SIGNIFICADOS ASOCIADOS AL PUNTO DE INFLEXIÓN

Alberto Camacho Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II México
camachoalberto@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología, Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Se dice comúnmente que el punto en el que una curva continua separa la parte cóncava de la convexa, se llama "punto de inflexión". El punto de vista es llevado más allá a través del teorema en el que se establecen condiciones suficientes para que el punto crítico,* $f''(a)=0$*, de la segunda derivada, efectivamente lo sea: "Si* $f''(a)=0$ *o* $f''(a)$ *no existe, y la derivada* $f''(x)$ *cambia de signo al pasar por el valor x=a, entonces, el punto de la curva en x=a es un punto de inflexión". No obstante, en el análisis de los valores extremos para la graficación de funciones el argumento mencionado es poco usado. Visto así, el objetivo del presente trabajo es dotar al concepto de significados que permitan un acercamiento, en principio algorítmico, a la definición formal que se presenta inicialmente, haciendo uso del recurso de la 3ª derivada.*

Palabras clave: significado, punto de inflexión

Introducción

En los cursos de cálculo diferencial, a los estudiantes les es suficiente con determinar, las más de las veces, los valores críticos de la segunda derivada, $f''(a)=0$, para así considerarles puntos de inflexión de la curva, pasando por alto el teorema arriba citado. Esta afectación es del todo algorítmica, sin interesarse tanto por la comprensión del argumento y su demostración. El problema se centra en evitar una regla que da suficiencia teórica a la existencia del punto de inflexión, pero que además resulta poco útil en el proceso de graficación de funciones, haciendo uso del criterio de las dos primeras derivadas. Asumiremos enseguida un criterio que sintetiza la proposición anterior y que permite un uso más eficiente del mismo. Para este efecto, hicimos un análisis de textos de cálculo antiguos que permitieron identificar un argumento asociado al punto de inflexión a partir de la utilidad de la tercera derivada en el proceso algorítmico de la graficación, por hoy en desuso en la enseñanza. Con dicho argumento el propósito fue el de "reconstruir el conocimiento matemático", debido a que su inserción en el discurso afecta a este último cambiando su organización interna.

Marco teórico

Se ha considerado útil involucrar nuevos significados a los ya existentes en el discurso de enseñanza matemática, a partir de integrar "bases de significados", semejantes al siguiente emplazamiento: $E_0 \to E_1 \to E_2 \to ... \to E_k \to ... \to E_n$. En este último: $E_1, E_2, ..., E_n$ simulan los conocimientos que aparecen cotidianos en el discurso matemático escolar (DME), en el cual E_n es el conocimiento final, también llamado por los eruditos "conocimiento de referencia", que se desea los estudiantes aprendan, y E_k el nuevo conocimiento. Las bases originan un primer paso en la cuestión de la coherencia del nuevo significado E_k, respecto del resto de los conocimientos colocados en la cadena. En ese caso, E_k es "potencialmente" útil para el entendimiento del "conocimiento de referencia" E_n, y da mayor significado a $E_1, E_2, ...,$etc., es decir, para el caso, a los significados asociados al punto de inflexión, lo cual habla del compromiso de incorporarle en la base de significados. La determinación de E_k es posible desde diferentes opciones de investigación, una de ellas, el análisis epistemológico que se plantea enseguida.

