- Conocer los niveles de dominio de conocimientos matemáticos necesarios para las diversas orientaciones profesionales.
- Analizar y racionalizar el desencanto que produce el trabajo profesional en educación.

Contenido

- Organos directivos y organigrama de funcionamiento de un Centro de enseñanza media.
- Seminario didáctico: coordinación, interdisciplinariedad, elementos de organización escolar ligados al Seminario.
- El Seminario/Departamento de Matemáticas: especificidad, materiales y documentos. La biblioteca del Seminario.
- Técnicas de Orientación Tutorial; utilidad para el aprendizaje de las matemáticas.
- Orientación Profesional; niveles de dominio en el conocimiento matemático.

Bibliografía básica:

Boletín Oficial del Estado (1972); Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (1989); Cockroft W. (1985); Fortuny J.M., Azcárate C. (1992); Illana J.C. (1978); Kepner H.S. y Johnson D.R. (1985); La Fuente J. (1978); Lázaro A., Asensi J. (1987); MEC (1972);Roman J.J., Pastor J. (1979).

Materiales:

- Documentos oficiales.
- Ejemplos de actas de reuniones de seminario
- Ejemplos de producciones del seminario de matemáticas: programaciones, memorias, pruebas de evaluación comunes.
- Grabaciones en vídeo de sesiones de tutoría realizadas por profesores expertos y noveles.
- Informes relativos a las necesidades de formación en matemáticas para diversas profesiones.

Actividades:

- Presentación y discusión de la normativa oficial sobre los organos de dirección, funciones, organización y responsabilidades de un Centro de enseñanza media.
- Presentación y discusión de la normativa sobre Seminarios Didácticos.
- Discusión sobre posibles alternativas de realización de las funciones del tutor de matemáticas.
- Realización en "role-playing" de una reunión de Seminario de Matemáticas. Material.
- Discusión sobre los conocimientos matemáticos necesarios y su nivel de dominio para diferentes profesiones.
- Explicitación de diversas funciones que se pueden desarrollar mediante la orientación tutorial.

Evaluación:

Al concluir este tema el alumno mostrará un conocimiento adecuado relativo a:

- Organización, funcionamiento y órganos de gobierno en un centro de enseñanza.
- La dimensión organizativa y directiva que corresponde al profesor.
- Organización de contenidos en proyectos inter y multidisciplinares.
- Necesidades de conocimientos matemáticos y formativos para diversas profesiones.
- Funciones educativas de la orientación tutorial.

Tema 6.

Título: Observación y registro de la actividad docente.

Objetivos:

- Caracterizar la observación de la actividad docente y distinguir niveles de sistematización en la misma.
- Conocer métodos e instrumentos para la observación sistemática de la actividad en el aula de profesores y alumnos, en especial los relativos a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Disponer de un esquema para registrar las observaciones de la actividad docente y organizar la información obtenida en un diario de clase.
- Conocer métodos e instrumentos para la autoobservación durante la realización de la actividad docente; valorar las limitaciones de la autoobservación.
- Disponer de una estructura para organizar la Memoria de Prácticas.

Contenido:

- Observación de la actividad docente. Fases del método observacional. Ventajas, limitaciones y dificultades de las observaciones.
- Niveles de sistematización de la observación. Metodología observacional e importancia para la formación de profesores de matemáticas.
- Técnicas de registro observacional. Análisis cualitativo de datos.
- Grado de participación del observador. Autoobservación.
- Información relevante en la observación de la clase de matemáticas.

Bibliografía básica:

Anguera M.T. (1989); Anguera M.T. (1991); Ciscar C., Uria E. (1991); Fortuny J.M.; Azcárate C. (1992); Lázaro A., Asensi J. (1987); Zabalza M. (1986).

Otros Materiales:

- Escalas de apreciación.
- Listas de control.

- Cuestionarios abiertos y cerrados.
- Hoja diaria de observaciones:

    * Contenidos/medios.
    * Interacción en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.
    * Gestión del aula de matemáticas.

- Esquemas diferentes para la Memoria de Prácticas.
- Ejemplos de diarios y Memorias de Prácticas.

Actividades:

- Observación de una sesión grabada de clase de matemáticas sin preparación previa y discusión de los datos e informaciones obtenidas por los diferentes observadores.
- Presentación de diferentes métodos e instrumentos para la observación de la actividad en el aula; valoración de la complementariedad o redundancia de la información obtenida por diversas vías, de su nivel de sistematización y de su validez.
- Observación de una sesión grabada de clase de matemáticas empleando cada uno de los observadores diferentes criterios e instrumentos; discusión de los datos obtenidos por los observadores.
- Presentación y discusión de criterios para elaborar el diario de observación de clase, destacando los aspectos más relevantes para describir los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.
- Prensentación y discusión de criterios para organizar la Memoria de Prácticas.

