LA INTEGRAL DEFINIDA: SIMPLIFICACIÓN DEL LÍMITE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA DE LA DEFINICIÓN

Eugenio Carlos Rodríguez
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana Cuba
ecarlos48@yahoo.com
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *La definición que se utiliza para enseñar el concepto de integral definida en las clases de Cálculo para ingeniería fue dada por Riemann, quien fue el primero en enunciarla en su forma general (Fikhtengol´ts, 1965, p. 346). Por lo general, en los textos de Cálculo, la definición de Riemann se "simplifica" al obtener el "límite" de las llamadas Sumas de Riemann. En este trabajo se muestran las ideas del autor, en las cuales se inició cuando escribió un libro de Cálculo Integral para funciones de varias variables (Carlos, Martín, Otero y Rivero, 1986) para el cual consultó numerosa bibliografía de Análisis Matemático y de Cálculo. Estas ideas fueron enriquecidas con el estudio reciente de bibliografía especializada. El propósito general del trabajo es mostrar cómo llevar el concepto objeto de estudio al estudiante de ingeniería, sin perder el necesario rigor matemático.*
Palabras clave: integral definida, límite, sucesión de particiones

Antecedentes personales

Al comienzo de los años 80 el autor se dio a la tarea de escribir un libro de cálculo integral para funciones de varias variables (Carlos et al., 1986). Para esta tarea tuvo que consultar un gran número de libros de Cálculo y de Análisis Matemático, confrontando las diferencias entre definiciones de ambos tipos de textos, fundamentalmente en el rigor de las definiciones. Las ideas del autor acerca de este problema se enriquecieron con el paso del tiempo, sobre todo con la ayuda a la preparación de profesores jóvenes procedentes de carreras no matemáticas e impartiendo clases de Cálculo en carreras de ingeniería, y tuvieron un momento culminante con la lectura del libro "Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad", del Dr. Ricardo Cantoral Uriza (Cantoral, 2001).

Antecedentes históricos (Ribnikov, 1987)

Del legado de las Matemáticas, el cálculo infinitesimal es, sin duda, la herramienta más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza. El cálculo infinitesimal tiene dos caras: diferencial e integral. Los orígenes del cálculo integral se remontan, como no, al mundo griego; concretamente a los cálculos de áreas y volúmenes que Arquímedes realizó en el siglo III a.C. Aunque hubo que esperar mucho tiempo, hasta el siglo XVII, ¡2000 años!, para que apareciera, o mejor, como Platón afirmaría, para que se descubriera el cálculo.

Relacionado con los problemas de tangentes surgió a mediados del siglo XVII el llamado problema inverso de tangentes, es decir, deducir una curva a partir de las propiedades de sus tangentes. El primero en plantear un problema de este tipo fue Florimond de Beaune, discípulo de Descartes, quien planteó, entre otros, el problema de encontrar la curva con subtangente constante. El propio Descartes lo intentó sin éxito siendo Leibniz el primero en resolverlo en la primera publicación de la "historia sobre el cálculo infinitesimal". De hecho un elemento esencial para el descubrimiento del cálculo fue el reconocimiento de que el problema de las tangentes y las cuadraturas eran problemas inversos; es por eso que la relación inversa entre la derivación y la integración es lo que hoy llamamos Teorema fundamental del cálculo.

Newton en su célebre frase "Si he llegado a ver más lejos que otros es por que me subí en hombros de gigantes" se refiere entre otros a su maestro y mentor Isaac Barrow. Barrow fue probablemente el científico que estuvo más cerca de descubrir el cálculo. En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron de la maraña de métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos, los que hoy llamamos la derivada y la integral, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada -reglas de derivación- y mostraron que ambos conceptos eran inversos- Teorema fundamental del cálculo-: acababa de nacer el cálculo infinitesimal. Para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc. que habían ocupado a sus predecesores bastaba echar a andar estos dos conceptos mediante sus correspondientes reglas de cálculo.

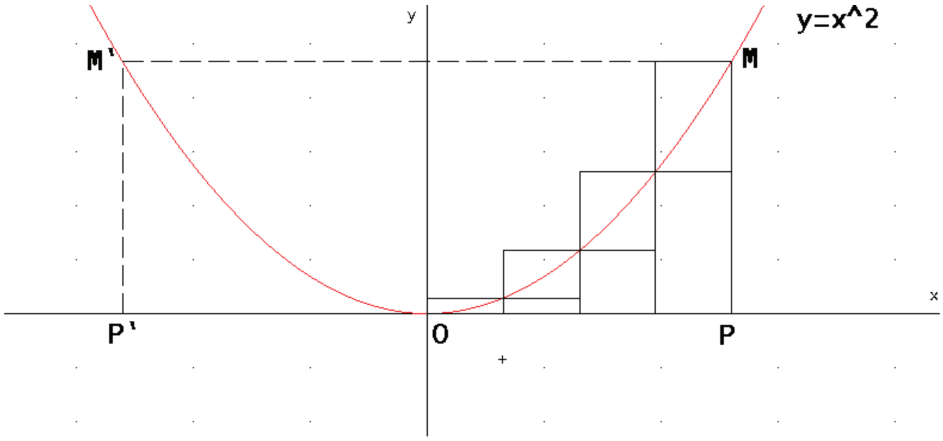
Leibniz, más conocido como filósofo, fue el otro inventor del cálculo. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque Leibniz fue el primero en publicar el invento.

