

SOBRE LAS RUPTURAS CONCEPTUALES EN LA CONSTRUCCIÓN ESCOLAR DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Gustavo Martínez Sierra

Programa de Matemática Educativa

México

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada
del Instituto Politécnico Nacional

gmartinezzierra@gmail.com

Campo de investigación: Socioepistemología

Nivel: Superior

Resumen. *Lo aquí presentado es parte de los resultados de una línea de investigación que busca elaborar explicaciones de los procesos sociales de generación de conocimiento matemático. En particular estamos interesados en el estudio de los procesos presentes en la articulación de los sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado procesos de convención matemática (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez-Sierra, 2002; Martínez-Sierra, 2003, 2005, 2006). De manera más específica lo aquí presentado es continuación de nuestro anterior trabajo (Martínez-Sierra, 2007) en donde presentamos los procesos de convención matemática presentes en la inclusión de las funciones trigonométricas (FT) en el contexto del análisis euleriano. Lo aquí presentado tiene por objetivo describir y explicar, desde la perspectiva de los procesos de convención matemática, algunas de las rupturas conceptuales presentes en la construcción escolar de las funciones trigonométricas en tanto funciones de variable real.*

Palabras clave: construcción de conocimiento, convención matemática, funciones trigonométricas, construcción escolar

Introducción

Una de las tesis con las que se ha articulado una parte de las investigaciones desde la perspectiva *socioepistemológica* en Matemática Educativa en México (Cantoral y Farfán, 2003, 2004; Buendía y Cordero, 2005) es aquella que sostiene que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son específicos del concepto o sistema conceptual matemático de que se trate. A lo anterior suele agregarse la consideración de que los conocimientos matemáticos no fueron construidos para ser objetos de enseñanza; por lo que la “matemática escolar” es cualitativamente diferente a la “matemática”. Apoyados en las consideraciones anteriores se han desarrollado investigaciones que ofrecen explicaciones acerca de las particularidades, en tanto su construcción conceptual,

857

de las funciones trascendentes, logarítmicas (Ferrari 2001), exponenciales (Lezama 2005, Martínez-Sierra 2002, 2003) y trigonométricas (Buendía y Cordero 2005, Montiel 2005).

En trabajos previos (Martínez-Sierra, 2005) hemos desarrollado algunas nociones teóricas que han sido útiles, por un lado, en la explicación de algunos fenómenos didácticos y, por el otro, en la interpretación de procesos de construcción de conocimiento. En particular, en el plano de la construcción de conocimiento, hemos dado evidencia de que ciertas piezas de conocimiento, a las que hemos llamado convenciones matemáticas, pueden ser entendidas como producto de un proceso de articulación matemática o proceso de integración de conocimientos. En este mismo sentido, en el plano de la explicación de fenómenos didácticos, hemos dado cuenta de que algunas de las rupturas conceptuales presentes en la escuela tienen su origen en la desarticulación de cierta parte del corpus de la matemática escolar (Martínez-Sierra, 2005; Méndez, Maldonado y Martínez-Sierra, 2007).

En particular aquí describimos y explicamos, desde la perspectiva de los procesos de convención matemática, algunas de las rupturas conceptuales presentes en la construcción escolar de las funciones trigonométricas en tanto funciones de variable real.

Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

La socioepistemología es una aproximación sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del saber, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza: *“La socioépistémologie procède d’une approche systémique qui permet d’aborder les phénomènes de production et diffusion de la connaissance dans une perspective multiple, qui intègre l’étude des interactions entre l’épistémologie du savoir, sa dimension socioculturelle, les procédés cognitifs associés et les mécanismes de*

l'institutionnalisation via l'enseignement" (Cantoral y Farfán 2004, p. 139). Más precisamente, dentro de la teoría socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes dimensiones interdependientes son las que condicionan/determinan la construcción y la difusión del conocimiento matemático: las dimensiones cognitivas, didácticas, epistemológicas y sociales. Estas últimas condicionan/determinan, a su vez, las tres primeras. La *dimensión didáctica* atiende a aquellas circunstancias propias del funcionamiento de los diferentes sistemas didácticos y de enseñanza. La *dimensión cognitiva* se ocupa de las circunstancias que son relativas al funcionamiento y la actividad mental de las personas. La *dimensión epistemológica* se aboca a aquellas circunstancias *que* son propias de la naturaleza y significados del saber matemático. La *dimensión social* atiende a las circunstancias conformadas por las normativas y valoraciones sociales del saber y la manera en como éstas influyen en las demás dimensiones. En este sentido, las prácticas del artesano, del ingeniero, del médico, del profesional, o más ampliamente de una época o una cultura, son consideradas como constituyentes indisolubles del saber escolar.