Análisis epistemológico

Desde finales del siglo XVIII, y a lo largo del XIX, se privilegió en la enseñanza matemática, para la determinación de los valores extremos de una función, dos proposiciones complementarias que tienen que ver con las derivadas sucesivas de la función que se trate. Ambos argumentos fueron ampliamente estudiados en el *Traité élementaire* de Lacroix y en la *Théorié des fonctions analytiques* de Lagrange, encontrándose coyunturas de dichas reglas, todavía, en textos que se usaron a lo largo del siglo XX (Granville, Smith, Longley, 1963, 220; Santaló & Carbonell, 1980, 183-184). Cabe destacar que a mediados del siglo XIX ambas proposiciones se encontraban en una escala de utilidad en la enseñanza. Planteamos enseguida ambas proposiciones en la forma concisa como les escribieron y utilizaron en sus respectivos textos y cursos de cálculo en la escuela politécnica francesa, los profesores Reygnaud-Hadamard, así como el propio Granville. La primera de estas se refiere a la regla para la determinación de máximos y mínimos, reza así: "Para encontrar los máximos y mínimos de una función $f(x)$, iguálese su derivada con cero, los valores de *x* que convienen son aquellos que hacen nulas un número impar cualquiera de derivadas sucesivas. Habrá un máximo si la primera derivada que no se anula deviene negativa al ser sustituida; habrá un mínimo si ella deviene positiva" (Reygnaud-Hadamard, 1823, 32). Otra regla que se deduce de la anterior, es la siguiente: "Si de las derivadas de $f(x)$ la primera que no se anula para $x = a$ es de *orden impar*, entonces $f(a)$ no será ni máximo ni mínimo". (Granville, 1963, 221). En ningún caso aparecen demostraciones. Podemos escribir la contraparte de la primera regla como un "criterio" más, de la siguiente manera: "Si $f''(a) = 0$, $x=a$ es un punto crítico de la segunda derivada, este será punto de inflexión si al sustituirlo en la última derivada impar, que no sea nula, el resultado es distinto de cero: $f'''(a) \neq 0$ o $f^{v}(a) \neq 0$ o, etc."

Con este criterio es suficiente que la tercera derivada no sea nula para la determinación del punto de inflexión, esto intentaremos demostrar más adelante. En el texto de cálculo de Santaló & Carbonell (1980), se hizo un amplio uso de este recurso, sin demostración alguna.

Reconstrucción del conocimiento matemático

El siguiente es un intento de modelo didáctico del punto de inflexión basado en argumentos algebraicos y variacionales que amplían sus significados ya conocidos. Se prevé que en el modelo se interactué con los argumentos asociados al punto de inflexión, como son aquellos de concavidad, curvatura, segunda derivada etc. En cuanto a la utilidad de los significados vistos como objetos matemáticos, hemos recurrido a aquellos de función, derivada, derivadas sucesivas, teorema del valor medio, serie de Taylor, etc. Otros significados asociados útiles fueron el uso de representaciones gráficas. No obstante, pretendemos que la incorporación del criterio de la tercera derivada sea visto a partir de su utilidad en la graficación de funciones, y no tanto por las demostraciones que realizamos para dar sentido al modelo, lo cual es fundamental desde el punto de vista teórico.

Pocos autores de textos de cálculo llaman "punto de torcedura" a los valores críticos de la función *f* donde esta cambia de curvatura, es decir la curva se "tuerce" dando un giro de 180º al pasar por el punto crítico para salir de este con la concavidad invertida. Para la función *f* la "concavidad" significa que ella tiene un "hueco".

En el caso de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, esta cuenta con un punto de torcedura en *x*=2 que no consigna la información de la primera derivada al ser igualada con cero. Por lo general, estos valores son llamados "puntos de inflexión" y aparecen al igualar a cero la segunda derivada. Para el ejemplo citado, $f''(x) = 6x - 12$, o bien $6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$, resulta cierta la afirmación para $f'' = 0$, véase la figura 1. Si bien el criterio de $f'' = 0$ es "necesario", este no es "suficiente" para cualquier función, puesto que existen casos donde ello no se cumple, lo cual es aclarado eficientemente en los textos de cálculo. Por ejemplo, en $f(x) = x^4 - x$, la primera derivada $f'(x) = 4x^3 - 1$, consigna un mínimo en $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0.62$, de manera que la segunda derivada igualada con cero $f''(x) = 12x^2 = 0$, precisaría que en *x*=0 hubiera un punto de inflexión, lo cual no ocurre, véase la figura 2.

