## LO PERIÓDICO EN LA RELACIÓN DE UNA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS

Gabriela Buendía Abalos
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología de Avanzada – IPN México
buendiag@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

**Resumen.** *Presentamos un análisis de la relación f-f ' para el caso de las funciones periódicas. Debido al privilegio de argumentos analíticos esta relación resulta poco significativa en el discurso matemático escolar y en ella pueden encontrarse problemáticas tanto de la relación entre una función y sus derivadas, como del aspecto periódico de las funciones. Queremos dar evidencia de que esta relación puede resignificarse en un marco de prácticas sociales apoyándonos en resultados de corte socioepistemológico relacionados tanto con f-f 'como con lo periódico.*

**Palabras clave**: derivada, periódico, prácticas sociales

### Introducción

En el discurso matemático la relación entre una función y sus derivadas resulta ser poco significativa por el privilegio de los aspectos analíticos que usualmente se presenta. Al respecto, diversas investigaciones (Aguilar, 1999; Hernández, 2004) han dado evidencia de propiedades que presenta $f$ que parecen heredarse directamente a $f'$ . Por ejemplo, si a una función se le suma una constante, esta constante permanece en su derivada y, entonces, si una gráfica tiene un desplazamiento vertical sobre el eje $y$, la gráfica de su derivada también se desplaza también verticalmente.

Esta "herencia" de características entre $f$ y $f'$, la cual no concuerda con que una informa de la otra respecto a su comportamiento variacional, ocurre también en la propiedad periódica de una función. En el marco de la investigación que llevamos a cabo sobre la socioepistemología de lo periódico (Buendía, 2004; Buendía, 2007) hemos preguntado a profesores de nivel medio y medio superior sobre la validez de la proposición *$f$ es periódica $\Leftrightarrow f'$ es periódica* (Ordoñez, 2007) (figura 1). La respuesta común es afirmativa ya que se hace referencia a la función seno o coseno cuyas derivadas, efectivamente, son periódicas. Consideramos que el marco de referencia que se tiene al abordar esta pregunta es limitado tanto en el aspecto periódico de la función como en el de la propia derivada.

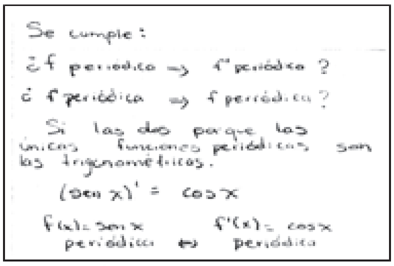

Se cumple:
¿f periódica ⇒ f' periódica ?
¿ f' periódica ⇒ f periódica ?
Si las dos porque las únicas funciones periódicas son las trigonométricas.
(sen x)' = cos x
f(x) = sen x periódica ⇔ f'(x) = cos x periódica

Fig 1. *f es periódica* ⇔ *f' es periódica*

Por parte de lo periódico, una respuesta afirmativa induce a pensar que la periodicidad no está siendo usada como una propiedad que califica a un cierto comportamiento, sino que se limita a calificar a una determinada función: la función trigonométrica (seno, especialmente). Y por parte de la derivada, nos encontramos con el privilegio de argumentos analíticos ("la derivada del seno es el coseno") sin que la relación *f -f '* pueda analizarse cualitativamente de tal manera que una informe acerca de la otra aunque no necesariamente mantenga sus mismas cualidades (en este caso, la periodicidad). Estos dos aspectos (lo periódico y la relación $f - f'$) han sido abordados ampliamente en Matemática Educativa.

## La relación *f -f '* y lo periódico

En la línea de investigación sobre pensamiento y lenguaje variacional (González ,1999; Dolores et al., 2002) se ha señalado que es factible construir una relación significativa entre una función y sus derivadas cuando se favorece un tránsito entre las variaciones sucesivas, es decir cuando se puede establecer un uso simultáneo entre la función y sus derivadas de tal manera que se pueda reconocer en todas ellas la forma de estudiar los cambios sucesivos. Es necesario romper pues la idea de iteración.

Con el mismo objetivo de dar significados a la relación entre una función y sus derivadas, la investigación se ha valido también del uso de gráficas en el cual éstas representan una forma de argumentación que favorece la construcción del conocimiento matemático. Una situación de transformación (Cordero, 2001) da cuenta de que la función $y = f(x)$ en la relación entre la derivada y primitiva puede ser concebida como una instrucción que organiza comportamientos entre ellas. Ya que la función no se percibe como un proceso previo a la gráfica, la gráfica de $f$ permite organizar los comportamientos de la gráfica de $f'$ y viceversa. Para ello se tiene que transitar significativamente por los registros gráfico, algebraico, e incluso el tabular.