El proceso de convención matemática en la construcción de las FT

Un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la *práctica de integración sistémica de los conocimientos*; es decir existe una *normativa de la actividad para relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado*. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiéndose por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva

al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes (Martínez-Sierra, 2003, 2005).

Esencialmente, la búsqueda de integración puede resolverse optando por alguna de las siguientes vertientes: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Así vista *la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.*

Desde el punto de vista anterior hemos hecho estudios sobre la articulación de las funciones trigonométricas al corpus del análisis euleriano que muestran la presencia de convenciones matemáticas que permitieron lograr la articulación de las funciones trigonométricas al análisis euleriano (Martínez-Sierra, 2007). En particular a través del análisis de la obra de Euler (1738, 1755) hemos podido interpretar que la articulación mencionada fue posible a través de la “analitización” de las *cantidades que nacen del círculo* a través de las relaciones siguientes: 1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 2) $\sin(y + z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$ y 3) $\cos(y + z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$. En base a esto Euler (1738) pudo desarrollar el serie de potencias a las funciones *sin* y *cos* para con ello elevarlas a la calidad de funciones (en el sentido de euleriano) y además por primera vez (Katz, 1987) las funciones trigonométricas fueron insertadas al cálculo diferencial e integral en (Euler, 1755) en base a al desarrollo de potencias y las relaciones mencionadas.

Las rupturas conceptuales en la construcción escolar de las FT

En el mismo sentido anterior, pero desde el punto de vista de la articulación de la matemática escolar hemos podido constatar que existen diferentes convenciones

presentes en la construcción escolar de las funciones trigonométricas que pueden ser interpretadas, a su vez, como portadoras de rupturas conceptuales: 1) El tránsito grado-radian-real para las funciones trigonométricas y 2) ángulos negativos y mayores de 360° . Al respecto hemos podido interpretar que en la construcción escolar de las funciones trigonométricas en el sistema educativo mexicano, la definición de los ángulos negativos y mayores de 360° y el tránsito al uso de los radianes son producto de una “convención matemática escolar” para la definición de las funciones trigonométricas como funciones de variable real.

Este último aspecto, en relación al uso escolar de los radianes como paso previo para la definición del dominio real de las funciones trigonométricas, ocasiona una serie de rupturas conceptuales que son el origen de una variada cantidad de fenómenos didácticos en relación al estatus de las funciones trigonométricas en el marco del Cálculo Diferencial e Integral. En términos generales los fenómenos didácticos señalados los consideramos subsidiarios de la al menos dos *prácticas sociales*, reproducidas en escenarios escolares. La socioepistemología comparte la inclusión de una visión social y cultural en la disciplina y específicamente contribuye en la búsqueda de “aquello” (que nombramos la práctica social) que estando presente en la cultura y en el pensamiento no es parte de un saber escolar; empero, posibilita su construcción y difusión. La primera consiste en considerar a los radianes como otro sistema de medición de ángulos que cumple las mismas funciones que la medición del sistema sexagesimal o cualquier otro sistema de medición. Esta práctica es fácilmente detectable en los libros de texto en aquellas secciones dedicadas a ejercitar las reglas de transformación de unidades de un sistema a otro. La segunda práctica que hemos detectado consiste en la *destematización* (es decir el considerarlos como objeto de estudio desde el punto de vista conceptual) del tránsito de los radianes a los números reales como argumento de las funciones trigonométricas.