Las suspicacias entre Newton y Leibniz y sus respectivos seguidores, primero sobre quién había descubierto antes el cálculo y, después, sobre si uno lo había copiado del otro, acabaron estallando en un conflicto de prioridad que amargó los últimos años de ambos genios. La disputa fue evitable pues los métodos de ambos genios tienen importantes diferencias conceptuales que indican claramente la génesis independiente de los mismos. La fundamentación de ambos métodos es totalmente distinta. Si el de Newton fue resuelto totalmente mediante el concepto de límite, el de Leibniz tuvo que esperar hasta la década 1960-70 hasta la aparición del Análisis no estándar.

Desarrollo

El presente trabajo considera el resultado de este proceso histórico como un proceso activo de apropiación de la experiencia histórica acumulada por la humanidad, y a partir de las ideas del psicólogo ruso Lev Semionovich Vigotsky (1896-1934), en lo que respecta a su Teoría del desarrollo histórico-cultural de la psiquis humana (Vigostky, 1966), en la que se reconoce que el hombre llega a elaborar la cultura dentro de un grupo social y no sólo como un ente aislado, este se considera el punto de partida y el marco teórico apropiado. Comencemos con el siguiente ejemplo.

Determinar el área A de la figura OPM limitada por la parábola y = x2, el segmento OP del eje de las X desde el origen hasta el punto P de abcisa x, y el segmento PM.



Dividimos el segmento OP en n partes iguales y construimos un conjuntote rectángulos cuyas áreas aproximan por defecto y por exceso el área de cada segmento de parábola.

Las áreas $A_n \; y \; A_n^{'}$ de la sumas de ambos conjuntos de rectángulos satisfacen $A_n < A < A_n^{'}$

Obsérvese también que la diferencia $A_n - A_n^{'}$ es igual al área $y(\frac{x}{n})$ del mayor de los rectángulos, de donde, se observa que $\lim_{n\to\infty}(A_n - A_n^{'}) = 0$

Obviamente se tiene que $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n^{'}$

Ya que las alturas de los rectángulos son las ordenadas de los puntos sobre la parábola con abcisas

$$\frac{1}{n}x, \frac{2}{n}x, \frac{3}{n}x, \ldots, \frac{n}{n}x = x$$

y sus magnitudes son

$$\frac{1}{n^2}x^2, \frac{2^2}{n^2}x^2, \frac{3^2}{n^2}x^2, \ldots, \frac{n^2}{n^2}x^2$$

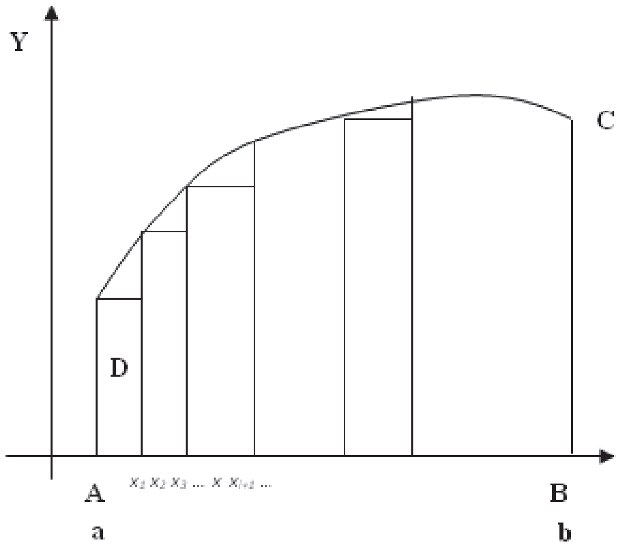
se obtiene que

$$A_n' = \frac{x^2}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\frac{x}{n} = \frac{x^3}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$
$$= \frac{x^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{x^3}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

de donde $A = \lim_{n\to\infty} A_n' = \frac{x^3}{3} = \frac{xy}{3}$

De aquí es fácil encontrar que el área M´OM es igual a $\frac{4}{3}xy$, es decir, dos tercios del rectángulo M´P´PM. Este resultado fue conocido por Arquímedes (287-212 ane).

Generalizando esta idea se puede determinar el área P del trapecio curvilíneo ABCD determinado por la curva *y = f(x)* entre *x = a* y *x = b*



tomando

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$
$$P = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

Para denotar la suma de la forma $\sum y\Delta x$ Leibnitz introdujo el símbolo $\int ydx$, donde el símbolo $\int$ es una s alargada, la primera letra de la palabra "summa" del latín.

