

**La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto  
en el campo del pensamiento algebraico**

**Paola Carolina Moreno Cabeza**

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Facultad de Ciencias y Educación  
Maestría en Educación  
Énfasis en Educación Matemática  
Bogotá D.C., Junio de 2014**

**La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto  
en el campo del pensamiento algebraico**

**Paola Carolina Moreno Cabeza  
20122184015**

**Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación**

**Director  
Rodolfo Vergel Causado  
Candidato a Doctor en Educación**

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Facultad de Ciencias y Educación  
Maestría en Educación  
Énfasis en Educación Matemática  
Bogotá D.C., Junio de 2014**

### **Dedicatoria**

A mi madre, ahora desde el cielo iluminas nuestros caminos.

A mi familia, que me impulsa a ser cada día mejor, en especial a mi padre quien me brinda su amor y apoyo incondicional.

### **Agradecimientos**

A mi director Rodolfo Vergel, quien ha compartido sus conocimientos conmigo y se ha convertido en mi guía académica.

A quienes me alentaron y colaboraron para que este proyecto se pudiera llevar a cabo, en especial a Patricia, por su permanente colaboración.

A mis niños del Colegio Claretiano, por sus pandacormios.

## Contenido

Introducción.....	1
Capítulo 1 Aspectos Preliminares .....	3
1.1. Justificación.....	3
1.2. Pregunta de investigación .....	6
1.3. Objetivos.....	8
<i>Objetivo general:</i> .....	8
<i>Objetivos específicos:</i> .....	9
Capítulo 2 Marco Teórico .....	10
2.1. La perspectiva semiótica cultural.....	10
2.2. La generalización.....	17
Capítulo 3 Metodología.....	22
3.1. Diseño de la investigación .....	22
3.2. Caracterización de los sujetos participantes en la investigación .....	25
3.3. La tarea.....	26
3.4. La recolección de datos.....	46
Capítulo 4 Análisis de los Datos .....	47
4.1. Categorías de análisis.....	47
4.2. Constitución de los datos .....	48
4.3. Análisis de los datos .....	49
Capítulo 5 Conclusiones.....	76
5.1. Introducción.....	76
5.2. Respuesta a la pregunta de investigación.....	76
5.2. Síntesis y observaciones .....	79

5.3. Reflexiones y apuntes .....	83
Capítulo 6 Aspectos Complementarios .....	85
6.1. Referencias bibliográficas.....	85
6.2. Anexos .....	90

## Índice de figuras, tablas y transcripciones

<b>Figura 1:</b> Etapas de generalización.....	19
<b>Figura 2:</b> Metodología de la investigación longitudinal.....	22
<b>Figura 3:</b> Metodología de la investigación.....	23
<b>Figura 4:</b> Metodología del diseño de Las Tareas .....	28
<b>Tabla 1:</b> Justificación e hipótesis de Las Tareas.....	29
<b>Figura 5:</b> Tarea 1 en el pilotaje $2n-1$ .....	33
<b>Figura 6:</b> Tarea 2 en el pilotaje $2n+1$ .....	34
<b>Figura 7:</b> Tarea 3 en el pilotaje $n+2$ .....	35
<b>Figura 8:</b> Tarea 4 en el pilotaje $n^2$ .....	36
<b>Figura 9:</b> Tarea 5 en el pilotaje $(n(n+1))/2$ .....	37
<b>Figura 10:</b> Tarea 6 en el pilotaje $(n(n+1)(n+2))/6$ .....	38
<b>Figura 11:</b> Tarea 7 en el pilotaje $2n$ .....	39
<b>Figura 12:</b> Tarea 8 en el pilotaje $2n$ .....	39
<b>Figura 13:</b> Tarea 9 en el pilotaje $2n+1$ .....	40
<b>Figura 14:</b> Tarea 10 en el pilotaje $3n+1$ .....	40
<b>Figura 15:</b> Tarea 11 en el pilotaje $4n+2$ .....	41
<b>Tabla 2:</b> Resumen análisis del pilotaje .....	42
<b>Figura 16:</b> Secuencia seleccionada $(n(n+1)(n+2))/6$ .....	44
<b>Tabla 3:</b> Justificación preguntas de La Tarea .....	44
<b>Figura 17:</b> Tarea 1 seleccionada para el aula a partir del pilotaje .....	49
<b>Figura 18:</b> Referencias piso y altura.....	50
<b>Transcripción 1:</b> Sesión 2 parte a grupo 5.....	50
<b>Figura 19:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Valentina.....	51

<b>Tabla 4:</b> Medios semióticos encontrados en L11 .....	53
<b>Transcripción 2:</b> Sesión 2 parte b grupo 5.....	55
<b>Figura 20:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Valentina.....	56
<b>Transcripción 3:</b> Sesión 3 grupo 5.....	57
<b>Figura 21:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Valentina.....	57
<b>Transcripción 4:</b> Sesión 3 parte b grupo 5.....	59
<b>Figura 22:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Valentina.....	60
<b>Transcripción 5:</b> Sesión 4 grupo 5.....	61
<b>Figura 23:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Jonathan .....	62
<b>Figura 24:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Jonathan y Juan.....	63
<b>Tabla 5:</b> Contraste en la evolución del nodo semiótico <i>conteo de lo oculto</i> .....	64
<b>Transcripción 6:</b> Sesión 1 grupo 4.....	65
<b>Figura 25:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Julián.....	66
<b>Tabla 6:</b> Medios semióticos encontrados principalmente en L7 .....	67
<b>Transcripción 7:</b> Sesión 2 grupo 4.....	68
<b>Figura 26:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Sergio y Julián .....	70
<b>Transcripción 8:</b> Sesión 5 grupo 4.....	71
<b>Figura 27:</b> Secuencia de señalamientos realizados por Julián.....	72
<b>Figura 28:</b> Expresión de la hipótesis realizada por Julián y Sergio .....	74
<b>Tabla 7:</b> Contraste en la evolución del nodo semiótico <i>tapar para comparar</i> .....	74

**RAE**

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

**FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN**

**MESTRÍA EN EDUCACIÓN**

**BOGOTÁ, D.C.**

**1. TÍTULO**

La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto en el campo del pensamiento algebraico.

**AUTOR**

Paola Carolina Moreno Cabeza

**LUGAR DE ELABORACIÓN**

Bogotá, D.C. Colombia.

**TIPO DE DOCUMENTO**

Monografía

**2. PALABRAS CLAVES**

Objetivación, Contracción Semiótica, Pensamiento Algebraico, Generalización de Patrones.

**3. OBJETIVOS**

**OBJETIVO GENERAL**

Identificar los medios semióticos de objetivación y analizar su evolución en la actividad matemática de los estudiantes de sexto grado cuando abordan tareas sobre generalización de patrones.

## **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Identificar y rediseñar una tarea sobre generalización de patrones e implementarla, bajo los principios de la teoría cultural de la objetivación, en un grupo de estudiantes de sexto grado.
2. Describir los medios semióticos de objetivación que emergen en la actividad matemática de los estudiantes de sexto grado a partir de la tarea adaptada.
3. Analizar tanto la evolución de los medios semióticos de objetivación como de los nodos semióticos que emergen en la actividad matemática de los estudiantes cuando abordan la tarea adaptada sobre la generalización de patrones.

## **4. DESCRIPCIÓN**

Dentro del trabajo se pretende observar el proceso de objetivación de un grupo de estudiantes de grado sexto a partir de la evolución de los medios semióticos emergentes. Se centra el foco teórico en el proceso de contracción semiótica visto desde la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación.

Se toma como unidad de análisis los medios semióticos presentes en la labor matemática vista desde una perspectiva multimodal, donde se conformó los nodos denominados “conteo de lo oculto” y “tapar para comparar” que muestra la acción lingüística-perceptiva-gestual. Se muestra su evolución en términos del refinamiento de fórmulas corpóreas para dar cuenta del proceso de objetivación.

## **5. FUENTES**

Se usaron en total 35 fuentes bibliográficas de las cuales las principales son:

Radford, L. (2005). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. En Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, 1(1), 143-145. Disponible en [http://www.luisradford.ca/pub/67\\_PME05RF.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/67_PME05RF.pdf) [2014, Abril 15]

Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 40(1) 83-96. Disponible en: [http://www.luisradford.ca/pub/45\\_zdm\\_radford.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/45_zdm_radford.pdf) [2013, Julio 2]

Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA* 4(2), 37-62. Disponible en [http://www.luisradford.ca/pub/23\\_PNA2010Layersgenerality.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf) [2014, Abril 15]

Vergel, R. (2014a). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* Tesis Doctoral Laureada. Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

## **6. CONTENIDO**

En el capítulo 1 se desarrolla los aspectos preliminares para la justificación de la investigación. El marco teórico bajo el que se contextualiza este trabajo, se desarrolla en el capítulo 2, teniendo como enfoque principal los postulados propuestos por Luis Radford en su teoría cultural de la objetivación y una breve caracterización del pensamiento algebraico como elemento para el análisis de los datos.

En el capítulo 3 se describirá la metodología de la investigación, las características de los sujetos participantes y el rediseño de la tarea sobre la que se dará cuenta de la actividad matemática. Con base en los datos obtenidos, en el capítulo 4 se realizará el análisis fundamentado en el marco teórico de la evolución de dos nodos semióticos denominados “conteo de lo oculto” y “tapar para comparar”.

La síntesis y la respuesta a la pregunta de investigación, así como algunas reflexiones y apuntes personales se condensarán en el capítulo 5. Finalmente, en el capítulo 6 se mostrarán las referencias bibliográficas y los anexos que se usaron en el desarrollo del trabajo.

## **7. METODOLOGÍA**

La investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo (Vasilachis, 2006). Se tendrán en cuenta las 4 fases de una investigación propuestas por Radford

(2010a)

*Fase 1: Diseño de tareas:* La tarea propuesta fue planteada bajo la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación, tomando como base la generalización de patrones.

*Fase 2: Implementación de tareas:* Se aplicó durante nueve sesiones cada una de 70 minutos de una clase de matemáticas de grado sexto.

*Fase 3: Interpretación de datos:* Los datos se analizan bajo la perspectiva semiótica cultural. Se usa como unidad de análisis los medios semióticos, se toma evidencia de los nodos semióticos emergentes y se hace un análisis multimodal de los mismos (Arzarello, 2006).

*Fase 4: Conclusiones y comparaciones teóricas:* Se da cuenta de la conformación de nodos semióticos y su respectiva evolución desde el proceso de contracción semiótica.

## **8. CONCLUSIONES**

Los medios semióticos que emergieron durante la actividad matemática se vieron condensados en dos nodos. El primero, denominado “*conteo de lo oculto*”, para registrar su evolución se dio cuenta de 5 segmentos específicos donde se registraba la actividad en la que se involucrara dicho nodo, centrándose en las formulas corpóreas provenientes de actividad perceptual, las cuales fueron refinadas hacia formas más sofisticadas, lo que permitió una evolución desde un tipo de pensamiento algebraico factual hacia uno contextual. En este sentido, los análisis realizados sugieren un refinamiento de recursos semióticos y en consecuencia una concentración del significado en relación con la manera de abordar la tarea desde un punto de vista algebraico, esto es, hay un despliegue de un proceso de contracción semiótica.

Del segundo nodo semiótico sensible de análisis denominado “*tapar para comparar*” se registró su evolución en 3 segmentos donde la actividad inicialmente se enfocaba en la acción sobre las figuras y se centraba en las particularidades mediante las cuales se podía contar, propias de un pensamiento algebraico de tipo factual, pero desembocó en expresiones que dan cuenta de una forma de pensamiento algebraico contextual.

## Introducción

Desde los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, se plantea que “el conocimiento matemático en la escuela es considerado hoy como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven” además de hacer una invitación a “aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica” (MEN, 1998, p. 14). Estos postulados han cogido peso y cobrado valor en la sociedad de educadores matemáticos en Colombia, dando paso al desarrollo de múltiples investigaciones en torno a las teorías emergentes en el campo sociocultural.

Una de ellas, la teoría cultural de la objetivación, menciona que el proceso de enseñanza-aprendizaje se observa a partir de la evolución de los medios semióticos que emergen en la actividad matemática (Vergel, 2014a); entendiéndolos como aquello que usa el estudiante para producir significado y así lograr una forma estable de conciencia, además de evidenciar sus intenciones, organizar sus acciones y lograr unas metas (Radford, 2003).

En este sentido, algunos gestos, señalamientos, escritos, tonos de voz, entre otros, empleados por los estudiantes dejan entrever “una reflexión subjetiva sobre la realidad concreta en el curso de la cual tomamos sensibilidad de las formas culturales que nos permite considerar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir acerca de otros, de nosotros mismos y de nuestro mundo” (Radford, 2013c, p. 27); es decir una toma progresiva de conciencia que desemboca en un refinamiento hacia formas de comunicación más sofisticadas.

En este trabajo se estudiará particularmente el proceso de generalización de patrones que desarrollan un grupo de estudiantes de grado sexto cuando hacen sus primeros contactos en este campo. Los medios semióticos que son desplegados por ellos cuando se enfrentan a una tarea y trabajan en comunidad, evidencian la toma de

conciencia frente a una regularidad o un patrón; elementos que según Vergel (2014a) han pasado desapercibidos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se centrará el análisis en describir la evolución de los medios semióticos de objetivación que emergen cuando estudiantes de grado sexto se enfrentan a una tarea cuyo objeto matemático es la generalización de patrones figurales, con el propósito de dar cuenta específicamente del proceso de contracción semiótica.

Para esto, se desarrollará en el capítulo 1 los aspectos preliminares para la justificación de la investigación. El marco teórico bajo el que se contextualiza este trabajo, se desarrolla en el capítulo 2, teniendo como enfoque principal los postulados propuestos por Luis Radford en cuanto a la teoría cultural de la objetivación y una breve caracterización del pensamiento algebraico como elemento para el análisis de los datos.

En el capítulo 3 se describirá la metodología de la investigación, las características de los sujetos participantes y el rediseño de la tarea sobre la que se dará cuenta de la actividad matemática. Con base en los datos obtenidos, en el capítulo 4 se realizará el análisis fundamentado en el marco teórico.

La síntesis y la respuesta a la pregunta de investigación, así como algunas reflexiones y apuntes personales se condensarán en el capítulo 5. Finalmente, en el capítulo 6 se mostrarán las referencias bibliográficas y los anexos que se usaron en el desarrollo de este trabajo.

# Capítulo 1

## Aspectos Preliminares

### 1.1. Justificación

La presente investigación se enfocará en dos ejes temáticos que articulan la propuesta, el primero muestra todos los aspectos relacionados con la teoría cultural de la objetivación, cuyo precursor es el profesor Luis Radford, quien investiga principalmente en la perspectiva semiótica cultural y profundiza conjuntamente sobre los tipos de generalización de patrones (Radford, 2003).

En esta perspectiva, la actividad mental es considerada como una reflexión mediatizada a través de artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) con el mundo de acuerdo a la labor de los individuos; enmarcados en significados culturales que actúan como enlaces entre la conciencia individual y la realidad subjetiva (Radford, 2006). Estos postulados serán ampliados en el marco teórico.

Al respecto, en México, Miranda (2009) en su tesis doctoral, se centró en investigar la manera en que estudiantes interpretan gráficas cartesianas centrándose en el proceso de toma de conciencia del origen de coordenadas como el punto desde el cual puede ser descrito el movimiento simultáneo de dos objetos; de donde concluyó que las interpretaciones de los estudiantes están mediadas por la presencia de diferentes sistemas semióticos como son los lenguajes verbal, escrito y gestual; del mismo modo, resaltó la importancia de los artefactos como medio de objetivación.

En la educación matemática Colombiana son pocos los trabajos que relacionan estos ejes, a pesar de que en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998) se da importancia a las relaciones entre las matemáticas y la cultura. En este documento, se resalta que el conocimiento matemático es resultado de una

evolución histórica que debería conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos.

En este sentido, buscando concordancias entre las políticas educativas colombianas y la llegada de teorías emergentes, se han realizado pocas, pero significativas investigaciones que contribuyen al desarrollo del campo de la objetivación cultural en matemáticas.

La investigación realizada por Villanueva (2012) en su trabajo de maestría, analiza los medios semióticos de objetivación utilizados por niños de primero de primaria; a partir de un análisis multimodal de las producciones de los estudiantes, se evidencian medios semióticos de objetivación como señalamientos, inscripciones, ritmos, entre otros; de igual forma dio cuenta los procesos de orquestación icónica y contracción semiótica.