Evaluación:

Al concluir este tema, cada alumno deberá:

- Disponer de un esquema propio para realizar observaciones y organizar las informaciones obtenidas en un diario de clase.
- Identificar y describir errores y dificultades que se producen en el aprendizaje de las matemáticas.
- Identificar y distinguir características de diferentes estilos de enseñanza de las matemáticas.
- Disponer de un esquema propio para estructurar la Memoria de Prácticas.

Tema 7.

Título: Análisis didáctico de clases de matemáticas.

Objetivos:
- Valorar las relaciones de comunicación en la clase de matemáticas para mantener y facilitar diálogos útiles e interactivos, proponer tareas y cuestiones que desarrollen el pensamiento

matemático de los alumnos y potenciar la expresión verbal de las ideas.
- Mejorar la capacidad para analizar las interferencias en el proceso de comunicación de conocimientos matemáticos y distinguir entre los significados atribuidos por el profesor y los elaborados individualmente por cada alumno, atendiendo a diferencias y niveles.
- Plantear la práctica docente en matemáticas como objeto de análisis y reflexión y observar e identificar los cometidos realizados por el profesor en una clase de matemáticas.
- Analizar críticamente la propia actuación docente.

Contenido:
- El lenguaje matemático en el aula. Símbolos y significados. Niveles de comunicación.
- Funciones de las relaciones de comunicación en el aula de matemáticas:

    * Atribuir significados a los conceptos a través de sus modelos y representaciones.
    * Descubrir y aclarar elementos claves en los procedimientos.
    * Presentar situaciones problemáticas y ejemplos de estrategias para su resolución.
    * Establecer reglas para la toma de decisiones.
    * Justificar creencias, argumentos y actuaciones.
    * Detectar errores y proponer remedios.

- Criterios para evaluar el aprendizaje producido en una clase de matemáticas en relación con la construcción de razonamientos, interpretación de relaciones, justificación mediante pruebas y argumentos, y redacción de demostraciones.
- Noción de eficacia docente. Características y actuación del profesor eficaz en la clase de matemáticas.

Bibliografía básica:
Aebli H. (1988); Anguera M.T. (1989); Fernández M. (1988); Ferris J. (1987); Fortuny J.M., Azcárate C. (1992); Lappan G. (1991); Pimm D. (1990).
Otros Materiales:

- Programaciones de matemáticas realizadas por profesores expertos.
- Grabaciones sobre desarrollo de clases de matemáticas de profesores expertos.
- Parrillas de observación.
- Programaciones de matemáticas realizadas por los alumnos de la Asignatura de Prácticas.
- Grabaciones sobre desarrollo de clases de matemáticas de los alumnos de la asignatura de Prácticas.

Actividades:

- Presentación de las programaciones realizadas por los alumnos de la asignatura de Prácticas para impartir clases de matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato. Comparación de las programaciones de un profesor experto y un profesor en formación relativas a un mismo tópico.
- Visionado de una selección de las distintas clases impartidas y grabadas.

- Discusión del desarrollo de las clases basada en las relaciones de comunicación y su potencialidad para transmitir y desarrollar conocimientos matemáticos.
- Valoración de las clases visionadas atendiendo a la diversidad de funciones puestas de manifiesto, a su coherencia con la programación previa y al logro de aprendizajes alcanzado.

Evaluación:

Al concluir este tema se valorará especialmente:

- La capacidad autocrítica de los alumnos de Prácticas para juzgar sus propias actuaciones y las diferencias con las actuaciones de los expertos.
- La capacidad para detectar las diferencias entre sus programaciones teóricas y sus realizaciones prácticas.
- La capacidad de los alumnos para proponer modificaciones concretas que mejoren, completen y profundicen sus actuaciones en el proceso de comunicación de conocimientos matemáticos.

Tema 8:

Título: Estilos de enseñanza de las Matemáticas. Incidencias en el aula de matemáticas.