Las dos prácticas señaladas determinan fuertemente diferentes concepciones que poseen estudiantes y profesores del nivel medio superior mexicano (alumnos de 12 a 15 años) en

relación a las funciones trigonométricas. Un ejemplo de tales concepciones es aquella que provoca considerar que el dominio de las funciones trigonométricas son dimensionales con la unidad en grados o radianes. Esta concepción provoca que no sea posible interpretar adecuadamente, al mezclar los valores de x con números reales y cantidades en grados, diversas expresiones de usos frecuentemente en el Cálculo Diferencial e

Integral, como por ejemplo: $f(x) = x + \sin x$, $f(x) = x^2 + \sin x$, $\int_0^1 (\sin x) dx = -\cos x \Big|_0^1$ o

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

La metodología que hemos seguido para identificar y clasificar los fenómenos señalados ha sido la realización de diferentes análisis como los son el análisis de libros de texto y el análisis de entrevistas a profesores y estudiantes del nivel medio superior mexicano. A continuación mostramos algunas evidencias en que se basan nuestras afirmaciones anteriores. Para más detalles se puede consultar (Méndez, 2008).

Las rupturas presentes en los libros de texto del Nivel Medio Superior

Tras el análisis de diferentes libros de texto utilizados en el nivel medio superior (NMS) mexicano podemos identificar la presencia de un patrón común en la construcción de las FT, el cual consiste en seguir las transiciones grados \rightarrow radianes \rightarrow reales en el dominio de las FT (Ver Figura 1).

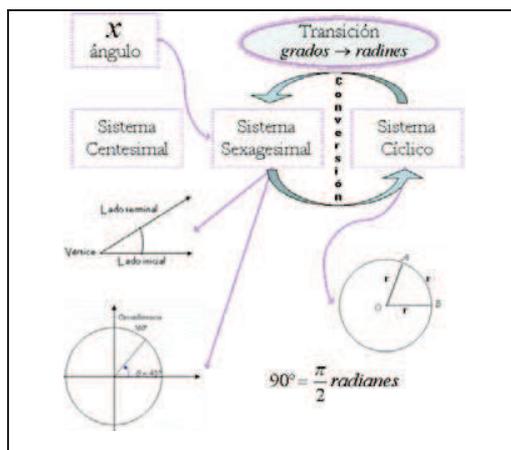


Figura 1. Patrón en la construcción de las FT en los libros de texto

Has dos puntos importantes que a resaltar del análisis de los libros. El primero es observar que no se hace explícito los motivos por los que repentinamente aparece un sistema de medición de ángulos como son los radianes. El segundo consiste en observar la *destematización* (es decir el considerarlos como objeto de estudio desde el punto de vista conceptual) del tránsito de los radianes a los números reales como argumento de las funciones trigonométricas (Ver Figura 2). Esto puede percibirse en las frases que algunos de estos libros presentan, como por ejemplo: “se acostumbra omitir la palabra radianes”, “cuando se usa el valor de un ángulo en radianes, no suelen indicarse las unidades”, “por comodidad y simplicidad omitiremos la palabra radianes”.

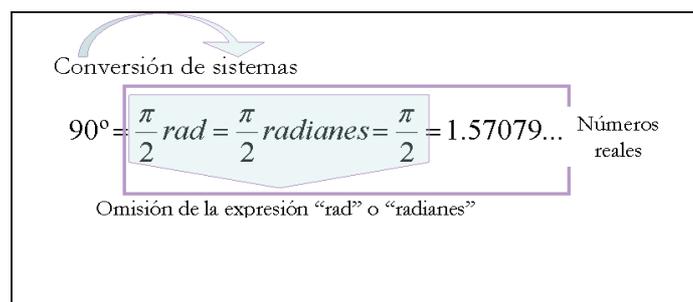


Figura 2. Patrón en los libros de texto en la destematización del tránsito de los radianes a los números reales

Las rupturas presentes en profesores del NMS

Con base en lo encontrado en el análisis de los libros de texto se diseñó una entrevista a cuatro profesores de diferentes instituciones educativas del NMS mexicano. La entrevista constó de dos fases. La primera fase se refiere a las primeras cinco actividades que tienen como objetivo detectar las concepciones que los profesores tienen de las características del dominio (el valor de x en sus diferentes posibilidades como grados, radianes o números reales) e imágenes de las FT, mientras que la segunda constó de tres actividades con el propósito de detectar las concepciones que los profesores tienen respecto al significado de las operaciones entre funciones trigonométricas y funciones algebraicas.