Lasprilla (2012), en su trabajo de especialización, plantea una investigación con estudiantes de grado tercero de primaria para identificar los medios semióticos de objetivación que movilizan al abordar una tarea de generalización de patrones figurales; al respecto, los estudiantes hicieron uso de diversos medios y artefactos que les permitió establecer la generalización de una tarea a partir de su movilización. Un aspecto importante que se resalta es el hecho de que a pesar que los estudiantes emplearon los mismos medios, para cada niño fue particular la forma de expresarlos.

Para grado décimo de educación media, Gómez (2013) en su investigación de maestría, logró describir y analizar los medios semióticos y los procesos de objetivación cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas. Mediante un análisis multimodal evidenció múltiples medios semióticos de objetivación enfocados principalmente a los recursos semióticos asociados con movimientos corporales; del mismo modo, logro mostrar indicios de los procesos de objetivación contracción semiótica e iconicidad.

Vergel (2014a) en su tesis doctoral identificó y analizó las formas de pensamiento algebraico temprano en niños de 9 y 10 años cuando se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones en las que intervienen secuencias figurales, numéricas y numéricas con apoyo tabular. Entre sus conclusiones mostro que los recursos semióticos son consustanciales a la manifestación del pensamiento algebraico temprano; del mismo modo, mostró cómo la constitución de nodos semióticos caracteriza la actividad reflexiva de los estudiantes.

Una reflexión importante dejada por este autor, sugiere prestar atención a la evolución del pensamiento algebraico contextual, particularmente, sobre la evolución de las fórmulas corpóreas hacia formas más sofisticadas, asociadas al proceso de contracción semiótica.

En este sentido, todos los estudios, tanto nacionales como internacionales, resaltan la importancia de seguir generando investigaciones en educación matemática en relación con el campo de la teoría cultural de la objetivación, en los diversos pensamientos y sistemas matemáticos.

El segundo eje temático para este trabajo corresponde al proceso de generalización como parte del pensamiento algebraico. Para desarrollarlo, desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria son apropiadas, actividades que permitan analizar de qué forma cambia, el valor en una secuencia de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; y en efecto, expresar los términos, oralmente, por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento (MEN, 2006).

Para los grados sexto y séptimo se invita a reconocer la importancia de la variable, lo cual desemboca en la solución ecuaciones de primer grado a partir del trabajo con generalización de patrones, enfocándose en las formas que puedan dar pie a la

comprensión de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico que se desarrolla en los grados octavo y noveno (MEN, 2006).

Del mismo modo, a partir del hallazgo de un patrón que guíe a los estudiantes directamente a la expresión algebraica, se puede invitar a los estudiantes a su construcción a través de formulaciones verbales que muestren cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes.

Ahora bien, la verbalización no es la única muestra de la emergencia del pensamiento algebraico, los gestos, movimientos, señalamientos e incluso los tonos de voz evidencian formas de pensamiento que tienen intenciones frente a una labor de generalización. En este sentido, las fórmulas corpóreas son un indicativo del pensamiento algebraico (Vergel, 2014a).

Esta investigación pretende dar cuenta de la evolución de los medios semióticos de objetivación emergentes en la actividad matemática, asociados principalmente a las fórmulas corpóreas de estudiantes de grado sexto, cuando se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones, contribuyendo al fortalecimiento de los estudios en el campo de la objetivación cultural en Colombia.

## **1.2. Pregunta de investigación**

Desde los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998) se considera que para la construcción del pensamiento algebraico, el álgebra escolar debe estar enfocada en los procesos de generalización, comunicación, modelación, y argumentación de situaciones orientadas en el cambio. Esto debe apoyarse en la resolución de problemas, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos que permitan el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos para los alumnos (Rojas & Vergel, 2012).

En este sentido, “el pensamiento algebraico refiere al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional” (Rojas y Vergel, 2012, p. 5); es decir, el pensamiento algebraico se caracteriza por su sentido de indeterminación manejado analíticamente y asociado a incógnitas, variables y parámetros, a través del modo simbólico que debe designar a sus objetos.

Alonso et al. (1993) señala que en la enseñanza tradicional del álgebra se da prioridad a los algoritmos más que a desarrollar procesos de pensamiento que permitan la construcción de un pensamiento algebraico. Para contrarrestar esto, se propone el trabajo con actividades sobre generalización de patrones, pues “posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico” (Rojas y Vergel, 2012, p. 4); por tanto las actividades de patrones constituyen una ruta importante para conducir los estudiantes al álgebra.

La generalización de patrones invita implícitamente a analizar de qué manera cambia una secuencia o sucesión de figuras, hacer conjeturas desde su propia experiencia sobre la forma o el valor del siguiente término, y a sentir la necesidad de expresar ese término oralmente, por escrito, por medio de dibujos u otras representaciones, desembocando en intentar formular un procedimiento que permita reproducir el mismo patrón (MEN, 2006).

En este sentido, plantear tareas que favorezcan el trabajo con la generalización de patrones, constituye una herramienta para facilitar el pensamiento algebraico. Sin embargo, el hecho de plantear buenos problemas no implica que el estudiante llegue a profundizar en su sistema de representaciones, ya que “el plano sujeto objeto no es, epistemológicamente hablando, lo suficientemente fuerte” (Radford, 2010a, p. 21) por lo que la interacción social como espacio para reconocer los objetos matemáticos desde el saber de los demás, es parte fundamental del proceso de objetivación.

La mera presentación de tareas y la interacción social no presenta total evidencia de los procesos que se dan en la objetivación del saber, por lo que es necesaria la presencia de medios semióticos como los signos, los artefactos, las palabras, los gestos, las señales, entre otros (Radford, 2010a), que contribuyen a modificar radicalmente el proceso de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes organizar y regular sus propios procesos cognitivos (Vergel, 2014b).

Dentro de la línea de investigación de semiótica y didáctica de las matemáticas, esta investigación tiene como tema el proceso de objetivación que refiere fundamentalmente a la contracción semiótica en la generalización de patrones figurales con estudiantes de grado sexto, enfocada bajo la pregunta *¿Qué medios semióticos de objetivación emergen y cómo evolucionan en la actividad matemática de los estudiantes de sexto grado cuando abordan tareas sobre generalización de patrones?*

### **1.3. Objetivos**

#### ***Objetivo general:***

Identificar los medios semióticos de objetivación y analizar su evolución en la actividad matemática de los estudiantes de sexto grado cuando abordan tareas sobre generalización de patrones.

#### ***Objetivos específicos:***

- 1.** Identificar y rediseñar una tarea sobre generalización de patrones e implementarla, bajo los principios de la teoría cultural de la objetivación, en un grupo de estudiantes de sexto grado.

- 2.** Describir los medios semióticos de objetivación que emergen en la actividad matemática de los estudiantes de sexto grado a partir de la tarea adaptada.
  
- 3.** Analizar tanto la evolución de los medios semióticos de objetivación como de los nodos semióticos que emergen en la actividad matemática de los estudiantes cuando abordan la tarea adaptada sobre la generalización de patrones.

## Capítulo 2

### Marco Teórico

Dos grandes elementos teóricos son tomados en esta investigación. Por un lado, los postulados considerados desde la perspectiva semiótica cultural, que brindan las concepciones de interacción social y medios semióticos de objetivación desde donde se caracteriza la idea de enseñanza-aprendizaje, ligando así términos como nodos semióticos, que dan origen a las ideas de iconicidad y contracción semiótica.

Por otro lado, se hace una breve caracterización del pensamiento algebraico, poniendo como precedente la idea de la generalización, y en particular la generalización de patrones.

#### **2.1. La perspectiva semiótica cultural**

Para la perspectiva semiótica cultural, el estudiante en cuanto es un sujeto que aprende, es también un sujeto cultural (Miranda, 2009), que está dentro de ella y de la que toma modos de actuar, hablar y razonar; por tanto, la cultura es una “zona adaptativa creada por los seres humanos para convivir en su entorno natural” (Montagu, 1968, citado en Miranda 2009, p. 34).

Según Vergel (2014a), la cultura se caracteriza como una agrupación de conocimientos, conceptos, técnicas, actividades, creencias y valores, que son expresados a través de símbolos y prácticas retransmitidas en un espacio y un tiempo; lo que conlleva a pensar que el sujeto (estudiante) no es ajeno a la cultura, es decir, no se pueden considerar como dos entidades distintas, “sino como expresiones de una misma formación histórico-conceptual” (Radford 2013a, p. 8).

La idea de cultura es también social, “es el producto de la vida social y actividad social del hombre” (Vygostki, 1989, citado en Vergel, 2013, p. 34); y no se desliga de la trascendencia histórica del ser y de los objetos matemáticos. La teoría cultural de la objetivación toma en cuenta las características históricas de conocimiento matemático en cuanto a la forma como es tomado por el estudiante para realizar la producción de significados.

Esta producción se da a partir de la *labor conjunta*, es decir, la mutua constitución de los individuos y de la cultura (Radford, 2013a); en este sentido, el proceso social que corresponde a “una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana” (Leontiev, 1978, 1983, citados en Radford, 2004, p. 10), provee la idea enseñanza-aprendizaje.

Por tanto, es necesario identificar formas pedagógicas de acción que consideren la comprensión y producción de saberes y subjetividades en el aula, lo cual conlleva a “una comprensión profunda de los objetos matemáticos y a la creación de un espacio político y social dentro del cual puedan desarrollarse subjetividades reflexivas, solidarias y responsables” (Radford 2013a, p. 5)

En este orden de ideas, la enseñanza-aprendizaje se constituye como “una forma de vida: una labor conjunta que ocurre en un espacio... al interior del cual tienen lugar el knowing (conociendo) y el becoming (volviéndose), esto es volviéndose sujeto en tanto que proyecto histórico-social siempre inconcluso, siempre en movimiento” (Radford, 2013a p. 7), es decir, los significados van siendo elaborados activamente por el estudiantes dentro de un proceso social; esto es denominado *objetivación del saber*.

Según Radford (2006), la objetivación es “ese proceso social de toma de conciencia progresiva de algo frente a nosotros; una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido” (p. 14); incluyendo también procesos corpóreos y simbólicos mediados por discernimientos críticos de formas de expresión, acción y reflexión que han sido histórica y culturalmente constituidas (Radford 2013a).

Desde la teoría cultural de la objetivación, la interacción social, el uso de signos y artefactos toma vital importancia en el proceso de aprendizaje, ya que son mediadores de la actividad reflexiva del sujeto, que se ve materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y expresiones (Vergel, 2014a).

***La interacción social.*** El sujeto social descrito anteriormente, se forma discursivamente (Vergel, 2014b) en un proceso de interacciones con los sujetos que lo rodean, de ahí, que cada individuo tome elementos del discurso de los otros. Sin embargo, las interacciones van más allá de una mera negociación de significados, pues no se trata únicamente de las condiciones externas que son impuestas al estudiante y que deben ser acomodadas a su actividad; la interacción social es un proceso consustancial al aprendizaje (Radford, 2006) y constitutivo del saber cultural que se apropia el alumno (Vergel 2014a).

En este sentido, la enseñanza-aprendizaje no es posible si no existe un individuo diferente al que desea aprender; de ahí que la relación entre el estudiante y el objeto no es lineal, sino que está mediada por la presencia de otro sujeto (Miranda et al., 2007). Las relaciones entre estos son vistas desde la idea de *togetherness* y *el espacio de acción conjunta* (Radford & Roth, 2010).

*Togetherness* hace referencia a los medios que se emplean para realizar una labor conjunta por parte de los individuos participantes en ella; es decir, la manera en que los individuos se ajustan unos a otros de forma ética para llevar a cabo un objetivo

común; esto va más allá de las normas establecidas o los contratos sociales del salón de clases, sino que implica un compromiso ético motivado por la actividad.

El espacio de acción conjunta hace referencia al zona concebida por las relaciones que se dan en el lugar de la interacción, donde el individuo realiza una tarea y la comparte con los otros; aquí se puede establecer una zona de desarrollo próximo, que “se presenta cuando un estudiante requiere de la ayuda de una persona que sabe más que él (el profesor o sus propios compañeros de clase) para adquirir un nuevo nivel de desarrollo” (Miranda, 2009, p. 37).

De esta forma, las aulas son concebidas como zonas interactivas en relación con tareas, “mediadas por el transporte valores culturalmente e históricamente formados, científicos, éticos, estéticos y de otro tipo que los estudiantes objetivan mediante la participación reflexiva y activa” (Radford, 2008b, p. 13). Estas tareas se encuentran enmarcadas en las tradiciones históricas y culturales que relacionan al estudiante no solo con el objeto, sino también a los otros a través de la interacción social (Radford, 2010a).

***Los medios semióticos de objetivación.*** Dentro de todo proceso de enseñanza-aprendizaje se tiene una meta alcanzable a partir de la interacción social; sin embargo, no es suficiente con las relaciones establecidas entre los individuos. También se requiere el uso de artefactos y signos que faciliten la organización de acciones frente a la tarea en un espacio y tiempo determinado.

Los artefactos y signos son vistos más allá de su concepción instrumental como representación del conocimiento; puesto que ellos son depositarios de la historia cognitiva de generaciones predecesoras; radicando en ellos una responsabilidad histórica y cultural que los hace consustanciales con la actividad (Radford, 2004).

Al respecto, los artefactos y signos utilizados por individuos dentro de la labor, que contribuyen a lograr “una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones para adquirir las metas de sus acciones” (Radford, 2003, p. 5), son denominados *medios semióticos de objetivación*.

Los medios semióticos (objetos, herramientas, recursos lingüísticos, gestos y señalamientos) que el individuo usa intencionalmente en la construcción de significados, deben contribuir a llevar a cabo un despliegue de sus acciones con el fin de volver transparente una intensión (Radford, 2005) y lograr el objetivo de la actividad (Radford, 2010b).

En este sentido, los gestos, el lenguaje, los símbolos, entre otros, se convierten en elementos constituyentes del acto cognitivo que posiciona el objeto conceptual no dentro de la cabeza del individuo, sino en el plano social (Radford, 2006), lo que los convierte en instrumentos culturales, que contribuyen a modificar radicalmente el proceso de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes organizar y regular sus propios procesos cognitivos (Vergel, 2014b).

Dentro de los medios semióticos posibles en el aula de clase, se le da vital importancia al gesto, pues es uno de los medios más recurrentes que permiten a los estudiantes “dar cuenta de los aspectos conceptuales que, debido a su propia generalidad, no pueden ser mostrados en el mundo concreto” (Radford 2005, p. 1). Los gestos ayudan a hacer visibles sus intenciones, así como a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales del objeto matemático que se les está presentando; es decir, colaboran a lograr la objetivación del saber.

Se puede decir entonces que los gestos son parte esencial de la comunicación verbal, pues hacen posible la comunicación de ideas que son circunstancialmente difíciles de explicar con palabras; por tanto, “el gesto se convierte en una forma de comunicación tan importante como el habla” (Miranda, 2009, p. 39)

***Nodos semióticos.*** Dada la múltiple existencia de medios semióticos que contribuyen a la objetivación de un saber, el aula de clase se convierte en un espacio multisemiótico (Radford, 2010b), en el que el habla, los gestos, las fórmulas entre otros colaboran para que el objeto matemático sea visible emergiendo progresivamente. Esta existencia no se da de forma aislada, sino que se producen de manera simultánea ante la necesidad de hacer clara una intensión.

La coordinación de medios semióticos de objetivación de distintas naturalezas se denomina *nodo semiótico*, es decir, es “una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción y diversos signos (por ejemplo, gesto, palabra, fórmula) trabajan juntos para lograr la objetivación del saber” (Radford, 2009a, p. 2).

En este sentido, la escritura no es la única forma de dar cuenta de los resultados de un proceso de enseñanza-aprendizaje o de la toma de conciencia que el estudiante ha hecho; al respecto, la producción de saberes incluyen otros medios físicos y sensoriales de objetivación y que dan “una forma tangible y corpórea al conocimiento” (Radford, 2003, p. 5).

Miranda et al. (2007), resaltan la importancia de las acciones sensoriales mediante las cuales los estudiantes llegaron a una fórmula algebraica de una generalización de patrones; esto a través de “una sutil coordinación de palabras, signos, dibujos de figuras, gestos, percepción y ritmicidad” (Radford, 2002, p. 6); generando *fórmulas corpóreas de pensamiento algebraico*, es decir fórmulas expresadas a través de acciones que se despliegan en el espacio y el tiempo (Radford, 2010b).