No obstante, la concavidad es asociada a la segunda derivada de *f*, recordemos los criterios expuestos en los textos de cálculo para la verificación de puntos críticos, estos dejan ver que si en *x*=*a* se tiene un máximo, entonces $f''(x) < 0$, lo cual debe ser relacionada a la concavidad "hacia abajo" de la curva, en el caso del mínimo la concavidad 757 de la curva es “hacia arriba”, con $f''(x) > 0$. En este sentido, los puntos de inflexión son “límites” de las concavidades de la curva. Si observamos el caso de la figura 1, la concavidad hacia abajo de *f* se encuentra en los límites de menos infinito a 2, cambiando a ser cóncava hacia arriba entre 2 e infinito. Ello significa que el punto de inflexión se encuentra entre los cambios de concavidad de la curva, quedando, en otras palabras, entre $f'' < 0$ y $f'' > 0$, en el caso de cambiar de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y viceversa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, entre $f'' > 0$ y $f'' < 0$. De ello resulta que la recta tangente en el punto de inflexión cruza la curva de “arriba” hacia “abajo” o viceversa, véase más adelante la figura 3.

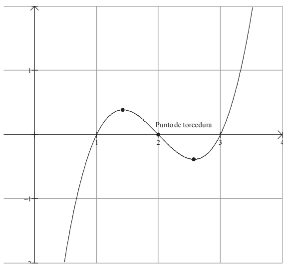

Figura 1

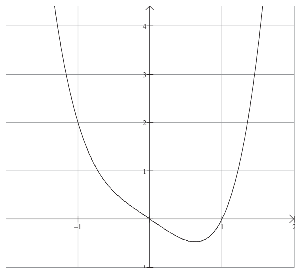

Figura 2

Lo anterior nos permitirá establecer la siguiente proposición: “Si f'' es menor que cero en (a,b), entonces *f* es cóncava hacia abajo en ese intervalo. En caso de que f'' sea mayor que cero en (a,b), entonces *f* será cóncava hacia arriba en el intervalo.” Puesto que suponemos que la función *f* se encuentra por encima de la recta secante *y*, entre *x=a* y *x=b*, esta última se encuentra por debajo de $f(x)$. Para demostrar la proposición anterior, construyamos una función auxiliar $F(x) = y - f(x)$, cumpliéndose que $f(x) > y$. Luego se pretende demostrar que: $y - f(x) < 0$.

Demostración: Siendo la ecuación de la recta secante: $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{x - a}(x - a)$, al hacer la diferencia entre $f(x)$ e *y,* se tiene la relación: $y - f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$...(1)

Aplicando dos veces el teorema del valor medio como: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, queda:

$$y - f(x) = \underbrace{-(f(x) - f(a))}_{-f'(e)(x-a)} + \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{f'(c)}(x - a)$$

Suponiendo *c* entre *a* y *x,* así como *e* entre *c* y *x,* se guarda la relación:

$0 < a < c < e < x < b$ ...(2)

De aquí que: $y - f(x) = -f'(e)(x - a) + f'(c)(x - a) = [f'(c) - f'(e)](x - a)$

Aplicando de nuevo el teorema del valor medio a esta última expresión, queda:

$y - f(x) = f''(d)(c - e)(x - a)$...(2)

Deseamos probar que: $y - f(x) < 0$. Ello también ocurrirá si: $f''(d)(c - a)(x - a) < 0$ ...(3)

Para probar la desigualdad (3) hagamos uso de las propiedades de las desigualdades. El resultado de la desigualdad debe ser de signo – o < 0, de hecho tenemos dos opciones, estas son:

A): Para el caso en que $x > a$: $x - a > 0$, con $e - c > 0$, y puesto que $f''(d) < 0$, queda el esquema $> \cdot > \cdot < \, = \, <$. De aquí que $y - f(x) < 0$.

B): Para cuando $x < a$, $x - a < 0$, con $c - e < 0$, para $f''(d) < 0$, es decir, $< \cdot < \cdot < = <$. Luego $y - f(x) < 0$.

A) y B) muestran que la curva está situada por encima de la recta secante *y*, cualesquiera que sean *c, d, e* y *x* en (a, b), lo cual significa que la curva es cóncava hacia abajo. La concavidad hacia arriba se demuestra de manera semejante.