Objetivos:
- Reconocer dimensiones relevantes que determinan diferentes estilos de enseñanza de las matemáticas.
- Reconocer y valorar diferencias individuales en intereses y conocimientos de los alumnos y adaptar el trabajo en el aula a tales diferencias.
- Reconocer y valorar diferencias individuales en los estilos de enseñanza de los profesores de matemáticas y adaptar el trabajo de Seminario a tales diferencias.
- Valorar el progreso individual de los alumnos, diagnosticar sus errores y prescribir trabajos de corrección o enriquecimiento en vista de los resultados.
- Conocer y utilizar técnicas de autoevaluación y corrección de los propios métodos de enseñanza.

Contenido:
- Dimensiones de la competencia didáctica del profesor de matemáticas:
- Contrastes en la enseñanza de las matemáticas:
    * Contraste epistemológico.
    * Contraste metodológico.
    * Contraste cognitivo.
    * Otros contrastes.
- Integración de diferentes estilos mediante el trabajo en el Seminario de Matemáticas.
- Diferencias individuales en el aprendizaje de las matemáticas. Pensamiento convergente y pensamiento divergente. Capacidad matemática. Pensamiento visual.
- Diferencias sociológicas en el aprendizaje de las matemáticas. Diferencias relacionadas con el

sexo.
- La integración de diferencias individuales mediante el trabajo en grupo; relaciones de comunicación en el aula.
- Valoración de las producciones de los alumnos.

Bibliografía básica:

Aebli H. (1988); Bishop A., Mellin-Olsen S., Dormolen J. (1991); Gómez B. (1991); Lappan G. (1991); Marcelo C. (1991); Orton A. (1990); Pimm D. (1990).

Otros Materiales:
- Diario de observación de los alumnos de la asignatura de Prácticas.
- Memoria de Prácticas de los alumnos de la asignatura.
- Cuadernos de trabajo realizados por alumnos de Secundaria o Bachillerato.
- Pruebas de evaluación y ejercicios realizados por alumnos de Secundaria o Bachillerato.
- Grabaciones sobre desarrollo de clases de matemáticas de los alumnos de la asignatura de Prácticas.

Actividades:
- Basándose en las grabaciones y diarios de observaciones, los profesores en formación presentarán en clase ejemplos de situaciones didácticas relevantes, junto con la interpretación de las mismas. Las situaciones didácticas presentadas servirán de base para discutir su interés y significado, así como para interpretar el estilo didáctico seguido y valorar su desarrollo.
- Basándose en los cuadernos de trabajo, pruebas de evaluación y ejercicios realizados por los alumnos de Secundaria o Bachillerato, los profesores en formación presentarán en clase ejemplos de dificultades y errores matemáticos, valorarán los ejemplos presentados por los compañeros y discutirán los métodos más adecuados para superar los errores detectados.
- Basándose en la experiencia obtenida durante la realización de las Prácticas los profesores en formación explicitarán y objetivarán las diferencias individuales y sociológicas observadas en el aprendizaje de las matemáticas por parte de sus alumnos.

Evaluación:
Al concluir este tema, resultado de un análisis de la fase Práctica realizada, el profesor en formación debe estar capacitado para:

- Enumerar las principales diferencias entre los alumnos de Secundaria y Bachillerato en relación con el aprendizaje de las matemáticas y proponer métodos y técnicas específicos de trabajo en el aula que anulen los efectos negativos de tales diferencias.
- Enumerar las principales diferencias entre los estilos de enseñanza observados en los Profesores de Matemáticas en ejercicio y proponer métodos y técnicas de trabajo en el Seminario que anulen los efectos negativos de tales diferencias.

Tema 9.

Título: Prácticas de Diseño de Unidades Didácticas.

Objetivos:

- Proporcionar al profesor en formación criterios que le permitan decidir, construir o analizar críticamente una secuenciación de contenidos de matemáticas.
- Proporcionar al profesor en formación recursos e información adecuada que le permitan regular su grado de intervención pedagógica y control en la planificación de las actividades de las unidades didácticas.
- Utilizar las rutinas de gestión y los heurísticos instructivos para el diseño de unidades didácticas.

Contenido:

- Elementos en la programación de unidades didácticas: objetivos, contenidos, actividades, metodología y evaluación.
- Factores para valorar una secuencia de contenidos: adecuación, gradación, coherencia y sentido.
- Rutinas de gestión en el diseño de unidades didácticas: guiones estructurados de las lecciones; diagramas de flujo para el desarrollo de clases o segmentos de contenidos previsión de dificultades; planificación de itinerarios alternativos para superar dificultades, medios de control y planes de reducccción de las dificultades previstas.
- Heurísticos para la toma de decisiones: estrategias para la resolución de problemas matemáticos; recursos para reducir la complejidad de los problemas de decisión y actuación en las clases de matemáticas.
- Organización temporal. Organización de los comportamientos.