El uso de nodos semióticos no es lo único que contribuye a un proceso de objetivación. En este sentido, “la objetivación de la estructura matemática detrás de un patrón que fue mediado por las palabras y los gestos pueden ser profundizado por una actividad mediada a través de otros tipos de señales” (Radford, 2010a) asociadas

a la formación de nuevos significados provenientes de registros basados en otros sistemas semióticos que el estudiante ya había dominado con anterioridad.

***Iconicidad.*** La forma en que se da cuenta que elementos similares en procedimientos anteriores contribuyen a la solución de la situación es denominado *iconicidad*; este proceso “permite hacer la transición progresiva de falta de claridad a una capa más clara y comprensibles de objetivación” (Radford, 2008a, p. 5) pues implica una reflexión sobre el ejercicio de la actividad previamente hecho.

Este proceso de objetivación toma en cuenta la manera de advertir acciones similares realizadas de un proceso anterior; es decir, se constituye como el contraste entre dos situaciones, una proveniente de la experiencia y otra que le provee la necesidad de evocarla. En este sentido, el estudiante se basa en experiencias anteriores para orientar sus acciones en una nueva situación, que permiten hacer una transición progresiva de un estrato de generalidad menos inteligible a uno más inteligible (Radford 2008a), de la falta de claridad a una capa más clara de objetivación.

Dentro de la iconicidad se encuentra la *orquestración icónica*, el proceso a través del cual los estudiantes toman gestos o intenciones de otros estudiantes y los transforman con palabras, tonos e intenciones propias para realizar y orientar sus acciones en una nueva situación (Radford, 2009b).

***Contracción semiótica.*** A medida que se ha pasado por diferentes niveles de objetivación proporcionados por la conformación y la evolución de los nodos semióticos, los estudiantes tienen que trabajar en la reducción de las formas de expresión frente a la labor realizada con el objeto matemático. Aquí, se hace necesaria la escogencia o toma de decisiones entre lo que se considera relevante y lo que no, lo que implica que los estudiantes deben ser selectivos entre las acciones que ya no son notables y aquellas que logren conducirlo a un nivel más profundo de conciencia.

La selección de los signos que componen el nodo semiótico no es neutra ni independiente (D'Amore, 2006), se necesita una sobriedad que es impuesta al sujeto que se está expresando; es decir, “se debe compensar la reducción de los recursos semióticos con una concentración de significados en el menor número de signos a través del cual ahora se expresa la generalización” (Radford, 2010a, p. 15); esta evolución de los medios semióticos se denomina *contracción semiótica*.

En este sentido, la transformación de la generalización a través la evolución de los nodos semióticos hasta llegar a múltiples contracciones semióticas proporciona que los estudiantes adquieran formas superiores de generalidad algebraica, por lo que se hace necesaria dentro del proceso como un elemento primordial para lograr el saber (Radford, 2008a).

La contracción semiótica es un proceso de objetivación del conocimiento, donde una vez realizada la síntesis de un procedimiento, se lleva a una manifestación sucinta, económica, que tiene palabras mejor articuladas acompañadas de menos gestos o de gestos mejor modulados (Radford 2002). En este sentido un primer tipo de contracción conduce a una declaración más corta teniendo menos y mejor hiladas las palabras junto con gestos más precisos.

Un segundo tipo serían las formulas simbólicas producto de contracciones de experiencias vividas y objetivadas a través del habla y ahora los gestos que se expresan en el sistema semiótico alfanumérica de álgebra; así, a medida que se adquiera destreza, la contracción aumenta (Radford, 2008a).

## **2.2. La generalización**

*El objeto matemático.* Partiendo del hecho que el saber matemático posee una característica histórica, donde la toma de conciencia sobre los objetos matemáticos es

generada a partir de la interacción social, que a su vez se convierte en parte de su realidad histórico cultural (Miranda, et al., 2007), y que es mediada por artefactos; los objetos matemáticos se caracterizan como “patrones fijos de actividad reflexiva... incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (Radford, 2006, p. 111).

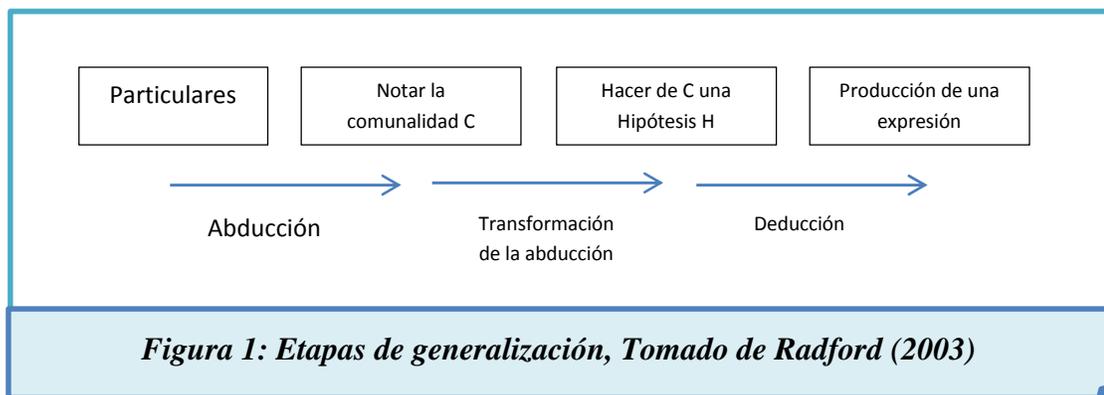
Por ende, los objetos matemáticos no se negocian, pues esto equivaldría a desconocer el papel de la cultura en el aprendizaje; estos son generados históricamente en el curso de la actividad matemática de los individuos, en este caso, el objeto matemático a trabajar está enmarcado en el campo del pensamiento algebraico a partir de la generalización de patrones. Los estudiantes obtienen el acceso a los objetos matemáticos a partir de una tarea determinada conciliados por los medios semióticos que los objetivan (Miranda et al., 2007).

***La generalización de patrones.*** Las generalizaciones se basan en acciones realizadas sobre los números a partir de los medios semióticos de objetivación, y dentro de ella, las actividades de patrones constituyen una ruta importante para conducir los estudiantes al álgebra. Sin embargo, no todas las generalizaciones de patrones son algebraicas, Radford (2010b) menciona que así como no todo proceso de simbolización es algebraico, no toda la actividad de modelado conduce a un pensamiento algebraico.

Dentro del proceso de generalización de patrones es necesario considerar las formas sensoriales que dan cuenta de los procesos cognitivos (Arzarello 2006), lo que implica que se deben tener en cuenta las formulaciones que expresan generalizaciones. La naturaleza multimodal del pensamiento permite observar actos de generalización a través de fórmulas corpóreas compuestas de acciones, como gestos, ritmos, miradas, palabras, entre otras.

Desde la perspectiva de Alonso et al, (1993), los procesos de generalización tienen tres etapas o pasos lineales entre unos y otros; la primera implica una visión de regularidad, que invita a la observación de las diferencias y las relaciones, para en un segundo espacio realizar su exposición verbal y finalizar con una expresión escrita lo más concisa posible; desde esta perspectiva, la generalización, y la simbolización son aspectos fundamentales para el aprendizaje del álgebra.

Para la teoría cultural de la objetivación, la generalización algebraica de patrones se define como “observar algo que va más allá de lo que realmente se ve” (Radford, 2008a, p. 3); En este orden de ideas, para Radford (Ibíd.) la generalización de patrones no se caracteriza por el uso de notaciones; se caracteriza por tener tres etapas, la abducción, en la cual los estudiantes identifican una comunalidad en los términos de la secuencia presentada; la transformación de la abducción, donde los estudiantes generalizan la comunalidad a todos los términos de la secuencia, a partir de la cual se define una hipótesis; y por último la deducción de una fórmula que permite determinar cualquier término de la secuencia presentada (Ver figura 1).



En el proceso de generalización algebraica de secuencias figurales, a los términos dados se les hace un análisis que permite tomar determinaciones sensibles mediante las cuales los estudiantes pueden obtener una característica en común, de ahí, se realiza una abducción analítica, donde la característica común se transforma en una hipótesis que es aplicable para los términos dados y no dados, con lo que se debería realizar la deducción de las formulas (Radford, En prensa).

*Estratos de generalidad.* El pensamiento algebraico se caracteriza por la indeterminancia de los objetos; el manejo analítico que se le debe dar a los mismos y por último el modo simbólico mediante el que se designan los objetos (Radford, 2010a); en este sentido, los medios semióticos de objetivación estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad, lo que se constituye en un intento por comprender las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones (Vergel, 2014a).

La generalización se puede expresar en tres tipos de capas de profundidad (Radford, 2010a), de las cuales dos son presimbólicas (teniendo en cuenta que lo simbólico hace referencia a los signos alfanuméricos del álgebra), *la generalización factual* y *la generalización contextual*; y una meramente algebraica, es decir *la generalización simbólica* donde las operaciones se realizan en el sistema semiótico alfanumérico algebraico.

La generalización factual consiste en la generalización de acciones numéricas a través de gestos puntuales y usos del lenguaje en intenciones propias y actividades perceptuales y sensoriales. La generalización contextual va más allá de cifras específicas generadas en la generalización factual para tratar con objetos genéricos del contexto de la secuencia. En la generalización simbólica las operaciones realizadas con objetos, se expresan en sistemas semióticos alfanuméricos del álgebra.

Esta clasificación puede considerarse como formas de pensamiento algebraico, en donde la movilización de los medios semióticos de objetivación constituye un intento por comprender las actuaciones de los estudiantes mediante la estratificación del objeto matemático (Vergel, 2014a).

La comprensión y el buen uso del simbolismo algebraico implican la consecución de una forma cultural, sin embargo, no es la única forma de mostrar pensamiento

algebraico, pues se desconocería el papel de las fórmulas corpóreas; por tanto, el objetivo es que “el proceso de objetivación permita dar cuenta de los aspectos conceptuales que, debido a su propia generalidad, no pueden ser completamente mostrados en el mundo concreto” (Radford, 2005, p. 1), que es uno de los aspectos que se pretende observar en esta investigación.

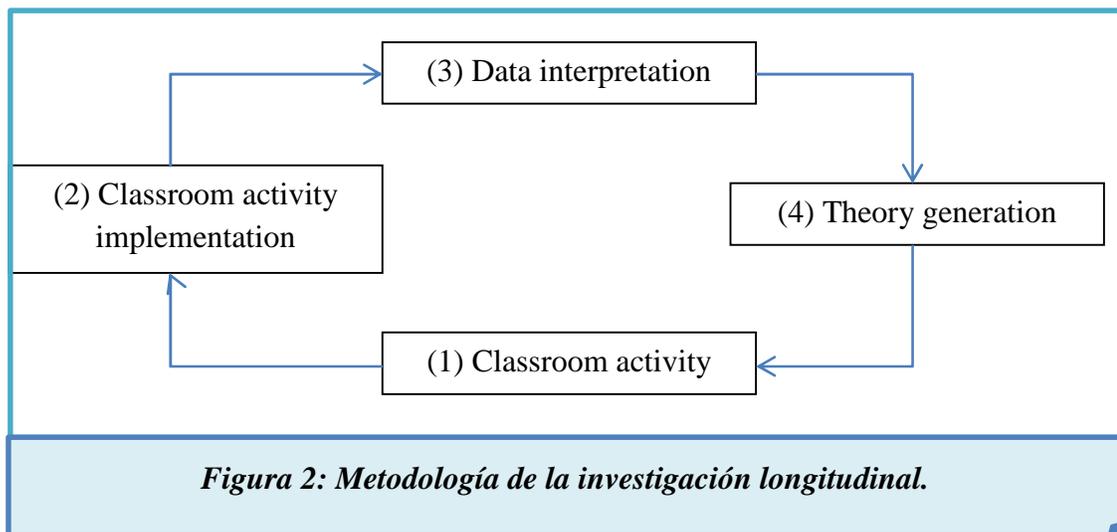
# Capítulo 3

## Metodología

### 3.1. Diseño de la investigación

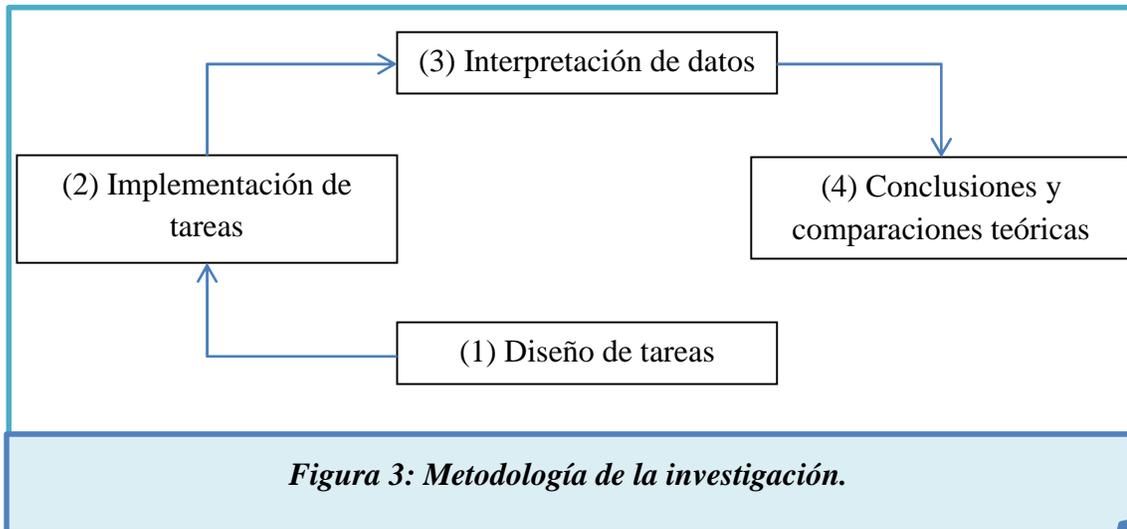
La investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo (Vasilachis, 2006), a partir del registro cuidadoso y la reflexión analítica sobre la información recolectada; desembocando en una perspectiva comparativa situada en una postura crítica cuya base son los postulados propuestos por Radford (2006) dentro del marco de la teoría cultural de la objetivación.

En este sentido, se tendrán en cuenta las 4 fases de una investigación propuestas por Radford (2010a), a saber, el diseño de actividades para el salón de clases, la implementación de actividades en clase, la interpretación de datos y la generación de teoría (Ver figura 2).



Dado los tiempos y alcances de la investigación, se realizó una modificación del diseño original en la 4 fase, ya que el modelo original desemboca en el desarrollo de nuevas teorías. Por tanto, se convirtió en una fase de conclusiones y comparaciones

teóricas (ver figura 3). Una breve descripción de cada una de las fases en relación con su desarrollo para esta investigación se hará a continuación, aunque se desarrollan de manera más amplia a lo largo de todo el documento.



*Fase 1: Diseño de tareas:* La tarea propuesta fue planteada bajo la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación, tomando como base un aspecto del pensamiento algebraico, la generalización de patrones.

Esta fue seleccionada a partir de un pilotaje que contenía 11 tareas puestas a prueba durante una sesión de dos horas y treinta minutos, con una comunidad compuesta de dos estudiantes proveniente del mismo entono en el que se recolectó los datos, pero diferente a la que participo en el desarrollo de la investigación.

La recolección de la información se realizó a partir de la observación y el registro en video y hojas de trabajo.

*Fase 2: Implementación de tareas:* Una vez definida la tarea a partir del pilotaje, se aplicó durante nueve sesiones cada una de 70 minutos, aunque se hace claridad que cada sesión grabada fue aproximadamente de 40 minutos efectivos, por cuestiones logísticas y organizativas del aula; de una clase de matemáticas de grado sexto del

Colegio Claretiano de Bosa en Bogotá. En esta institución se tiene en cuenta la organización basada en la conformación de comunidades de vida<sup>1</sup>, lo que fue pertinente con los rasgos específicos que se tomaran de la teoría cultural de la objetivación.

*Fase 3: Interpretación de datos:* Los datos obtenidos se analizan bajo la perspectiva semiótica cultural a partir de la observación del proceso de objetivación en enfocado en dos aspectos: los correspondientes a la conformación de los nodos semióticos (2003); y la contracción semiótica (Radford, 2008a) donde se centra la atención de esta investigación.

Se usa como unidad de análisis los medios semióticos que se movilizan en cada uno de estos aspectos teniendo en cuenta los gestos, las palabras, los escritos entre otros, que puedan evidenciar el proceso de objetivación (Radford, 2010a); para esto, se toma evidencia de los nodos semióticos emergentes y se hará un análisis multimodal de los mismos (Arzarello, 2006), y así rastrear su evolución, lo que conlleva a un refinamiento y la posible evidencia de contracción semiótica.