A partir de los argumentos vistos anteriormente, podemos establecer la conocida "condición suficiente" para la existencia de un punto de inflexión, como:

"Si $f''(a)=0$ o $f''(a)$ no existe, y la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el valor *x=a,* entonces, el punto de la curva en *x=a* es un punto de inflexión".

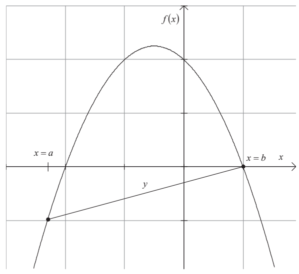

Figura 3

En los textos, la demostración se realiza comúnmente por "reducción al absurdo", de la siguiente manera:

"Siendo $f''<0$ para *x<a*, y $f''>0$ para *x>a*. Entonces en *x<a* la curva es cóncava hacia abajo, y para *x>a* cóncava hacia arriba. Por tanto en *x=a, f* tiene un punto de inflexión, siendo en este punto $f''(a)=0$".

Finalmente, asumiremos el criterio mencionado en el resumen el cual sintetiza la proposición anterior, éste nos permitirá un uso práctico de la misma, o sea: "Si $f''(a)=0$, *x=a* es un punto crítico de la segunda derivada, este será punto de inflexión si al sustituirlo en la última derivada impar, que no sea nula, el resultado es distinto de cero: $f'''(a)\neq 0$ o $f^{v}(a)\neq 0$ o, etc." El criterio es válido para funciones continuas en $f''(a)$, y acciona de inmediato en expresiones en las que el grado impar es "aislado" como por ejemplo $y=x^7-1$, $y=8x^9+10$. No obstante, para polinomios que involucran diversos grados y otro tipo de funciones trascendentes, es suficiente mostrar que la tercera derivada no se anula al sustituir el valor crítico, candidato a punto de inflexión, para que este último efectivamente lo sea. La demostración aparece más adelante. Antes veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Verifique la existencia de punto de inflexión en la curva $y=x^5$.

Solución: Las derivadas sucesivas hasta la última derivada impar no nula, son:

$y' = 7x^6$, $y'' = 42x^5$, $y''' = 210x^4$, $y^{iv} = 840x^3$, $y^{v} = 2520x^2$, $y^{vi} = 5040x$, $y^{vii} = 5040$, $y^{viii} = 0$, etc.

Al igualar con cero la segunda derivada obtenemos el punto crítico $42x^5 = 0 \rightarrow x = 0$. Sustituyendo este valor en la última derivada impar no nula, es decir $y^{vii}(0) = 5040 \neq 0$, ello asegura que en $x = 0$ la función tenga un punto de inflexión. Si se desea, esto último puede revisarse dando valores antes y después de *x*=0 a la segunda derivada, para observar que efectivamente haya cambio de signo, más ello es precisamente lo que se desea evitar con el uso de la tercera derivada. Por ejemplo $y''(-0.1) = -0.00042$ y $y''(0.1) = 0.00042$.

Ejemplo 2 Verifique si la función $y = x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 11x + 6$, cuenta con puntos de inflexión.

Solución: Siendo las primeras tres derivadas de la función:

$y' = 5x^4 - 24x^3 + 60x^2 - 11$, $y'' = 20x^3 - 72x^2 + 60x$, $y''' = 60x^2 - 142x + 60$

Igualando con cero la segunda derivada, obtenemos: $x(20x^2 - 72x + 60) = 0 \rightarrow x = 0,\ 20x^2 - 72x + 60 = 0$

Usando la fórmula general en la segunda expresión, quedan los valores críticos:

$x = 0$, $x = 1.32$, $x = 2.27$

Sustituyendo en la tercera derivada cada uno de estos, queda:

$y'''(0) = 60 \neq 0$, $y'''(1.32) = -22.896 \neq 0$, $y'''(2.27) = 46.83 \neq 0$