El término "integral" fue propuesto por Bernoulí, discípulo y asociado de Leibnitz. Leibnitz originalmente usó la expresión "la suma de todos los *ydx*" (Ribnikov, 1987).

Hasta aquí se se utilizó la idea intuitiva de área, pero el propio concepto de área requiere justificación y el área del trapecio curvilíneo requiere de la existencia del límite. Este tipo de límite debe ser investigado independientemente de la representación geométrica de la función *f(x)*.

Veamos a continuación una definición que nos dará con rigor la forma de calcular el área deseada, la definición de integral definida (Fikhtengol´ts, 1965, p. 346).

Definición

Sea la función *f(x)* definida sobre el intervalo [a,b] . Formemos una partición del intervalo [a,b] subdividiendo arbitrariamente este intervalo al introducir entre a y b los puntos x_0, x_1, x_2, ..., x_n

La mayor de las diferencias

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

será denotada por λ.

Tomemos algún punto arbitrario ξ_i en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \quad (i = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

y formemos la suma

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Ahora procedamos a establecer la existencia de un límite finito de esta suma

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

Supongamos que el intervalo [a,b] es dividido sucesivamente en partes, primero de una forma, luego de otra forma y así sucesivamente. Esta sucesión de particiones del intervalo será llamada "fundamental" si la correspondiente de valores $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ tiende a cero.

Entonces el límite $I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$ se entiende en el sentido de que la sucesión de valores de las sumas σ correspondientes a una sucesión fundamental arbitraria de particiones de el intervalo, siempre tiende a un límite I para todos los posibles valores de ξ_i

El límite finito I de la suma σ cuando $\lambda \to 0$ es llamado la integral definida de la función *f(x)* en el intervalo [a,b], y se denota por el símbolo

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

y la función *f(x)* se dice que es integrable sobre el intervalo [a,b]

Esta definición en el lenguaje de sucesiones hace posible transferir los conceptos básicos y teoremas de la teoría de límites a la nueva forma del límite.

Por lo general en los textos de Cálculo esta definición se "simplifica" al obtener "el límite" de las sumas de Riemann. Esta es una de las diferencias que distingue también los textos de Cálculo de los de Análisis, y esta simplificación también se refleja, por supuesto, en el discurso matemático en la enseñanza del Cálculo en las carreras de ingeniería.

Esto es lo que Cantoral llama…el fenómeno de Transposición Didáctica, que participa en la conformación de lo que hemos llamado "didáctica normal" del Cálculo, que ha hecho de este tema una especie de Análisis Matemático "diluido"… (Cantoral, 2001).

Veamos qué dice por lo general una definición de integral definida en un libro de Cálculo.

Una vez obtenida la suma $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, si para cualquier partición del intervalo [a,b], existe $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I$ independientemente de los valores de ξ_i, entonces este límite se denomina integral definida de *f(x)* desde $x = a$ hasta $x = b$. En esta definición el límite significa que, para una partición cualquiera del intervalo, si la norma de la partición λ está suficientemente cerca de cero, y siendo arbitrarios los números ξ_i en los subintervalos [x_i , x_{i+1}] de la partición, entonces cualquier suma de Riemann está cerca de *I*.

En esta definición, aunque se trate con rigor la definición de límite de una función, no se aprecia el sentido del "límite de la sucesión fundamental de particiones" y se "diluye" el concepto, se simplifica. La interpretación geométrica, en el mejor de los casos utilizando la tecnología, reafirma el concepto.

En el caso del estudiante de ingeniería, para el cual el concepto de límite es uno de los más difíciles, si no el más difícil, este límite es un límite más entre tantos cuyo sentido no entiende.

Evidentemente en carreras de ingeniería y en otras carreras no matemáticas, en las que se estudia el Cálculo, es necesario "suavizar" la definición, ya que este tipo carreras no requieren del rigor del Análisis Matemático, sólo del Cálculo, pero alguna reflexión hay que hacer del sentido más complejo de este límite con respecto al límite de una función, conocido por el estudiante, y más cercano al límite de una sucesión, a veces no tan conocido por el estudiante.

Conclusiones

El tema mostrado no es más que otro ejemplo de la presencia paralela de la Didáctica normal del Cálculo con la Didáctica del Análisis Matemático.

El problema que se plantea ahora es cómo llevar el concepto objeto de estudio al estudiante de carreras no matemáticas, sin perder el necesario rigor matemático. Se trata de un problema complejo, que, sin lugar a dudas debe llamar a la reflexión, ya que este no es el único ejemplo de su tipo, en los cuales, buscando la simplificación, se pierde el rigor que debe tener la enseñanza de la Matemática. El tema está abierto a la investigación.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica..

Carlos, E., Martín, L., Otero, M. y Rivero, R. (1986). *Integrales Múltiples.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Fikhtengol´ts, G. M. (1965). *The Fundamentals of Mathematical Analysis. Volume 1.* USA: Pergamon Press.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Moscú. URS: Editorial MIR.

Vigostky, L. S. (1966). Pensamiento y Lenguaje. La Habana, Cuba: Edición Revolucionaria.