Para la sistematización y disposición de la información, se trabaja con la selección de episodios que den el contexto general de la situación y de los cuales se extrajo un fragmento que constituyó el dato de investigación susceptible de análisis.

*Fase 4: Conclusiones y comparaciones teóricas:* A partir del análisis comparativo de cada uno de los datos y de su respectiva descripción que sucede en relación con el contraste teórico, se da cuenta de la conformación de nodos semióticos y su respectiva evolución desde el proceso de contracción semiótica, sin descartar el de iconicidad; si hay lugar para emergencia de otros aspectos teóricos que se considere importante mostrar, se hará.

---

<sup>1</sup> Un término comparativo que puede dar una idea más general del significado de comunidades de vida, puede ser la idea de comunidades de aprendizaje mezclado junto a la idea de pastoral educativa.

### **3.2. Caracterización de los sujetos participantes en la investigación**

Para esta investigación, se seleccionó una clase de matemáticas para estudiantes de grado sexto del colegio Claretiano de Bosa, los estudiantes oscilan entre los 10 y los 12 años de edad. La forma de trabajo en el aula está dado por comunidades de vida, es decir, trabajo en grupos establecidos a partir de necesidades académicas como estrategia para superar las dificultades, se puede asociar a los aspectos conceptuales de comunidades de práctica enmarcadas en el modelo pedagógico de pastoral educativa.

Dada la formación infundada por el modelo pedagógico de la institución, el trabajo en equipo es usual y los procesos de libre expresión y comunicación de las ideas son ampliamente aceptadas y respetadas por los miembros que conforman las comunidades. Las relaciones con la docente no se dan en términos de poder, sino en una asimetría frente al conocimiento; por tanto, el papel de la profesora se centra en orientar el proceso a través de preguntas que procuren el desarrollo de la investigación.

El curso está compuesto por 40 estudiantes, divididos en 8 comunidades de vida, de las cuales 6 (30 estudiantes) tenían permiso para participar en la investigación. La docente titular es la encargada de la investigación y quien grabó las sesiones fue una persona externa a la institución y a la investigación.

La selección de los dos grupos focales se dio a partir del interés y el compromiso evidenciado por los estudiantes hacia la actividad; del mismo modo se pusieron en juego las consideraciones teóricas y metodológicas ajustadas a las necesidades de la investigación.

El grupo número 5 se encontraba compuesto por 4 estudiantes: Juan Pablo, Jonathan, Valentina y Sebastián. En este grupo, la negociación de significados fue bastante

activa, pues sus compromisos éticos con la tarea se vieron motivados por la confianza con la clase y con sus compañeros; en este sentido, la interacción social se ve más allá de la negociación de significados, se constituye como un elemento constitutivo del saber cultural, un modo de la actividad en la que se sumerge el alumno (Radford 2006).

Por su parte, el grupo número 4 estaba compuesto por 5 estudiantes: Julián, Felipe, Miguel, Sergio y Sebastián C.; aunque en este grupo la interacción social y la negociación de significados era activa, su nivel de dispersión era bastante alto, por tanto los rangos de actividad eran cortos, pero la movilización de recursos semióticos en estos intervalos era masiva, razón por la que se tomó en cuenta el proceso realizado por ellos.

### **3.3. La tarea**

**Rediseño y propósito de la tarea.** Para el rediseño de la tarea, el enfoque principal se centró en los recursos semióticos que son movilizados por parte de los estudiantes, y que a su vez pueden llegar a ser medios semióticos de objetivación emergentes. En este sentido, la tarea debía tener como propósito provocar la emergencia de medios semióticos de objetivación durante el desarrollo de la actividad matemática, ya que para efectos de la investigación es importante dar cuenta de su evolución.

Así mismo, es necesario que la tarea genere espacios de interacción social y negociación de significados, dada principalmente las características de la investigación y la metodología de la institución.

Teniendo en cuenta que los estudiantes en la edad de 10 a 12 años (grado sexto) perciben el álgebra como aritmética generalizada, se muestran situaciones cuyo enfoque principal es la traducción y la generalización de relaciones entre los números (Pretexto, 1993); por tanto, para el pilotaje se presentaron situaciones en lenguaje

aritmético figural y numérico (Socas et al., 1996); siguiendo un proceso de introducción, uso de operaciones o contextos numéricos, generalizaciones iniciales y por último, observar si eventualmente los estudiantes llegan a un nivel notacional de generalización.

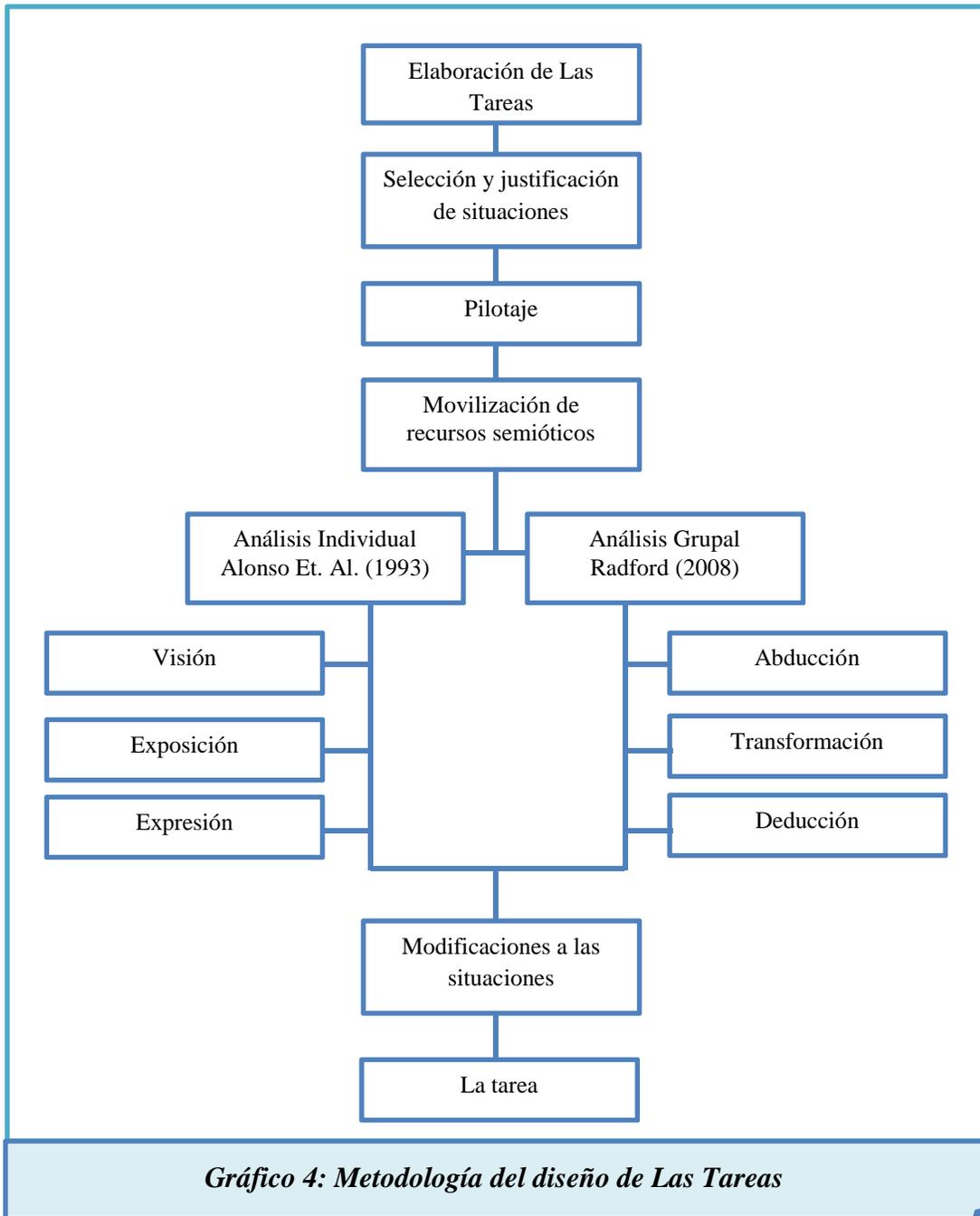
**Pilotaje de la tarea.** El pilotaje de Las Tareas se realizó a partir de 11 situaciones cuyo propósito es estimular la interacción social y negociación de significados (Radford, 2010b) entre dos estudiantes de grado sexto del Colegio Claretiano De Bosa (Laura y Estefanía), durante una sesión de aproximadamente 2 horas 30 minutos (ver anexos, guía de pilotaje).

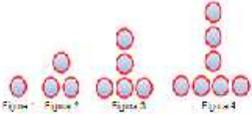
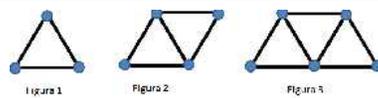
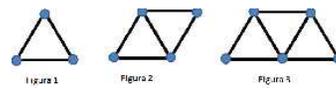
El análisis para la selección de las actividades tuvo en cuenta el proceso para la generalización de patrones realizado por cada uno de las estudiantes desde la perspectiva de Alonso Et. Al. (1993) en el que se plantea que se requiere de tres pasos: primero la visión de la regularidad, la diferencia y la relación; segundo, su exposición verbal; y tercero, su expresión escrita, de la manera más concisa posible

El análisis de la generalización de patrones realizado por la comunidad se hará desde el esquema propuesto por Radford (2008b), en los que se observará los procesos de abducción, mediante el cual los estudiantes advierten una comunalidad en los términos de una secuencia; una transformación de dicha abducción, donde los estudiantes generalizan la comunalidad hallada a todos los términos de la secuencia y desemboca en la deducción de una fórmula o esquema a partir de la comunalidad, que permite determinar cualquier término de una secuencia (Ver figura 4).

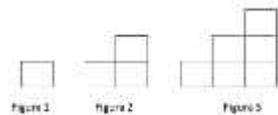
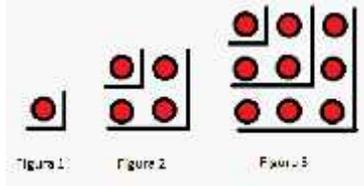
Se usó como recurso semiótico la guía de trabajo con las situaciones propuestas entregada a cada uno de los estudiantes, además de hojas de trabajo, lápiz, esfero y borrador.

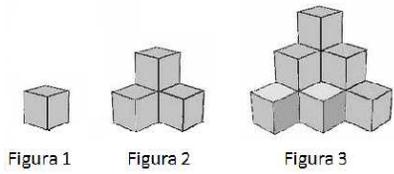
Para justificar la elección de las situaciones, se muestra la tabla 1, donde se puede observar la actividad propuesta junto a la justificación de la elección y el lugar de donde fue tomada, luego de esto, se plantean hipótesis de lo que se podría encontrar en el primer pilotaje.



	Actividad	Justificación	Hipótesis
Lenguaje Aritmético Figural	 <p>1) Dibuje la Figura 5 de la secuencia ¿Cuántos círculos hay en la Figura 9? ¿Cuántos círculos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.</p>	<p>Tomado de Rojas &amp; Vergel (2012); usando el lenguaje geométrico para encontrar regularidades en secuencias figurales.</p> <p>Situaciones planteadas para niños en estadio de desarrollo de operaciones concretas.</p>	<p>Abducción y transformación de la abducción.</p> <p>Uso de la letra como número generalizado.</p> <p>Generalización factual y contextual.</p>
	 <p>2) Dibuje la Figura 5 de la secuencia ¿Cuántos palillos hay en la Figura 9? ¿Cuántos palillos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de palillos para una Figura cualquiera.</p>	<p>Tomado de Godino &amp; Font (2003) usando el lenguaje aritmético para encontrar regularidades en secuencias figurales.</p> <p>Situaciones planteadas para niños en estadio de desarrollo de operaciones concretas.</p>	<p>Abducción y transformación de la abducción.</p> <p>Generalización factual y contextual.</p> <p>Uso de la letra como número generalizado.</p>
	 <p>3) Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántas uniones hay en la Figura 9? ¿Cuántas uniones hay en</p>	<p>Tomado de Godino &amp; Font (2003) usando el lenguaje aritmético para encontrar regularidades en secuencias</p>	<p>Abducción y transformación de la abducción.</p> <p>Generalización factual</p>

<p>la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.</p>	<p>figurales. Situaciones planteadas para niños en estadio de desarrollo de operaciones concretas.</p>	<p>y contextual. Uso de la letra como número generalizado.</p>
<p>4) Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos círculos hay en la Figura 9? ¿Cuántos círculos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.</p>	<p>Tomado de Socas et al. (1993) con el propósito de buscar regularidades en secuencias geométricas y expresarlas algebraicamente. Situaciones planteadas para niños en estadio de desarrollo de operaciones concretas.</p>	<p>Abducción y transformación de la abducción. Generalización factual y contextual. Uso de la letra como número generalizado.</p>
<p>5) Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 9? ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de cuadrados para una Figura cualquiera.</p>	<p>Tomado de Rojas &amp; Vergel (2012); usando el lenguaje aritmético para encontrar regularidades en secuencias figurales. Situaciones planteadas para niños en estadio de desarrollo de operaciones abstractas.</p>	<p>Abducción y transformación de la abducción. Generalización factual Uso de la letra como número generalizado.</p>



	 <p>Figura 1      Figura 2      Figura 3</p> <p>6) Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 9? ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de cuadrados para una Figura cualquiera.</p>	<p>Adaptado de Alonso et. Al. (1993) usando el lenguaje aritmético para encontrar regularidades en secuencias figurales.</p> <p>Situaciones planteadas para niños en estadio de desarrollo de operaciones abstractas.</p>	<p>Abducción y transformación de la abducción.</p> <p>Generalización factual</p> <p>Uso de la letra como número generalizado.</p>
	 <p>7) Parte de esta figura no está dibujada. Cada lado de longitud 2. Halla su perímetro.</p>	<p>Tomado de Kuchemann ((1986), citado en Socas et al. (1993)) con el propósito de buscar regularidades en secuencias geométricas y expresarlas algebraicamente.</p> <p>Situaciones planteadas para niños en estadio de desarrollo de operaciones abstractas.</p>	<p>Abducción y transformación de la abducción.</p> <p>Generalización factual y contextual.</p> <p>Uso de la letra como número generalizado.</p>

Actividad		Justificación	Hipótesis
Lenguaje Aritmético numérico	<p><b>2, 4, 6, 8, 10, ...</b></p> <p>8) ¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?</p>	<p>Tomado de Socas et al. (1993) con el propósito de buscar regularidades en secuencias numéricas y expresarlas algebraicamente.</p> <p>Situaciones planteadas para niños en estadio de desarrollo de operaciones concretas.</p> <p>Se usará como recurso semiótico la guía de trabajo con las situaciones propuestas.</p>	<p>Abducción y transformación de la abducción.</p> <p>Generalización factual.</p> <p>Uso de la letra como número generalizado.</p>
	<p><b>1, 3, 5, 7, 9, ...</b></p> <p>9) ¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?</p>		
	<p><b>2, 5, 8, 11, 14, ...</b></p> <p>10) ¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?</p>		
	<p><b>2, 6, 10, 14, 18, 22, ...</b></p> <p>11) ¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?</p>		

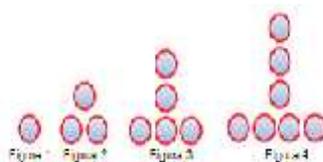
*Tabla 1: Justificación e hipótesis de Las Tareas*

El pilotaje fue realizado durante una sesión con una duración de 2 horas y 30 minutos, con dos niñas, Laura de 11 y Estefanía de 12 años de edad, estudiantes de grado sexto y compañeras de clase del Colegio Claretiano de Bosa. Las estudiantes tenían para la sesión las guías con cada una de Las Tareas, hojas en blanco, lápiz, esfero y borrador. Aunque se les solicitó que no borrarán nada de la guía, las estudiantes escribieron en lápiz y borraron en las hojas. Ambos elementos fueron recolectados.

Las tareas fueron resueltas en comunidad con el objetivo de observar la interacción social junto a la negociación de significados y la movilización de recursos semióticos entre las estudiantes; se debe resaltar que ninguno de los recursos encontrados fue movilizado por la investigadora.

Se propició espacios de interacción con la investigadora para poder observar posibles dificultades en torno al planteamiento de las preguntas; del mismo modo, se consideró pertinente realizar preguntas en algunas de las tareas para complementar la información que se quería recoger acorde a los propósitos del pilotaje, sin influenciar en los modos de desarrollo de la actividad.

#### Tarea 1



Dibuje la Figura 5 de la secuencia ¿Cuántos círculos hay en la Figura 9? ¿Cuántos círculos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.