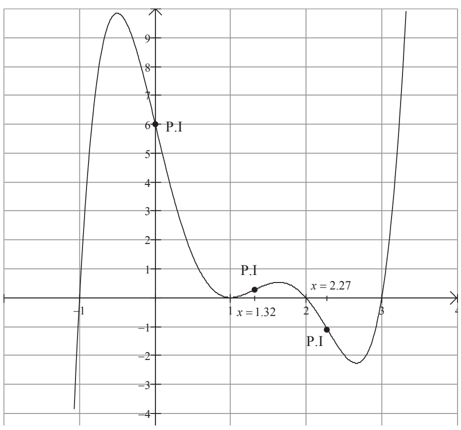

Figura 4

En los tres casos la evaluación en la tercera derivada resulta distinta de cero. Ello nos da para concluir que: $x=0$, $x=1.32$, $x=2.27$,

son puntos de inflexión de la función, lo cual hace innecesaria su verificación antes y después de los mismos. La gráfica correspondiente aparece en la figura 4.

En la hipótesis de $f''(x)=0$, la demostración de la proposición es la siguiente:

Demostración: Hagamos uso de la serie de Taylor hasta la tercera derivada, como:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h\ +f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}\text{ ...(1)}$$

En (1) consideremos $b=x+h$ y $a=x$. No obstante que: $0<a<x<b$, con $b-a>0$ ....(2)

De modo que (1) quede como: $f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^3}{3!}$

Enseguida hagamos: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)+f''(a)\frac{(b-a)}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$

Aplicando a esta última expresión el teorema del valor medio, resulta que:

$$f'(c)=f'(a)+f''(a)\frac{(b-a)}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$$

Para *c* entre *a* y *b*. Además: $f'(c)-f'(a)=f''(a)\frac{(b-a)}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$

Aplicando de nuevo, en el miembro izquierdo, el teorema del valor medio, resulta:

$$f''(d)(c-a)=f''(a)\frac{(b-a)}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$$

Para *d* entre *c* y *a*, con: $c-a>0$...(3)

Puesto que de (2) y (3): $b-a>0$, $c-a>0$ y por hipótesis partimos de que $f''(a)=0$,

queda: $f''(d)(c-a)=f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$ ...(4)

De 4) se desprende que $f''(d) > 0$ o $f''(d) < 0$, y puesto que $c - a > 0$ además de que $b - a > 0$, resulta que el miembro izquierdo de (4) es diferente de cero, consecuentemente para el miembro derecho: $f'''(a) \neq 0$, lo cual se deseaba demostrar. No obstante, el criterio es restringido a funciones cuyas derivadas impares no se anulen más allá de la tercera derivada, en caso contrario es necesario, como se ejemplificó, usar la proposición tal y como se plantea.

Conclusiones

En la base de significados planteada anteriormente: $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \ldots \rightarrow E_k \rightarrow \ldots \rightarrow E_n$, nos esforzamos por conservar aquello que Chevallard (2004) ha llamado, un "principio de simetría" entre los significados ya conocidos: $E_1, E_2, \ldots, E_n$, y el nuevo conocimiento involucrado, E_k. La simetría entre los significados contiguos a E_k, en este caso representado por el criterio de la tercera derivada, como aquel de concavidad, se preserva por la coherencia y unificación que adquiere el propio discurso que hemos esbozado. En su conjunto, los elementos $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots, E_n$, que integran la base, establecen un discurso que se consolida en reconstrucción del conocimiento matemático, mismo que sirve de fundamento para el diseño de situaciones didácticas, consecuentes para el salón de clase.

En pocas palabras, hemos utilizado por varios años, en la práctica de la enseñanza del punto de inflexión, esta forma expuesta del discurso, unificando así el criterio de la "tercera derivada" con los propios argumentos que se conocen de este saber.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y (2004) La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. 3e Université d'été Animath, Saint-Flour, 22-27. IUFM d'Aix-Marseille & UMR ADEF.

Granville, W., Smith, P., Longley, W (1963). Elements of the differential calculus and integral calculus. U. S. A.: Ginn and Company, Boston

Reygnaud-Hadamard (1823). *Probléms et dèveloppmens (sur diverses parties des mathématiques)*. Paris : Bachelier.

Santaló, L., Carbonell, C.(1980). *Cálculo diferencial e integral.* México: Porrua, 11ª. Edición