Por otra parte, la investigación sobre lo periódico ha dado cuenta de que existe una irreflexiva asociación entre función trigonométrica y periodicidad (Buendía, 2004). Por ejemplo, es común que la gráfica de una función $f(x) = kx + \text{sen } x$ sea calificada como periódica. Una razón que se ha encontrado para ello es que cualquier función que cuya forma sea senoidal adquiere como por herencia la propiedad periódica de la función analítica $f(x) = \text{sen } x$. Otros argumentos que se han presentado para calificarla como periódica hacen uso de la gráfica: *sí es periódica porque es factible encontrar un patrón de repetición en el eje x*.

De acuerdo a la estructura matemática, esto podría ser un cuasiperiodo[12]. Pero esto puede resultar una razón suficiente, entre algunos alumnos y profesores de matemáticas, para que sea periódica ya que al seguir el patrón de la parte lineal, la gráfica “sube siempre igual”.

Es factible, a partir de la gráfica de dicha función hacer un bosquejo de su derivada. Cada uno de los máximos o mínimos locales representarán ceros en $f'$. Ya que la gráfica de $f$

[12] Aun cuando el movimiento no es verdaderamente periódico, podemos definir un cuasiperiodo $T_d = 2\pi / \mu$ como el tiempo entre los máximos sucesivos del desplazamiento (Boyce, DiPrima, 1987)

mantiene la misma forma en cada intervalo del eje *x*, entonces el comportamiento de las tangentes en realidad es el mismo en cada intervalo. Así, la gráfica de la derivada sí resulta periódica.

Este análisis cualitativo de las gráficas de $f - f'$ en el que el comportamiento de cada gráfica informa, finalmente, de la relación que guardan entre ellas, parece indicar que, para el caso de estas gráficas, si *f* fue calificada como periódica el argumento que se usa tiene que ver con cómo está variando: cada intervalo en el eje *x* presenta el mismo comportamiento en el eje *y.*

Veamos ahora el aspecto analítico de una función con un comportamiento similar. La función $f(x) = x + \text{sen } x$ suele ser catalogada como periódica porque la expresión analítica contiene a la función seno. En realidad no lo es ya que el factor lineal provoca que se pierda dicha propiedad [13]:

$$\boxed{\text{Si } p = 2\pi \text{, entonces } f(x+p) = \mathbf{x + 2\pi} + \text{sen }(x+2\pi) \neq \mathbf{x} + \text{sen }(x) = f(x)}$$

En cambio, su derivada $f'(x) = 1 + \cos x$, sí lo es:

$$\boxed{\text{Si } p = 2\pi \text{, entonces } f'(x+p) = 1 + \cos(x+2\pi) = 1 + \cos(x) = f(x)}$$

Veamos ahora las gráficas (figura 2), de manera simultánea, de dicha función y de su derivada:



[13] Una función es periódica si existe *p* en el dominio de *f* tal que $f(x+p) = f(x)$

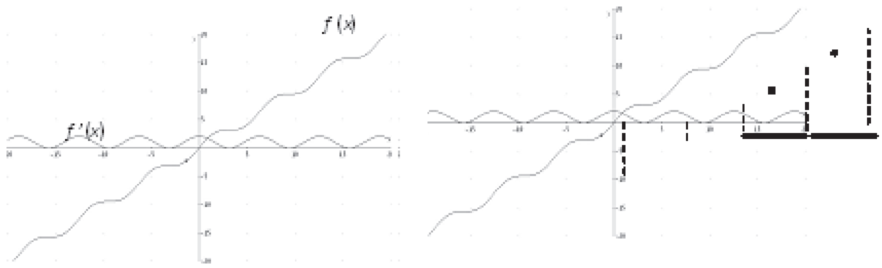



Fig. 2 La función y su derivada

Podemos construir diversos argumentos a partir de la gráfica de estas dos funciones. Por ejemplo, el punto de inflexión de *f*(*x*) (en línea punteada) señala los ceros de la función derivada y éstos siguen un patrón repetitivo en el eje *x* lo cual es una parte de la propiedad periódica. Dentro de esos intervalos, existe otro punto de inflexión (indicado con un pequeño círculo) que corresponde a un máximo de la derivada (o, digamos que en este punto la curva presenta una inclinación tal que la pendiente de la tangente es máxima). Ese valor es el mismo en cada uno de los intervalos, independientemente del valor ascendente que va tomando la abscisa. Pareciera, nuevamente, que si *f*(*x*) es señalada como periódica, en realidad se está haciendo referencia a su derivada.