***Figura 5: Tarea 1 en el pilotaje 2n-1***

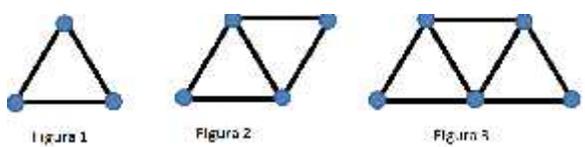
*Recursos semióticos usados:* Conteo, gestos, señalizaciones, tabulación, dibujos, palabras.

*Etapa del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.

La relación que se puede establecer entre la base y la altura fue prontamente encontrada por las estudiantes, a partir de la relación “uno menos en la altura” y estableciendo una suma entre la cantidad horizontal y la vertical; del mismo modo, se relacionó la cantidad de círculos en la base con respecto a la posición.

Para el total de círculos, las estudiantes establecieron a través del conteo, una relación de “dos más” en cuanto a la cantidad de círculos con respecto a la figura anterior; lo que las llevo a realizar una representación tabular. El lenguaje se convirtió en un elemento primordial para la negociación de significados, pues las estudiantes buscaban precisar cada uno de las palabras que usaban para explicar cómo encontraron la cantidad.

## Tarea 2



Dibuje la Figura 5 de la secuencia ¿Cuántos palillos hay en la Figura 9? ¿Cuántos palillos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de palillos para una Figura cualquiera.

**Figura 6: Tarea 2 en el pilotaje  $2n+1$**

*Recursos semióticos usados:* Conteo, señalizaciones, tabulación, rememoración.

*Etapa del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.

El procedimiento fue inmediatamente relacionado con la tarea anterior, pues después del conteo se hizo evidente la relación “dos más”, sin embargo, las estudiantes no notaron que en el inicio de la secuencia era diferente, lo que las llevo a colocar respuestas idénticas a la anterior tarea.

### Tarea 3

Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántas uniones hay en la Figura 9? ¿Cuántas uniones hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.

**Figura 7: Tarea 3 en el pilotaje n+2**

*Recursos semióticos usados:* Conteo, señalizaciones, instrumentos (esferos), tabulación.

Etapa del proceso de generalización: Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción.

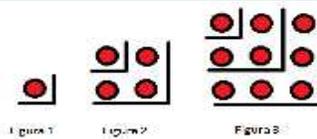
Se observó una dificultad en la redacción de la tarea al combinar las palabras unión y círculos como sinónimas para la situación.

Al analizar la cantidad total de las uniones a través del conteo, se estableció la relación “dos más que el número de la figura”, a pesar de que lo vincularon con la tarea anterior, la relación establecida permitió ver que la tabulación hecha no correspondía a los planteamientos para esta nueva tarea, lo cual fue explicado a través de la representación de la situación con los esferos que tenían sobre el escritorio, por

tanto fue necesario realizar una nueva tabulación que respondiera a las necesidades emergentes.

La interacción social y la negociación de significados primó para el establecimiento de acuerdos comunes para comunicar la explicación de la tarea en un lenguaje común, esto contribuyó a complejizar de la misma.

#### Tarea 4



Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos círculos hay en la Figura 9? ¿Cuántos círculos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.

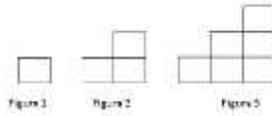
**Figura 8: Tarea 4 en el pilotaje  $n^2$**

*Recursos semióticos usados:* Conteo, gestos, señalizaciones, dibujos, palabras.

*Etapas del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción, transformación de la abducción.

La relación establecida por cuenta de las estudiantes correspondía a “formar un cuadrado”, haciendo referencia a sumar “uno acá, uno allá”, con respecto al aumento en cada uno de los sectores de la figura, y estableciendo en consecuencia una relación de multiplicación lado por lado a partir de la posición de la figura. Del mismo modo, para la situación se usaron palabras fuera del lenguaje cotidiano que tomaron significado en el contexto a partir de la negociación de significados.

## Tarea 5



Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 9? ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de cuadrados para una Figura cualquiera.

### ***Figura 9: Tarea 5 en el pilotaje $(n(n+1))/2$***

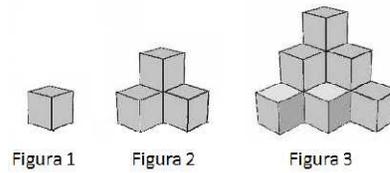
*Recursos semióticos usados:* Conteo, gestos, señalizaciones (tapar, destapar), dibujos, reteñir, palabras, rememoración y comparación.

*Etapas del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.

Las estudiantes articulan la posición de la figura con la cantidad de cuadros presentes en la base y en la altura, sin embargo la regularidad del aumento la perciben al darle vuelta a la hoja para relacionarlo con la figura anterior; la experiencia con la tarea anterior las obligó a buscar una relación entre ambas, de donde salió la necesidad de dividir el cuadrado en dos, en “forma de escalera”.

En esta tarea se hizo explícita la necesidad de establecer una secuencia a partir de la suma para el siguiente y como forma de comprobar, para la anterior, agregando o disminuyendo una hilera en la diagonal.

## Tarea 6



Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 9? ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de cuadrados para una Figura cualquiera.

**Figura 10: Tarea 6 en el pilotaje  $(n(n+1)(n+2))/6$**

*Recursos semióticos usados:* Conteo, gestos, señalizaciones (tapar, destapar), dibujos, reteñir, palabras, rememoración y comparación.

*Etapa del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, Abducción.

Se observó una dificultad en la tarea al hacer referencia a la cantidad de cuadrados y no a la cantidad de cubos, sin embargo, el desarrollo de la tarea se siguió bajo la instrucción “la cantidad de cubos”.

Las estudiantes tardaron alrededor de 40 minutos en dar una respuesta para esta tarea ya que consideraron pertinente buscar dados para hacer las representaciones de las pirámides, con el fin de observar “lo que no se ve”, es decir, los cubos que sostienen por la parte que no es visible a causa de la representación.

Cuando la cantidad de dados no les fue suficientes, se hizo necesario recurrir a formas de conteo basadas en las representaciones que ellas pudieron hacer, usando señalamientos sobre las intersecciones de los cubos para hablar de sobreposición; del mismo modo, recurrieron a la tabulación para llevar cuenta de la cantidad de cubos en cada uno de los casos.

Con el fin de no tener que contar de nuevo, las estudiantes realizaron una pirámide “muy grande” con la que pudieran sacar cuenta de cualquier figura que se les pidiera, tapando a partir de la diagonal de acuerdo a la posición que se les solicitara.

**Tarea 7: tarea no piloteada**



Parte de esta figura no está dibujada. Cada lado de longitud 2. Halla su perímetro.

***Figura 11: Tarea 7 en el pilotaje 2n***

**Tarea 8:**

**2, 4, 6, 8, 10,...**

¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?

***Figura 12: Tarea 8 en el pilotaje 2n***

*Recursos semióticos usados:* Conteo con los dedos, gestos, comparación.

*Etapas del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.

La secuencia resultó bastante intuitiva para las estudiantes, propiciando solamente el recurso de conteo con los dedos para llevar la cuenta de dos en dos, de donde obtuvieron rápidamente la idea de la generalización, multiplicar el número de la posición.

#### Tarea 9

**1, 3, 5, 7, 9,...**

¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?

***Figura 13: Tarea 9 en el pilotaje  $2n+1$***

*Recursos semióticos usados:* Señalización.

*Etapas del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.

Al igual que la tarea anterior, la visión de la regularidad fue similar, haciendo alusión a los números impares, en este caso no fue movilizado un recurso semiótico diferente a señalar los números del enunciado.

#### Tarea 10

**2, 5, 8, 11, 14,...**

¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?

***Figura 14: Tarea 10 en el pilotaje  $3n+1$***

*Recursos semióticos usados:* Señalización, conteo, palabras, tabulación.

*Etapas del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.

De esta tarea se resalta la falta de conciencia frente al primer término de la secuencia, pues lo importante para las estudiantes era encontrar el “cómo sigue” mas no el cómo inicia; a pesar de ello, fue necesaria la tabulación para encontrar la posible secuencia.

El conteo con los dedos se hizo presente nuevamente como una herramienta para llevar la cuenta, y se hizo alusión a tener “números mixtos”, en decir el intercalo entre un número par y uno impar, obteniendo una regularidad adicional.

#### Tarea 11

**2, 6, 10, 14, 18, 22,...**

¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?

***Figura 15: Tarea 11 en el pilotaje  $4n+2$***

*Recursos semióticos usados:* Señalización, conteo, palabras, tabulación.

*Etapas del proceso de generalización:* Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.

La regularidad fue obtenida del mismo modo que en el caso anterior, haciendo conteo con los dedos para saber cuánto más se suma, sin embargo, en esta tarea realizaron una actividad más de tipo multiplicativo, usando la idea del doble en la posición, entonces el doble del número.

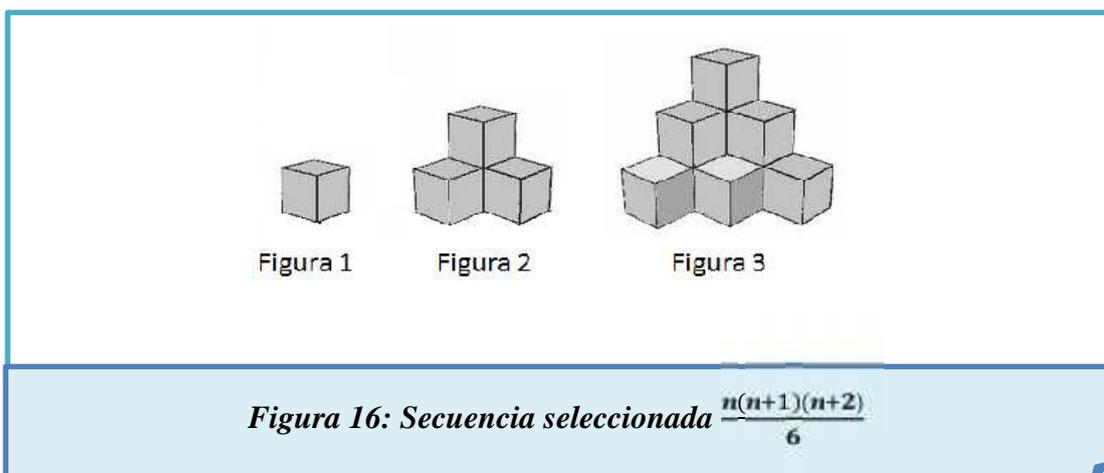
	Recursos movilizados	Tipo de generalización	Dificultades encontradas	Fortalezas encontradas
1)	Conteo, gestos, señalizaciones, tabulación, dibujos, palabras.	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.		Movilización de recursos.
2)	Conteo, señalizaciones, tabulación, memorización.	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.		Movilización de recursos.
3)	Conteo, señalizaciones, instrumentos (esferos), tabulación.	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción.	Redacción de la tarea.	Movilización de recursos.
4)	Conteo, gestos, señalizaciones, dibujos, palabras.	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción, transformación de la abducción.	Visualización rápida de la regularidad.	Movilización de recursos.
5)	Conteo, gestos, señalizaciones (tapar, destapar), dibujos, reteñir, palabras, memorización y comparación.	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.		Movilización de recursos.

6)	Conteo, gestos, señalizaciones (tapar, destapar), dibujos, reteñir, palabras, rememoración y comparación.	Visión de regularidad y exposición verbal. Abducción.	Encontrar la secuencia de generalización. Redacción de la tarea. Elaboración de la representación.	Movilización masiva de recursos semióticos y negociación de significados. Elaboración de la representación.
7)	<b>TAREA NO PILOTEADA</b>			
8)	Conteo con los dedos, gestos, comparación.	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción	Baja movilización de recursos	
9)	Señalización.	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción	Baja movilización de recursos	
10)	Señalización, conteo, palabras, tabulación.	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción	Baja movilización de recursos	
11)	señalización, conteo, palabras, tabulación	Visión de regularidad y exposición verbal, exposición escrita en lenguaje natural. Abducción y transformación de la abducción.	Baja movilización de recursos	

**Tabla 2: Resumen análisis del pilotaje.**

**Rediseño de la tarea.** Con base en el análisis de cada una de las tareas piloteadas se seleccionó una tarea en torno a la que se realiza la recolección de la información en la investigación.

La tarea fue seleccionada bajo los criterios teóricos que motivan esta investigación, en cuanto a incentivar la movilización masiva de recursos semióticos. De igual forma, se consideró que pudiese permitir la interacción entre los estudiantes y la docente sobre la generalización de la secuencia presentada. La secuencia seleccionada fue:



Un aspecto que motivó la selección de esta secuencia para convertirla en la tarea, fue la dificultad para realizar el dibujo, pues se presupone que esto obliga a la movilización de recursos diferentes al dibujo. Aunque la dificultad de la generalización algebraica puede no ser asequible a los estudiantes, se resalta que este no es el propósito de la actividad.

Las preguntas que acompañarán la secuencia y su justificación se pueden observar en la tabla 3; en la sección de anexos, tareas 1 y 2, se puede observar la guía de trabajo:

		PREGUNTA	JUSTIFICACIÓN
TAREA 1	1	Dibuje la Figura 4 de la secuencia, ¿Cuántos cubos tiene?	Introducción a la situación; se pretende que los estudiantes puedan identificar una comunalidad a partir de las representaciones graficas que puedan hacer entre la figura 1 y la 9.
	2	¿Cuántos cubos hay en la Figura 9?	
	3	¿Cuántos cubos hay en la Figura 15? ¡Pero no hagas el dibujo!	A partir de esta tarea, se pretende que los estudiantes movilicen otros recursos diferentes al pictórico, lo cual implica haber generado una hipótesis frente a la comunalidad encontrada.
	4	¿Cómo hiciste para saber la cantidad de cubos en los dos casos anteriores?	Se pretende invitar a los estudiantes a comunicar una forma común a ambos casos anteriores que no sea de forma gráfica, lo que permite el uso de lenguaje escrito para evidenciar formas de factuales de generalización.
	5	¿Cómo harías para encontrar la cantidad de cubos en la figura 100?	Iniciación a una generalización contextual donde se pretende que la comunalidad pueda ser aplicada a figuras que no son fáciles de dibujar.
TAREA 2	1	Escribe un mensaje a un compañero indicando la forma para encontrar la cantidad de cubos en la figura 100	Se pretende observar cómo la comunalidad es descrita para todos los términos de la secuencia, En este sentido, la indeterminancia se vuelve objeto del discurso.

**Tabla 3: Justificación preguntas de la tarea.**

### **3.4. La recolección de datos**

Para la recolección de la información se contó con 9 sesiones de la clase de matemáticas de grado sexto del Colegio Claretiano de Bosa, que se realizaron entre el 1 y el 15 de noviembre de 2013. Cada sesión era de 70 minutos, sin embargo, por cuestiones de organización y políticas institucionales, fueron efectivos alrededor de 40 minutos. Para la recolección se tomó en cuenta 4 fases (Miranda et al., 2007, p 11):

Fase 1 Grabación de la actividad: Para esto, se contó con una videocámara manejada por una asistente de investigación, quien no tenía fundamentación teórica respecto a la investigación, pero que recibió una instrucción previa para sensibilizar sobre los aspectos importantes para ser registrados.

Fase 2: Obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante: Las hojas guía contenían los puntos de cada tarea; a pesar de que en la guía había espacio para dar una respuesta, es importante resaltar que esto no era lo que se quería, por tanto, en cada sesión se entregó una hoja blanca, donde los estudiantes podían escribir libremente lo que necesitaran. Al finalizar cada sesión se recogían las hojas de trabajo y se devolvían la siguiente. Como premisa se solicitó a los estudiantes colocar en el encabezado de cada sesión la fecha, el número de sesión, el nombre y el número del grupo al cual correspondía. Del mismo modo, se les solicito escribir con esfero, no borrar ni tachar lo realizado a no ser que fuese necesario para comunicar algo

Fase 3 Transcripción de las sesiones: Para evitar la saturación de información, se analizaron los videos obtenidos y se transcribió únicamente los segmentos que constituirían el dato.

Fase 4: Análisis de videos: se realiza un análisis multimodal de los datos obtenidos (Arzarello, 2006).

# Capítulo 4

## Análisis de los Datos

### 4.1. Categorías de análisis

Se tomará como unidad de análisis los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes teniendo en cuenta los gestos, las palabras, los escritos entre otros, que puedan dar cuenta del proceso de objetivación; para esto, se identificarán los medios semióticos de objetivación, de donde se obtendrá la evidencia de los nodos semióticos emergentes. Esto está motivado por los criterios teóricos de la investigación.