Bibliografía básica:

Elliot J. (1990); Fernández M. (1988); Fortuny J.M., Azcárate C. (1992); Lappan G. (1991); Rico L. (1990); Romberg T. (1991); Tourneur Y. (1972); Suydam M. (1986).

Otros Materiales:
- Diseños de unidades didácticas elaboradas por el Ministerio de Educación y Ciencia o por las Consejerías de Educación de las Comunidades Autónomas.
- Documentos curriculares de carácter administrativo o legal.
- Libros de texto de Educación Secundaria, Bachillerato o Formación Profesional.

Actividades:
- Revisar la planificación de unidades didácticas realizada con anterioridad a la fase de prácticas, confrontando el diseño teórico con su ejecución y viabilidad en el aula.
- Realizar la planificación de unidades didácticas incorporando a los elementos formales de una programación la previsión de organización, rutinas de gestión y heurísticos para toma de decisiones, derivados de la dimensión práctica efectiva que debe contemplarse.

- Presentación y discusión de las planificaciones elaboradas, destacando criterios de valoración práctica junto con los usuales de valoración formal.

Evaluación:
Al finalizar este tema se valorará la capacidad de los profesores en formación en relación con:

- La coherencia de las programaciones referidas al curso correspondiente.
- El caracter práctico de las programaciones diseñadas.
- El nivel de profundización en los distintos componentes curriculares y en las relaciones que se destacan entre ellos.
- La consideración de los errores usuales, niveles de dificultad y establecimiento de técnicas de detección y corrección.

Tema 10.

Título: Evaluación de un Programa escolar de Matemáticas.

Objetivos:
- Disponer de modelos para elaborar un Proyecto Curricular de Centro y para su concreción en el Area de Matemáticas.
- Disponer de una metodología para la evaluación de programas educativos y, en particular, Proyectos Curriculares de Centro.
- Conocer criterios para evaluar diseños curriculares en el Area de Matemáticas.
- Apreciar las ventajas de la evaluación de un Proyecto Curricular de Centro para el Area de Matemáticas.

Contenido:
- Principales modelos para la elaboración de un Programa y de un Proyecto Curricular de Centro.
- Aspectos metodológicos en la evaluación de programas educativos.
- Indicadores y pautas para la evaluación de un programa de educación matemática.
- Recursos curriculares, docentes y escolares.
- Evaluación externa versus autoevaluación.
- Equipos de evaluación; redacción de informes; elaboración de recomendaciones.

Bibliografía básica:
Antúnez S, del Carmen L., Imbernón F., Parcerisa A., Zabalza A. (1992); Calvo J. (1991); Darder P., López J.A. (1985); Lappan G. (1991); Mathematical Association (1988); N.C.T.M. (1987); Romberg T. (1991); Rosales C. (1990); Stufflebeam D., Shinkfield A. (1987); Santos M.A. (1990); Sanz R. (1990).

Otros Materiales:
- Instrumentos estructurados de evaluación:
    * NCTM (1987)

* QUAFE-80
- Proyectos Curriculares de Centro.
- Programas desarrollados por distintos autores de libros de texto y material didáctico.

Actividades:

- Revisión de los principales modelos para la elaboración de un Programa y discusión de ejemplos de Programas redactados según modelos diferentes.
- Revisión de los enfoques teóricos sobre evaluación y su concreción en la evaluación educativa.
- Discusión de la metodología más adecuada para la evaluación de programas educativos.
- Presentación y discusión de distintas pautas para la evaluación de un Proyecto Curricular de Centro y un Programa escolar en el Area de Matemáticas.
- Aplicación de las pautas a Proyectos y Programas de los Centros en los que se han realizado las prácticas.
- Revisión y reelaboración de las pautas para la evaluación de Proyectos Curriculares y Programas.
- Evaluación externa y autoevaluación de Programas elaborados por los alumnos de la Asignatura de prácticas.

Evaluación:

Al concluir este tema el Profesor en formación deberá:

- Disponer de una metodología y unas pautas para evaluar Proyectos Curriculares y Programas de Matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato.
- Realizar la evaluación de un Proyecto Curricular de Centro elaborado por un Seminario de Matemáticas, de un Programa de Matemáticas elaborado por un compañero y autoevaluar el propio Programa.