Estamos, pues, tratando con ciertas funciones que no son periódicas pero que sus derivadas sí lo son. Si esta situación es analizada en contextos de movimiento, por ejemplo, señalan la existencia de movimientos que no son periódicos pero cuya velocidad –y aceleración- sí lo son. En el curso de la investigación (Buendía, 2004) hemos preguntado a estudiantes y profesores de matemáticas cómo tendría que moverse un objeto a fin de obtener la gráfica tiempo distancia indicada en la figura 2b. Algunas descripciones son las siguientes:

> *"El cuerpo avanza y retrocede un poco menos de lo que avanza, este movimiento lo va repitiendo* ***en forma constante****"*
>
> *"Es un cuerpo que se encuentra en un punto A, de aquí recorre una distancia pasando por B hasta llegar al punto C, regresa al punto B, desde B se dirige pasando por C hasta llegar a un punto D, regresa al punto C,…etc. esto* ***con una velocidad casi constante****"*
>
> *"El cuerpo avanza y retrocede un poco menos de lo que avanza, este movimiento* ***lo va repitiendo en forma constante****"*

Consideramos que los argumentos anteriores están siempre haciendo referencia a la velocidad (derivada) del movimiento o bien a variación periódica (de ahí que le llaman "constante") del movimiento.

La conclusión que podemos extraer hasta aquí es que una relación significativa entre *f-f '* cuando alguna de ellas sea periódica, surge en un contexto de variación en el que se rompe la idea analítica de iteración. Estos significados parecen obtenerse tanto de formas analíticas como gráficas y físicas (movimiento) tomando en cuenta que en cada caso hay un cierto tipo de argumentación construida.

## La relación *f-f '* en la socioepistemología de lo periódico

La socioepistemología realiza una investigación epistemológica donde ésta es entendida como la búsqueda de circunstancias que dan origen al conocimiento matemático. Da cuenta de las prácticas sociales como una base de significación para este saber; propone, pues, epistemologías de prácticas.

En este marco, la sociopistemología de lo periódico da cuenta de que el reconocimiento significativo de esta propiedad vive al seno de la práctica de predicción. Esto es, al predecir es posible distinguir significativamente entre el "se repite" y el "cómo se repite" lo cual es necesario para el reconocimiento de la naturaleza misma de la propiedad y no del objeto al cual se aplica.

A fin de analizar la relación entre una función y sus derivadas al tratar con funciones periódicas, se realizó una investigación sobre el uso de lo periódico en diferentes situaciones (Ordoñez, 2007). Presentamos dos ejemplos en los que subyace la predicción como práctica que favorecen la generación de conocimiento.

**Situación 1**. Al estudiar el problema de los tres cuerpos[14], Poincaré (citado en Aluja, 2005) establece que "…*en un determinado momento, un sistema se halla en un estado concreto y en un momento posterior vuelve, de nuevo, al mismo estado. Todas las posiciones y velocidades son las mismas después que antes. Así, debe repetirse, una y otra vez, el movimiento que le ha conducido desde un estado de nuevo a sí mismo: el movimiento es periódico.*"

Esto es, Poincaré al describir un movimiento periódico no sólo hace referencia a que que es un movimiento que "se repite" sino que pone énfasis en "el dónde pasa, y el cómo pasa". Lo anterior le permite encontrar soluciones periódicas para las ecuaciones diferenciales que describen el problema. Consideramos que una práctica de predicción está favoreciendo el desarrollo de saber matemático en esta situación ya que, dada una cierta información, Poicaré se ocupa de describir (matemática) lo que pasará después.