Se hará un análisis multimodal de la actividad, para así rastrear su evolución, lo que conlleva a un refinamiento y la posible evidencia de contracción semiótica; en este sentido, es necesario tener en cuenta la relación de los diversos sistemas semióticos movilizados; por lo tanto los nodos semióticos son vistos como unidades integrales, en donde ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gestado por los estudiantes es analizado de manera aislada (Miranda et al., 2007); los cuales, a su vez, están influenciados por la meta de la actividad y por la cultura a la que pertenecen los estudiantes (Radford, 2003b).

La tarea debía tener como propósito provocar la emergencia de medios semióticos de objetivación durante el desarrollo de la actividad matemática, para analizar su evolución al transcurrir de las sesiones. A partir del pilotaje realizado, se encontró que en la tarea seleccionada (Tarea 1), había un proceso de particularización y abducción, lo cual promovió la negociación activa de significados y la movilización masiva de recursos semióticos.

## 4.2. Constitución de los datos

Las sesiones fueron desarrolladas en comunidades de vida<sup>2</sup> libremente establecidas. El grupo número 5 se encontraba compuesto por 4 estudiantes: Juan Pablo, Jonathan, Valentina y Sebastián. En este grupo, la negociación de significados fue bastante activa, pues sus compromisos éticos con la tarea se vieron motivados por la confianza con la clase y con sus compañeros; en este sentido, la interacción social se ve más allá de la negociación de significados, se constituye como un elemento constitutivo del saber cultural, un modo de la actividad en la que se sumerge el alumno (Radford 2006, p 114).

Después de una sesión de introducción con la Tarea 1, durante la segunda sesión los estudiantes pretendían dar cuenta de cuántos cubos había en la figura 5, ante lo cual Valentina discutía con su grupo cómo obtener dicha cantidad; de ahí se obtiene el dato número 1 que fue sensible de análisis.

El segundo dato fue tomado del grupo número 4, conformado por Julián, Felipe, Sergio, Sebastián C. y Miguel, la interacción social entre los cinco miembros de la comunidad fue bastante activa en las sesiones iniciales, pero, los índices de dispersión del grupo fueron bastantes altos, por lo que las últimas sesiones el trabajo fue realizado entre Julián y Sergio; sin embargo, la movilización de recursos fue masiva y la visualización de elementos que contribuyen a la investigación fue considerable.

El análisis se enfoca a partir de la sesión 3 con la tarea 1, donde Julián intenta hacer una generalización en términos alfanuméricos de las hipótesis que el grupo había sacado.

La constitución de cada dato se dio a partir de la selección de episodios que daban cuenta de la evolución de los medios semióticos de objetivación a lo largo de diversas

---

<sup>2</sup> La idea de comunidades de vida institucionalizadas en el PEIC se asocia a los postulados propuestos para el manejo de comunidades de aprendizaje.

sesiones, por tanto, cada dato está compuesto por varios episodios enfocados en una unidad de análisis descrita para cada uno de los grupos.

Con el fin de resaltar los principales aspectos tenidos en cuenta dentro de cada uno de los segmentos, se usará letra de distinto color. Las notas de la investigadora se encuentran en cursiva dentro del paréntesis cuadrado.

### 4.3. Análisis de los datos

La tarea debía tener como propósito provocar la emergencia de medios semióticos de objetivación durante el desarrollo de la actividad matemática, para analizar su evolución al transcurrir de las sesiones.

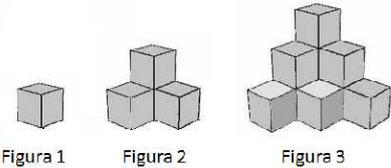
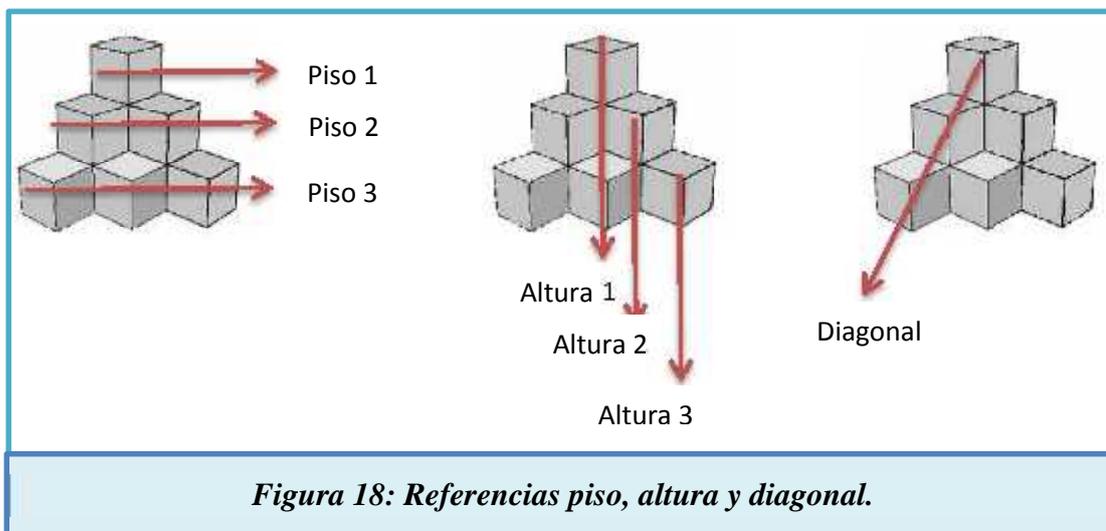


Figura 1      Figura 2      Figura 3

1. Dibuje la Figura 4 de la secuencia, ¿Cuántos cubos tiene?
2. ¿Cuántos cubos hay en la Figura 9?
3. ¿Cuántos cubos hay en la Figura 15? ¡Pero no hagas el dibujo!
4. ¿Cómo hiciste para saber la cantidad de cubos en los dos casos anteriores?
5. ¿Cómo harías para encontrar la cantidad de cubos en la figura 100?

***Figura 17: Tarea 1 seleccionada para el aula a partir del pilotaje.***

Para leer los datos, se denominará la figura con la palabra “pirámide”; téngase en cuenta que cuando se hace uso de las palabras *piso*, *altura* (dato 1) y *diagonal* (Dato 2) se hace referencia a:



**Dato 1: la actividad de Valentina.** El primer dato se centra en la labor realizada por el grupo número 5, del cual inicialmente se centra en el proceso de Valentina y se concretiza con las fórmulas corpóreas realizadas por Jonathan. La siguiente discusión se dio durante la sesión 2, en la que Valentina pretendía mostrar a sus compañeros la forma de obtener la cantidad de cubos para la figura 5:

**L1. Sebastián:** No le entiendo qué es lo que hace.

**L2. Valentina:** Porque sube, o sea sube una escala [*representa con su mano un piso más haciendo el recorrido con la mano al mismo tiempo que su elocución enfatiza la palabra “escala”*] y ésta [*señala el cubo externo*].

**L3. Juan Pablo:** Y se le agrega uno.

**L4. Valentina:** Si, y se le agrega uno para que siga subiendo, entonces más cuatro, y cuantos íbamos en 39, más 4 eh (...).

**L5. Jonathan:** 42.

**L6. Juan Pablo:** No 43.

**L7. Valentina:** ¿42?, 39 y 4.

**L8. Jonathan:** No 43.

**L9. Valentina:** 43 listo.

**L10. Juan Pablo:** No, no, no 46.

**L11. Valentina:** No, no, no, no, no 44, obvio si, **dos que sostienen, uno que sostiene**

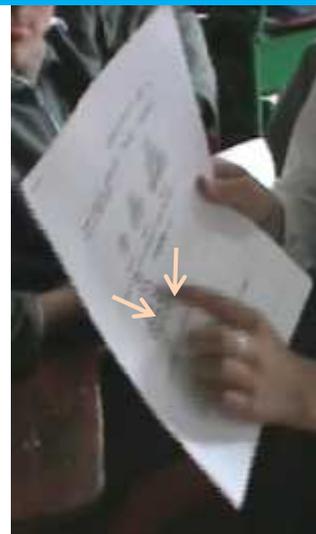
a éste, otro que sostiene a éste; otro que sostiene a éste y otro que sostiene a éste [indicando los cubos que no se ven en cada uno de los niveles, aumenta el tono de voz cada vez que señala] y el que sostiene a éste [señalando el cubo de la punta] son 5 los que sostienen. Entonces son 5 más los de la escala [hace un deslizamiento con la mano haciendo referencia al piso que se debe agregar, enfatiza con la voz en la palabra “escala”]. Siempre van a ser los 5 que le vamos a sumar, porque es que son 4 más dos de acá y dos de acá [señalando los correspondientes al tercer nivel] y los de acá arriba, más la escala que le sumamos [hace el recorrido con la mano y enfatiza la palabra “escala”]. Entonces listo sería 19.

**L12. Valentina:** Entonces, listo daría 19.

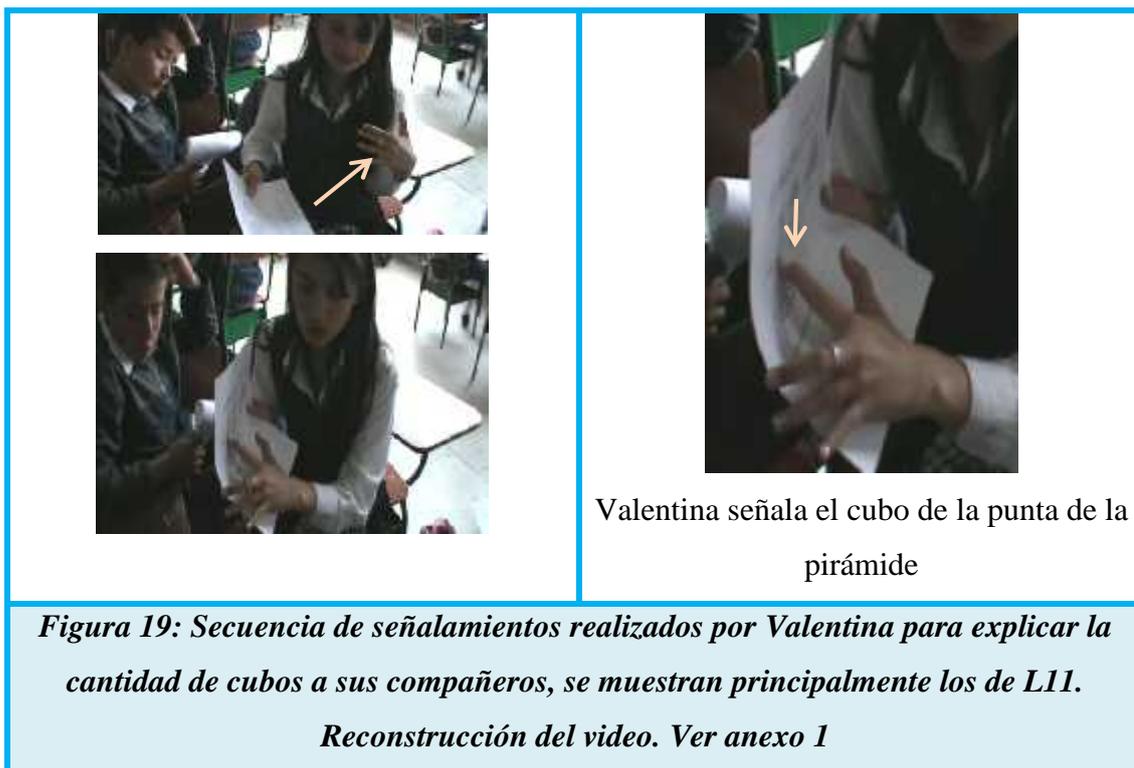
**L13. Juan Pablo:** Entonces daría 39.

**L14. Valentina:** Hagámoslo entonces desde el principio 19.

*Transcripción 1: Sesión 2 parte a grupo 5.*



Valentina señala cada uno de los cubos en los niveles de forma ascendente.



Valentina da cuenta de la actividad perceptual frente a la cantidad de cubos para la figura 5 a partir de deícticos espaciales como “éste” o “acá” enmarcados en las frases *el que sostiene a éste* o *dos de acá* que se evidencian en L11 (gestos indexicales) coordinados con ritmos y señalamientos de la figura (Ver figura 19), en torno a la cantidad de cubos en cada uno de los pisos y la relación con su altura, indicando que todos los cubos los sostiene únicamente uno debajo.

Se debe resaltar la riqueza semiótica que tiene L11 en cuanto a la cantidad de medios semióticos se movilizan en ese instante y que permiten dar cuenta de la actividad de Valentina, lo cual se vio principalmente motivado por la interacción social llevada a cabo durante la labor matemática. Para hacer un análisis de los medios semióticos encontrados se muestra la tabla 4:

Medios semióticos	En el ejemplo	Descripción
Gestos		Realiza señalamientos con sus dedos al nombrar cada uno de los cubos que cuenta, indica su posición en la figura.
		Realiza un desplazamiento con la mano cada vez que se refiere a “la escala” es decir, al piso que le va a agregar.
	“Otro que sostiene a <i>éste</i> ”, “los de <i>acá</i> arriba, más la escala que le sumamos” (L11).	La necesidad de nombrar elementos acompañados de señalamientos en contextos, es decir, de realizar gestos indexicales a partir de deícticos
Ritmo	<i>Su elocución enfatiza la palabra “escala”; enfatiza con la voz en la palabra escala (L2 y L11).</i>	La concordancia entre su tono de voz para hacerlo similar cada vez que hace referencia a los cubos o la escala que va a sumar.

**Tabla 4: Medios semióticos encontrados principalmente en L11.**

Sin embargo, cada uno de estos medios semióticos carecen de sentido si no se ponen en juego conjuntamente debido a la naturaleza multimodal del pensamiento humano (Arzarello, 2006). Dado que todos estos medios se dieron al mismo tiempo, de forma sincronizada con las acciones que caracterizaron la actividad reflexiva de Valentina, constituyeron un *nodo semiótico*. Esta actividad semiótica materializada en una forma corpórea, se denominará *conteo de lo oculto*.

En este caso, a través de la actividad perceptual, Valentina se centró en la forma de sumar la cantidad de cubos para cada altura a partir del conteo de cada uno de ellos,

evidenciados en las expresiones “dos que sostienen, uno que sostiene a éste” (L11), de donde parte para realizar la suma de las cantidades; esto está acompañado del ritmo que resalta la particularidad de cada cubo que está indicando y de la escala que está sumando.

Los gestos como el deslizamiento o el recorrido que hace con la mano, hacen énfasis en los cubos ocultos en cada una de las alturas que Valentina tiene en cuenta a la hora de sumar, es decir, de dónde los tomó, lo que se muestra por medio de acciones concretas a través de los déicticos “éste” o “acá”.

Valentina y su comunidad están analizando y obteniendo las particularidades de la figura, que se hacen presente en las figuras (L2 a L19), del mismo modo, a través de expresiones como “siempre son cuatro los que se van a sumar” (L11), junto con las acciones del nodo *conteo de lo oculto*, permiten ver generalizaciones de acciones sobre los números por medio de gestos como los indicados por los señalamientos y los desplazamientos.

No se debe dejar de lado la compañía de un lenguaje que tiene una intención propia (gestos indexicales) y que es visible a través de la actividad perceptual en el momento (L11), en este sentido, se puede decir que tanto Valentina como sus compañeros se encuentra en una etapa de generalización factual, donde se realizan acciones numéricas a través de gestos puntuales e intenciones propias provenientes de actividades perceptuales, y que son expresadas por medio de acciones que se despliegan en el espacio y en el tiempo.

En el siguiente fragmento, perteneciente también a la sesión 2, el discurso de Valentina muestra una precisión frente a lo que pretende sumar, estableciendo la relación que se encuentra en la cantidad de cubos de la figura 5 con respecto a la figura 4 a través de los medios semióticos que llevan consigo el nodo *conteo de lo oculto*.

**L15. Valentina:** Yo digo o sea. Mi este ¡préstame mi hoja! Yo digo que si acá, en la 4 había 20 se le suman la escala de abajo que son 5 [*Desplaza la mano hacia abajo indicando un piso más*], 25; se suman los, los dos de acá y los dos de acá que son 4. [*Señala las alturas del tercer piso*], dan 29, uno y uno y uno [*Señala las alturas del segundo piso*] de acá o sea que 3 daría 32, 32 en la figura 5.