La principal señal de la ruptura conceptual que encontramos en los profesores se presenta cuando se encuentran ante la decisión de en que momento pueden utilizar la medida angular sexagesimal, la cíclica o utilizar números reales. Por ejemplo, en una de las actividades un profesor asigna valores a x reales, mientras que a la x de $\sin x$ le da valores en grados a pesar de que ambas expresiones constituyan una sola expresión ya sea en una adición o en una razón. Hacia el final de la actividad se da cuenta que le da valores a x en un sistema y en otro y consideró que era imposible hacer eso. Sin embargo, no corrige lo realizado en la actividad dado que aún no estaba convencido de que medida angular debería usar en que momento (Ver Figura 3). En el mismo sentido, al parecer, era tal la confusión sobre que tipo de medida angular debe utilizar en ciertas actividades que en varias de ellas los profesores omiten respuesta argumentando que son temas que no se tratan en el NMS y mencionan que son temas complicados a los que por falta de tiempo solo se pueden ver cómo teoremas o características de las FT.

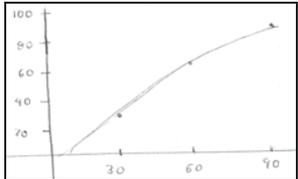
Actividad 2.1 ¿Cómo le explicaría a un estudiante la construcción de la gráfica de la función $y = f(x) = x + \sin(x)$?	
En este momento el entrevistado intenta aclarar que los valores de x son en grados, por lo que agrega el símbolo ° (para grado) a las últimas dos expresiones, sin embargo no lo hace en la expresión de x sino que solo lo agrega en la expresión $\sin(x)$	Le da valores a x sin determinar si son grados o radianes, y comienza sustituyendo los valores de x en $y = x + \sin(x)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $y = 10 + \sin 10 = 10 + 0.173648 = 10.173648$ $y = 20 + \sin 20 = 20 + 0.3420 = 20.3420$ $y = 30 + \sin 30 = 30 + 0.5 = 30.5$ $y = 60 + \sin 60 = 60 + 0.8660 = 60.8660$ $y = 90 + \sin 90 = 90 + 1 = 91.000$ </div>
Al finalizar al intentar explicar que si lo había hecho en grados se da cuenta que estaría sumando un número real con una medida angular expresada en el sistema sexagesimal, por lo que dice que no se puede y que los valores de x si eran de un principio números reales.	Gráfica la expresión en $y = x + \sin(x)$ de la siguiente manera. <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div>

Figura 3. Asignación de valores a la variable x

Referencias bibliográficas

- Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 59(2).
- Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. 53: 255–270.
- Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2.3), 137 - 168.

Euler, L. (1738/1845). *Introduction a l'analyse infinitésimale*. París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Euler, L. (1755/1787). *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* (Vol. 1). TICINI. Tiphographeo Petri Galeati.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G. L. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa*. Vol. 14. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C. R. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa*. Vol. 15 Tomo I. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII*. (pp. 145 -149).

Katz, V. (1987). The Calculus of the Trigonometric Functions. *Historia Mathematica* 14, 311-324

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 287-318.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(1), 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de

conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 195-218.

Martínez-Sierra, G. (2006). Los procesos de convención matemática como constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio: el caso de las funciones elementales. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 19 (pp. 745-751). México: CLAME. ISBN: 970-9971-08-5.

Martínez-Sierra, G. (2007). Los procesos de convención matemática y la inclusión de las funciones trigonométricas en el marco del análisis euleriano. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 20 (pp. 602-608). México: CLAME.

Méndez, C. L., Maldonado, E. S. y Martínez-Sierra, G. (2007). Sobre la construcción escolar de la función trigonométrica: la transición grados \rightarrow radianes \rightarrow reales. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 20 (pp. 573-578). México: CLAME.

Méndez, C. (2008). *Sobre la construcción escolar de las Funciones Trigonométricas: La transición grados \rightarrow radianes \rightarrow reales en el Nivel Medio Superior*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas.

Montiel G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN, México.