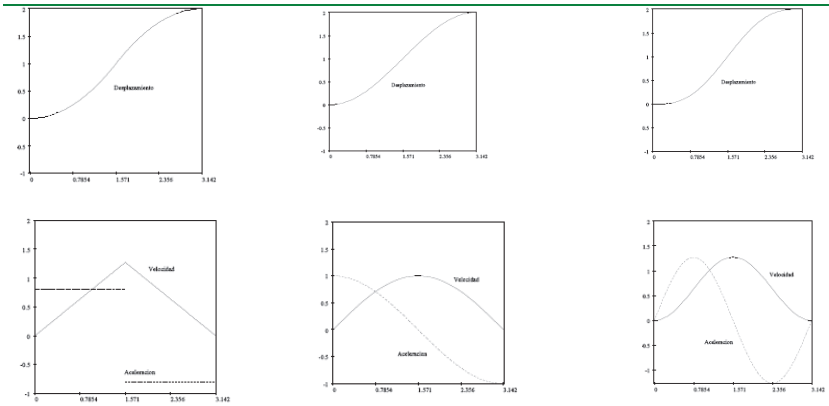
[14] Determinar en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a su atracción mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas

**Situación 2**. En el diseño de levas[15], Miranda (2003) establece que "*Cuando las levas giran a bajas velocidades, los cambios de fuerza que generan los cambios en la aceleración pueden despreciarse. Sin embargo, a altas velocidades, estos cambios se convertirán en fuerzas que actuarán en el seguidor. Por esta razón es importante revisar que los perfiles de las levas de alta velocidad no presenten cambios bruscos de pendiente o discontinuidades en las gráficas de velocidad y aceleración. Existen movimientos que permiten asegurar derivadas "suaves" como el movimiento armónico y el movimiento cicloidal*"

El autor presenta en la siguiente tabla (figura 3) las gráficas de desplazamiento (primer renglón), velocidad (segundo renglón) y aceleración (tercer renglón) de los movimientos parabólico, armónico y cicloidal, así como las ecuaciones que las representan. Algunas de ellas han sido discutidas en la parte inicial de este escrito.

[15] Una leva es un elemento mecánico que sirve para impulsar a otro elemento llamado seguidor para que desarrolle un movimiento especificado por contacto directo. Este movimiento puede ser uniforme, parabólico, armónico o cicloidal, dependiendo de la velocidad de la leva

| Movimiento parabólico | Movimiento Armónico | Movimiento Cicloidal |
|---|---|---|




| | | |
|---|---|---|
| $y = A\theta^2 + B\theta + C$ | $y = \frac{L}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$ | $y = L\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$ |
| $y' = 2A\theta + B$ <br> $y'' = 2A$ <br> $y''' = 0$ | $y' = \frac{\pi L}{2\beta}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta}$ | $y' = \frac{L}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$ |
| | $y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$ | $y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2}\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta}$ |

Fig. 3 Tres funciones para el diseño de levas

Además de distinguir entre "armónico" y "cicloidal", vemos que para la discusión situacional que presenta el autor no basta con la forma del movimiento, sino que éste será el adecuado o no (para el diseño de la leva) en función de sus variaciones (velocidad y aceleración). A través de su argumento gráfico sustenta la construcción del conocimiento en cuestión ya que la *suavidad* de la derivada será trascendente para una leva de las llamadas de "alta velocidad".

En resumen, y con base en lo anteriormente expuesto, consideramos que una relación significativa entre la función y sus derivadas al tratar con funciones periódicas, se de en un marco de prácticas como la graficación, la predicción y la modelación.

## Referencias bibliográficas

Aguilar, M. (1999). *Relaciones entre la derivada y la primitiva: El papel del registro gráfico en lagunas de las construcciones de los estudiantes.* Tesis de Maestría no publicada. Dirección de estudios de postgrado. Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Aluja, J. (2005). La matemática borrosa en economía y gestión de empresas I**.** *Matematicalia revista digital de divulgación matemática.* 1(3). Obtenido en abril 30, 2007 de http://www.matematicalia.net/

Boyce, W. y DiPrima,R. (1987). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. (2007) Lo periódico una revisión en el marco de la socioepistemología. En Dolores, C., Martínez,G., Farfán, R.,Carrillo,C., López, I.,Navarro, C., (eds) *Matemática Educativa: algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Díaz de Santos. pp 77-90 ISBN: 84-7978-786-4

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 4, (2), 103-128.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 5 (3), 225-250.

Hernández D. (2004). *Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de* $f$ *y* $f'$ *para las funciones* $x$, $x^2$ *y* $x^3$. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Gonzáles, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Miranda, J. (2003). Diseño de levas. En Mecanismos (pp. 98-142). Obtenido en Abril 20, 2007 de

http://www.ufrrj.br/institutos/it/deng/kalil/IT_140_Proj_Maq/Parte2_Mecanismos/mecanismo.pdf

Ordoñez, A. (2007) *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas*. Tesis de Maestría no publicada. México: Universidad Autónoma de Chiapas