**L16. Profesora Carolina:** ¿Y el resto cubos *no* los sumaste?

**L17. Valentina:** Si profe, o sea (...).

**L18. Profesora Carolina:** O sea a la figura 5, digamos con respecto a esta figura [*señalando la figura 4*], la figura 5 ¿Qué le hacemos?

**L19. Valentina:** Pues o sea con la figura 4, listo, hay 20, se le suman los 5 de abajo [*Desplaza el lápiz indicando un piso más*], 25, se le suman acá uno de acá arriba [*señala los correspondientes a la hilera central*] 26, 2 de acá y dos de acá [*señalando las alturas del segundo piso*] um (...) 30, uno y uno [*indicando las alturas del tercer piso*] dan 32, y uno de acá de la mitad [*indicando la altura del cuarto piso*] 33, 33 en la figura 5.

**L20. Profesora Carolina:** ¿Y en la figura 6?

**L21. Valentina:** Entonces quedamos en 33 más los seis de abajo [*hace el desplazamiento con la mano [registrado como apunte personal]*], 36 (...) 39, más los 4 de los dos lados, entonces, ¿cuánto íbamos?

**L22. Sebastián:** 39

**L23. Valentina:** 39 y 4 serían 43 (...) 43 y uno de acá y otro de acá del centro [*indicando las alturas del cuarto piso*], eh (...).

**L24. Juan Pablo:** Da 63.

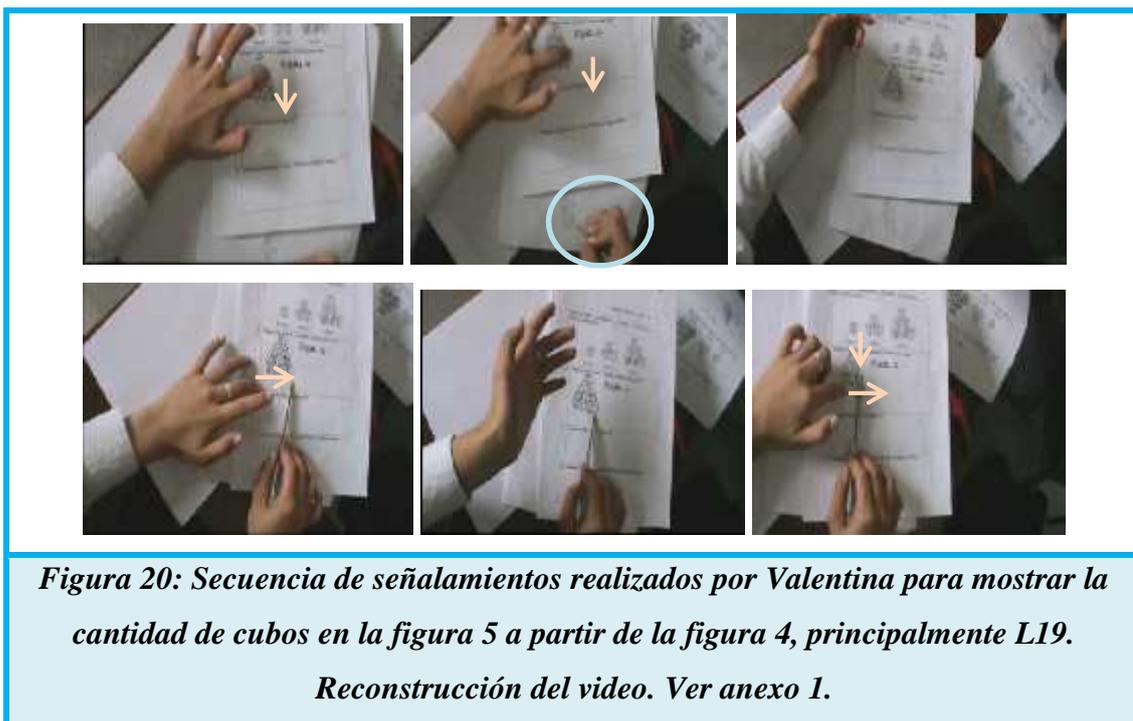
**L25. Valentina:** 45 (...) y los dos de acá [*indicando las alturas del tercer piso*] 47(...).

**L26. Profesora Carolina:** Hay que buscar una forma (...).

**L27. Valentina:** Más fácil... no la veo porque multiplicando no se puede, porque tocaría mirar.

**L28. Juan Pablo:** Porque si digamos (...).

*Transcripción 2: Sesión 2 parte b grupo 5*



La actividad de Valentina la llevó a notar que, con respecto a la figura anterior, se debe adicionar una cantidad regular de cubos. En las expresiones “se le suman los cinco de abajo” (L19) y “más los seis de abajo” (L21), empleadas cuando hace referencia a la figura de la secuencia (en estos casos la figura 5 y 6 respectivamente), ella realizó el movimiento del lápiz desplazándolo de izquierda a derecha y que asocia a un piso más, esta comunalidad que ha encontrado revela una idea de la indeterminancia de la secuencia.

Al nodo semiótico *conteo de lo oculto* se le suma los señalamientos que Valentina realiza con la mano izquierda, mientras que alternamente, con la derecha hace anotaciones coordinadas de la cantidad de cubos que encuentra en cada altura mencionada (L19) (ver reconstrucción del video), como una ayuda al pensamiento para clarificar las cuentas que lleva.

Los deícticos cambiaron de ser “éste” o “acá” en gestos indexicales como “el que sostiene a éste” (L11), a “uno de acá” (L19), a pesar de que los señalamientos son los

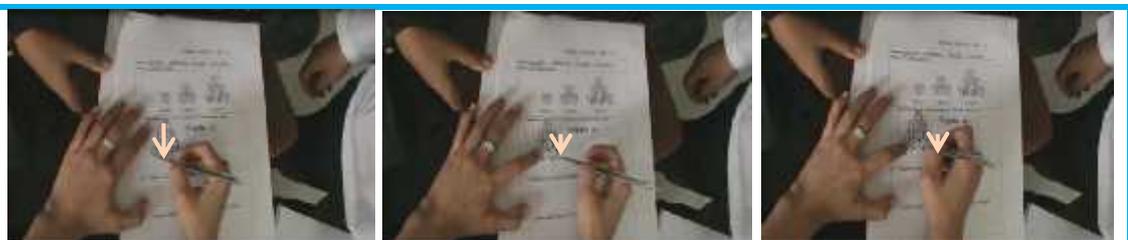
mismos en ambos casos, sin embargo, ella no consideró necesario hacer la claridad de lo que estaba sosteniendo.

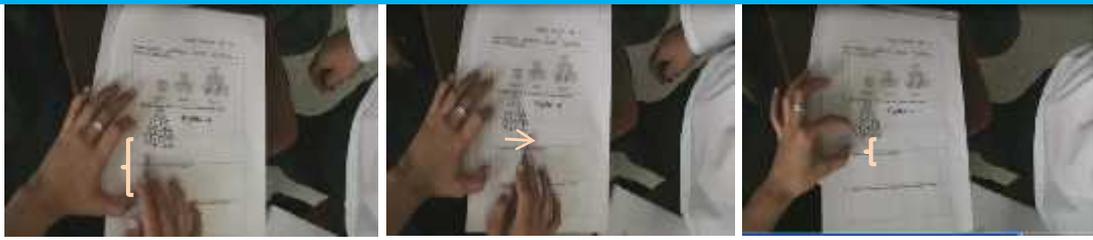
Durante la sesión 3, la profesora solicitó profundizar sobre la pregunta número 4 (¿Cómo hiciste para saber la cantidad de cubos en los dos casos anteriores (figura 9 y 15)?) de la tarea, tratando que con lo que se hiciera allí, se pudiera dar una respuesta también a la pregunta 5 (¿Cómo harías para encontrar la cantidad de cubos en la figura 100?).

En un intento de Valentina por realizar una transformación de la abducción realizada sobre la comunalidad de la figura, se generó la siguiente hipótesis:

**L29. Valentina:** Profe entonces va así como (...), o sea contando los que suman una escala acá [*desplaza el lápiz indicando un piso más, hace énfasis con la voz en la palabra escala*], 2 de acá, 2 de acá [*señalando las alturas del segundo piso*], entonces serían 4, uno de acá, uno de acá [*señalando las alturas externas del tercer piso*], 6, uno de éste [*señalando el cubo del centro del tercer piso*] 7, y uno de éste grande [*señalando la punta de la pirámide*] 8, más el de la escala serían 9 [*desplaza el lápiz indicando un piso más, hace énfasis con la voz en la palabra escala*], pero según la otra escala, entonces como la otra escala ya son seis los de abajo [*indicando un piso más*] entonces serían 10, la otra figura son 7, serían once y así sucesivamente.

**Transcripción 3:** Sesión 3 grupo 5





***Figura 21: Secuencia de señalamientos realizados por Valentina para mostrar la cantidad de cubos en cualquier figura. Principalmente L29. Reconstrucción del video ver anexo 1.***

Los señalamientos realizados por Valentina enfocan los cubos que está sumando (Ver figura 21), y dentro de ellos incluye los que no son perceptibles a la vista, haciéndolos parte de su repertorio sin necesidad de entrar en discusión o hacer alusión a los que están ocultos. A la vez, hace referencia a las alturas con los deícticos “de acá” o “éste” (L29) y se reducen progresivamente los ritmos que acompañaban estas expresiones, suprimiendo la referencia que se hacía inicialmente a “los que sostienen” como en L11 y que era necesaria para la comprensión de lo que se estaba indicando, pues entró a ser parte del discurso implícito de la comunidad.

En este sentido, el nodo semiótico *conteo de lo oculto* ha sufrido un cambio dado por acuerdos de lenguaje establecidos por la comunidad, para ellos, no es necesario expresar en términos amplios lo que cada deíctico junto a su respectivo señalamiento significa, lo que implica un ahorro en expresiones, sin embargo su refinamiento corpóreo solo se observa hasta el quinto segmento.

Se debe tener en cuenta que también se evidencia la transformación de los particulares condensados en la comunalidad y que fueron obtenidas de un proceso de abducción, pues a partir del indexical temporal “y así sucesivamente” (L29) se indica una primera hipótesis bajo los cuales intenta realizar la generalización del patrón, haciendo claridad de la cantidad de cubos a sumar en la figura 6, 7 y 8, y que por

tanto, se considera aplicable a todos los términos dados y no dados; sin embargo, aún no hace evidente un patrón de generalización.

Durante esa misma sesión, Valentina junto a Jonathan quieren hacer la cuenta bajo sus hipótesis de cuantos cubos habría para la figura 15, sin embargo, por cuestiones de lenguaje ambos se ven confrontados, sin darse cuenta que están haciendo referencia a la misma idea, a partir de ahí, sale una deducción analítica que da forma a la formula corpórea realizada en el fragmento 5:

**L30. Valentina:** Los que se ven [*encerrando en un círculo todos los cubos*] o sea todos los que se ven por encima son 45, de acá desde arriba los sostiene 8 [*desliza el lápiz por la altura de la pirámide*] o sea son 53.

**L31. Jonathan:** Es más o menos la misma mía pero por yo inicié por la parte de abajo [*señala la base de la pirámide*].

**L32. Valentina:** Yo por la parte de abajo no la entiendo, porque por la parte de abajo, estamos contando los de atrás, los que sostienen, pero o sea yo, ¿cuáles son los que sostienen para ir contándolos?, acá cogemos cada uno de los que se están sosteniendo [*señala de arriba abajo*], están sumando pues ya se toman.

**L33. Asistente Patricia:** O sea tú la hiciste de arriba pa[ra] abajo y él de abajo pa[ra] arriba.

**L34. Valentina:** Si pero él contó detrás de las filas, yo conté los que están sosteniendo.

**Asistente Patricia:** Bueno continúa.

**L35. Valentina:** Bueno éste los sostienen 8 serían 53 [*señala la altura de la pirámide con la mano derecha, al mismo tiempo con la mano izquierda lleva el orden de los datos que ha tomado anteriormente*], estos dos los sostienen 7 [*señala la altura del segundo piso*], y son 14, son 67, estos 3 los sostienen 6 [*señala la altura del tercer piso*], serían 18 van 85, estos 4 [*señala el cuarto piso*] los sostienen 5, van 20 serían 105, estos 5 [*señala el quinto piso*] los sostienen 4 van 20 y serían 125, estos 6 [*señala el sexto piso*] los sostienen 4 (...) Eh 24 van 143, estos 7 [*señala el séptimo piso*] los sostienen 2 y son 7, son 14 (...) Van 157 y estos y estos 2 de acá que

sostienen 1 [señala el octavo piso] y son 8 dan 165.

*Transcripción 4: Sesión 3 parte b grupo 5*



*Figura 22: Secuencia de señalamientos realizados por Valentina para sumar la cantidad de cubos para la figura 15. Principalmente L35. Reconstrucción del video.*

*Ver anexo 2*

Valentina se apoya nuevamente en la expresión “lo sostiene” (L35) al mismo tiempo que realiza señalamientos con su mano derecha frente a la fila o la altura que desea indicar, pero su significado cambia, ya que no hace referencia a las explicaciones de los cubos que no se ven, sino que lo utiliza para dar cuenta de la cantidad de cubos que se deben sumar.

A medida que ella va haciendo referencia a cada altura mediante el señalamiento con la mano derecha, con la mano izquierda lleva un orden de los datos que ha tomado, es decir, realiza una comparación biunívoca que puede ser asemejada a la idea intuitiva de tabla de valores, pues para cada altura tiene un valor específico.

Mediante un proceso de transformación de la abducción, Valentina genera hipótesis obtenida en L29 y empleada en L35, en este sentido, las acciones numéricas evidenciadas en gestos puntuales frente a figuras visibles, dadas a conocer mediante

el medio semiótico *conteo de lo oculto* pasa a un nuevo estrato o ladera, en la que las cifras se vuelven específicas y manipulables.

Para Valentina, esta hipótesis ya puede ser asociada a cualquier objeto genérico dentro del contexto de la secuencia; esto se ve apoyado en una forma corpórea, con una nueva connotación que se desarrolla en un campo contextual.

El nodo semiótico *conteo de lo oculto*, ha sido perfeccionado, y los gestos son selectivamente utilizados para indicar elementos necesarios de su formulación corpórea, es decir, para indicar únicamente el piso y la altura a la que Valentina está haciendo referencia, los ritmos están enfocados en la percepción de las cantidades y su relación con la suma que lleva.

En el quinto y último segmento de este dato, se observa el refinamiento del nodo semiótico *conteo de lo oculto*, brindado por la generalización de la forma corpórea generado por el grupo y explicada por Jonathan:

**L36. Jonathan:** Me dio 121 [encerrando en un círculo la pirámide] y yo lo hice como lo estaba haciendo Valentina [señala a su compañera que está sentada en el piso] pero de arriba hacia abajo [desplaza el lápiz de la punta a la base de su pirámide].

**L37. Profesora Carolina:** Explícame.

**L38. Jonathan:** O sea, multiplico, el número, multiplico según la cantidad de (...) de bloques que haya por la cantidad de pisos [indica con su dedo de la punta a la base de la pirámide], O sea acá hay 14 pisos, 14 pisos de ahí para abajo.

**L39. Profesora Carolina:** O sea por 14.

**L40. Sebastián:** O sea le suma el piso.

**L41. Jonathan:** No, o sea el de acá por 13, que es el piso [desliza el dedo de la punta a la base de la pirámide], y acá 3 por 12 y acá 4 por 11, 5 por 10 (...) [Con el lápiz en su mano derecha señala el piso que va a multiplicar y con su mano izquierda indica las alturas]

**L42. Profesora Carolina:** ¿Y estas haciendo toda la cuenta?, o sea ¿este de qué piso es? [*indicando una de las cifras escritas en la hoja*]

**L43. Jonathan:** Éste es el piso 4, el de (...).

**L44. Profesora Carolina:** ¿Qué piso es este? [*indicando una de las cifras escritas en la hoja*]

**L45. Jonathan:** No, éste es el de todo la figura [*encierra en un círculo la pirámide*].

**L46. Profesora Carolina:** ¿De todos los pisos?

**L47. Jonathan:** De lo que se ve.

**L48. Profesora Carolina:** Lo que está por delante, o sea además de multiplicar tienes que sumar lo que se ve por delante [*Jonathan asiente con la mirada*], y ¿Cómo haces si yo te digo digamos para la figura 100?

**L49. Jonathan:** Uy ahí sí (...)<sup>1</sup> Sería piso 1 por 99 [*Con el lápiz en su mano derecha señala el piso que va a multiplicar y con su mano izquierda indica las alturas*], piso 2 por 98, piso 3 por 94 [sic 97], el piso 4 por 97 [sic 96].

**L50. Juan Pablo:** Entonces multiplicar cada piso así, el otro por 99, por 98, por 97, por 95, por 94 hasta que llega a 1 [*sacude su cabeza cada vez que dice un número al mismo tiempo, Jonathan lo imita y armoniza la voz cada vez que hace referencia a la segunda cantidad a multiplicar*], es un poco difícil de hacer.

**L51. Profesora Carolina:** ¿Cómo hacemos entonces para hacerlo?

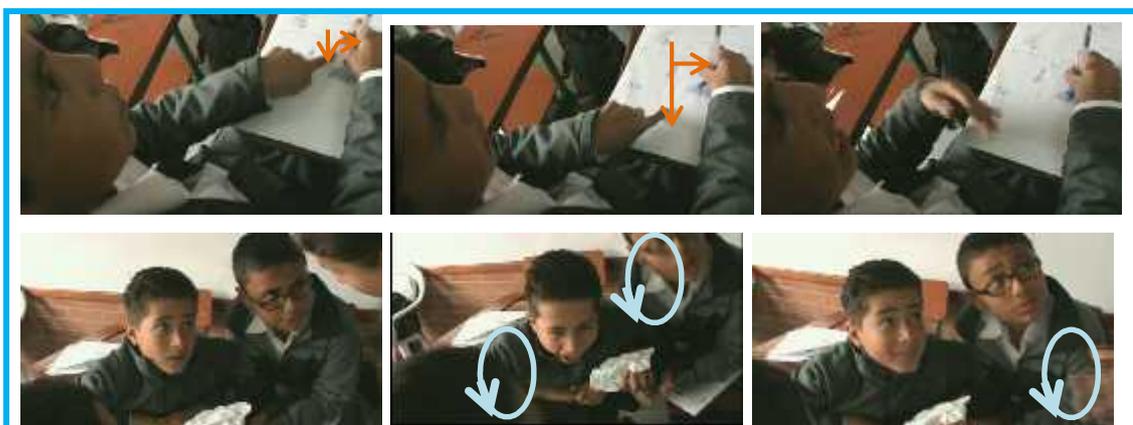
**L52. Juan Pablo:** Pues ahí sí, como me he estado dando cuenta hay una operación, hay una operación que debe dar el resultado, pero aquí el problema es cómo encontrar esa operación, si es división, multiplicación, suma o resta.

#### *Transcripción 5: Sesión 4 grupo 5*



*Figura 23: Secuencia de señalamientos realizados por Jonathan para sumar la cantidad de cubos para la figura 100. Principalmente en L38 a L41.*

*Reconstrucción del video. Ver anexo 3*



**Figura 24: Secuencia de señalamientos realizados por Jonathan y Juan Pablo para sumar la cantidad de cubos para la figura 100. Principalmente L49.**

***Reconstrucción del video. Ver anexo 4.***

Este proceso se dio gracias a una objetivación por medio de la iconicidad, evidenciado en L36, pues Jonathan toma las acciones realizadas por Valentina que contribuyen a pasar de una generalización factual a una contextual, en la que puede realizar la consolidación de su hipótesis y continuar con su forma de proceder. Del mismo modo, se hace visible la orquestación icónica de los gestos, principalmente los señalamientos, que toma y usa con intenciones propias.

Se evidencia pensamiento algebraico contextual por parte del grupo 3 a través de la formulación algebraica realizada por medio de la descripción del termino general; así mismo, los indexicales han sido sustituidos por términos descriptivos claves, por ejemplo cuando Jonathan usa la expresión “el número” (L38) para hacer alusión a la figura y su concordancia con la cantidad de pisos.

Los gestos, principalmente los señalamientos hacen alusión a cantidades específicas que tienen una posición dentro de la figura (L41) y que implican una operación realizar entre los números que obtiene, es decir, a la multiplicación de una cantidad correspondiente al piso con una de la altura, para posteriormente ser sumadas. Los ritmos inicialmente eran asociados al conteo de cubos, ahora se asocian al

seguimiento de una secuencia (L49 y L50) articulados con el movimiento de la cabeza de Jonathan y Juan Pablo, que dan cuenta del sentido de indeterminancia dentro de la generalización.

Para hacer un paralelo del estado inicial del nodo semiótico *conteo de lo oculto* frente a su estado de culminación, se toma la tabla 1 y se hace un análisis de su evolución en cada uno de los aspectos en la siguiente tabla (Tabla 5):

Medios semióticos	Descripción Inicial	Descripción final
Gestos	Realiza señalamientos con sus dedos al nombrar cada uno de los cubos que cuenta, indica su posición en la figura.	Realiza señalamientos para hacer referencia a las cantidades que va a operar de acuerdo a la hipótesis planteada.
	Realiza un desplazamiento con la mano cada vez que se refiere a “ <i>la escala</i> ” es decir, al piso que le va a agregar.	Realiza desplazamientos para hacer referencia al piso o a la altura que va a operar.
	Nombra elementos acompañados de señalamiento (gestos indexicales)s en frases como “Otro que sostiene a <i>éste</i> ”, “los de <i>acá</i> arriba, más la escala que le sumamos”	Los gestos indexicales se vuelven refinados al ser usados como términos descriptivos claves para la hipótesis.
Ritmos	La concordancia entre su tono de voz para hacerlo similar cada vez que hace referencia a los cubos o la escala que va a sumar.	Se evidencia en términos de la generalización de la secuencia al resaltar los factores de la multiplicación y realizar movimientos con intención de repetición para evidenciar la

**Tabla 5: Contraste en la evolución del nodo semiótico conteo de lo oculto**

En un sentido más amplio, la actividad perceptual realizada por el grupo 3 frente a las formulas expresadas a través de acciones que se despliegan en el espacio en el espacio y el tiempo, fue refinada hacia formas más sofisticadas, lo que permitió una transición entre un tipo de pensamiento algebraico factual hacia uno contextual, a través de un proceso de contracción semiótica evidenciado en la evolución del nodo semiótico *conteo de lo oculto*.

**Dato 2: la actividad de Julián.** El segundo dato se centra en la labor realizada por el grupo número 4, del cual se toma como punto de referencia el proceso de Sergio y Julián frente a la tarea 1 durante las sesiones 1, 2 y 5.

El primer segmento se centra en la explicación que da Julián para obtener cantidad de cubos en la figura 4, en la que se realizan acciones en las particularidades de las figuras, para poder extraer alguna comunalidad.

**L1. Sergio:** Entonces esta tiene que ser cortica.

**L2. Julián:** La tercera tiene nueve, y a esta (...) vea (...) vea.

**L3. Sebastián C:** Tiene 16.

**L4. Julián:** Si tiene 16...

**L5. Miguel:** Tiene 16

**L5. Sebastián C:** ¿Sabe por qué? es que mire aquí dice en el problema

**L7. Julián:** Mire, aquí hay uno [indicando con la regla la figura 1], a éste se le suman dos [indicando con la regla la figura 2, aumenta en tono en la palabra éste], perdón, a éste se le suman tres, entonces a éste se le tiene que sumar, como digamos vea [señala la línea diagonal derecha externa de cubos de la figura 3 aumenta el tono en la palabra éste] como si esto no existiera, si ve que se parece a esta [Tapa con su mano la línea diagonal derecha externa de cubos mientras hace énfasis con su

voz], o sea esta [indica rápidamente la figura 2] aquí [indica la parte de la figura 3 en la que se ve la figura 2], y nos toca, toca sumarle los que le hacen falta, sería como [gesticula lo que aparentemente es la suma que está haciendo mientras mueve en círculos su mano en el aire]

**L8. Sebastián C:** Como 16.

**L9. Julián:** Como 16.

**L10. Miguel:** Si, ya entendí el problema.

*Transcripción 6: Sesión 1 grupo 4*



*Figura 25: Secuencia de señalamientos realizados por Julián para obtener la cantidad de cubos en la figura 4. Principalmente L7. Reconstrucción del video. Ver anexo 5*

Julián está expresando la particularidad que observa entre las figuras a través de su actividad perceptual por medio de gestos que le ayudan a visualizar lo que quiere mostrar. Es el caso de tapar la diagonal derecha externa con sus manos, lo que a su vez es acompañado de la expresión “como si esto no existiera” (L7), una coordinación que le permite dar cuenta de una regularidad de la figura 3 con respecto a la figura 2, consolidada con la expresión “se parece a esta”.

La coordinación de estos medios consolida un nodo semiótico que se denominara “*tapar para comparar*” y que será sujeto de análisis desde una perspectiva multimodal del pensamiento, pues no se puede ver de forma aislada los señalamientos hechos con las manos y las palabras expresadas por el estudiante en tonos que

enfatan sus acciones. Dichos medios se pueden observar en la siguiente Tabla (Tabla 6):

Medios semióticos	En el ejemplo	Descripción
Gestos		Recubre la parte de la figura que le permite visualizar la figura anterior dentro de esta
		Compara la parte que observo con su similar en la figura anterior a través de señalamientos
Expresiones	“como si esto no existiera”, “se parece a esta”	Ve la necesidad de acompañar sus indicaciones con expresiones que le permiten dar cuenta de lo que está observando.
Ritmos	Aumenta el tono en la palabra “éste” y en “se parece a esta”.	El énfasis que hace sobre la similitud que encuentra entre una figura y la anterior.

**Tabla 6: Medios semióticos encontrados principalmente en L7**

La actividad perceptual de Julián se centró en las similitudes que existían entre una figura y la anterior, expresado a través de expresiones como “se parece a esta” (L7), que acompaña con el señalamiento de la figura anterior sobre la figura que está trabajando, de esto, intenta obtener una particularidad, que fue dada por el señalamiento de la línea diagonal de cubos que previamente había cubierto con su mano.

Esta labor sobre las figuras dadas, le permite realizar intuitivamente una acción numérica que dé cuenta de cuántos cubos hay en la figura 4, lo cual se ve complementado por sus compañeros quienes sugieren que el resultado es 16 (L8 y L9).

Hasta el momento, solo se han realizado acciones de conteo sobre cantidades específicas, desde las cuales se dio cuenta de una particularidad visual, sin embargo no se ha evidenciado pensamiento algebraico de tipo factual. En el segmento 2 se observa cómo el nodo semiótico “*tapar para comparar*” se convierte en una herramienta que le permite a Sergio y a Julián notar una particularidad a partir de un proceso de orquestación icónica.

**L11. Julián:** Bueno, pues aquí yo tengo mi pensado, pues lo que es altura y base [*indica la base y la altura en una figura creada por él mismo*] entonces tenía pensado los nueve de acá, eh, acá sumar los dos ochos, los dos sietes, los dos seis y así [*señala las alturas que quiere sumar*], entonces como, como, como el grafico pareciera que estuviera en dos dimensiones [*cambia de figura a la proporcionada en la tarea*] entonces yo creo que es las de al frente, las que se ven a simple vista [*señalando con la mano toda la superficie*] y las que están atrás [*haciendo un salto con la mano y desplazándola nuevamente*], entonces a mi cuando yo sumé eso me dio 122, bueno, tenía pensado, que como 61 son los que se ven en la figura 9, hay que multiplicarlo por dos para que sea la de atrás, entonces eso es lo que yo pienso.

**L12. Asistente Patricia:** o sea que tú ya le sacaste fórmula para sacar todos los, cuántos hay.

**L13. Andrés:** Formula que ni siquiera existe.

**L14. Asistente Patricia:** Pero no, no porque es la fórmula para calcularlos. ¿Y tú qué? ¿Qué hiciste tú ahí?

**L15. Sergio:** Pues lo mismo de las otras teorías, pues algo así, cortando así los (...) [*cubre con sus manos parte de la figura*] porque, pues le borramos éste [*tapa con su mano izquierda parte de la figura que le permite visualizar únicamente una pirámide*]

*similar a la figura 4] y acá hay 20 [ubica con el lápiz la pirámide y un valor que previamente había escrito], como vimos en la cuarta, le sumamos otra [descubre una línea diagonal de cubos], y 21, 22, 23, 24, 25 [ubica cada cubo que va sumando] 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 [señalando los correspondientes a la anterior diagonal] en la figura 5 es igual a 35, [señala un valor previamente escrito] y así sucesivamente con los otros [indica con el lápiz en su mano derecha las diagonales siguientes mientras va destapando la imagen con la mano izquierda].*

**L16. Julián:** ¡Ah!

**L17. Asistente Patricia:** ¿O sea hay fracciones de números?

**L18. Julián:** *Puede ser así, como en la figura 4, dos cuatro y dos cuatro [indica la base y la diagonal de una pirámide implícita], entonces se le ponen así, solo que se le cambia de forma [realiza señalamientos iguales al inicial pero en diversas posiciones sobre la figura dibujada], entonces sería 20, 40, 80 [sic 60], y 100 [sic 80] [indica cada una de las pirámides formadas aumentando el tono de vez al señalar cada una de ellas], porque como esto tiene 20 entonces se organiza igual, sino que de diferente manera [raya con su esfero cada una de las pirámides formadas], en vez de que digamos, o sea sí, normal, la punta es hacia abajo, entonces como para (...) como para no volver a contarlos, de las que ya tenemos hechas, entonces solo cuadrarla así, como por ejemplo esta [sobrepone la figura 4 en la figura que están trabajando], esta esta, esta va a ser la figura así, y le pone este encima y después se va cambiando la forma para que vaya quedando eh (...) el 19, o eso es lo que creo.*

**Transcripción 7: Sesión 2 grupo 4**



***Figura 26: Secuencia de señalamientos realizados por Sergio y Julián mediante la cual dan cuenta de la cantidad de cubos en la figura 9 Principalmente L49.***

***Reconstrucción del video. Ver anexos 6 y 7***

En este segmento, Sergio ha hecho presente su proceso a través del nodo semiótico “*tapar para comparar*” dejando ver la imagen correspondiente a la figura 4 a través de la expresión “*le borramos éste*” (L15) que sugiere mientras tapa el resto de la pirámide.

A partir de ahí, inició el conteo de los cubos correspondientes a la siguiente figura, haciendo desplazamientos e indicando los cubos que cuenta con su mano derecha, sobre la diagonal que descubrió con su mano izquierda; de esto, se obtiene una particularidad en específico, la cual se asocia a la suma de la diagonal que se añade en la figura siguiente.

Notar una comunalidad a partir de acciones numéricas a través de gestos, en este caso señalamientos, indica una forma de pensamiento algebraico factual, al realizar acciones específicas sobre la imagen y con cantidades establecidas que lo llevan a dirigirse hacia una indeterminancia (“*y así sucesivamente*” (L15)) que se vuelve objeto del discurso.

Sin embargo, Julián logra hallar una particularidad frente al dibujo realizado por Sergio, haciendo una relación entre la figura 4, que poseía 20 cubos, y la figura 9, donde, al hacer la superposición, se podían obtener 4 veces la figura 4 y una vez más, pero al revés, señalando con la punta del esfero cada una de las pirámides que encontró con el propósito de “no volver a contarlos” (L18)

Este proceso que realizó Julián confiere una orquestación icónica de las intenciones que inicialmente tenía Sergio frente al sentido del nodo semiótico “*tapar para comparar*” para orientar sus acciones hacia una nueva particularidad, que lo llevo a realizar un proceso de contracción que se describe en el siguiente segmento:

**L19. Julián:** Eh bueno, es la teoría de él, sino que yo la estoy aquí como sacando para que sea la que sea. Bueno, la teoría dice que para, bueno digamos acá que, para 7, de diferencia van a haber 15 [*indica lo que parece una tabla intuitiva que ha elaborado*], pero cada vez se le tiene que sumar el número, el número de la figura que queremos encontrar, o sea en este 15.

**L20. Sergio:** No comenzamos desde 20 sino que comenzamos desde 4 para que dé.

**L21. Profesora Carolina:** Listo.

**L22. Julián:** 15 de diferencia, o sea va a dar 35, o sea para hallar la 6, a esos 15 le sumamos 6, nos da 21 entonces, al sumarle a 35 y 16 da 56, entonces la fórmula [*Aumenta el tono de la voz*] sería, un número [*señala una x escrita al lado derecho*], depende esto [*indica los valores que corresponden al número de la figura en la primera columna*] más el número que queremos encontrar, o sea sumar este, el número de acá [*señala las diferencias encontradas entre una cantidad de cubos y la siguiente*], con el número de acá [*indica los valores que corresponden al número de la figura*], entonces (...)

**L23. Profesora Carolina:** Este es el número de la figura, ¿no?, [*indicando la primera columna*]

**L24. Julián:** De la figura [*Asintiendo con la cabeza*], de la figura, y este es el número de, si, de la anterior, entonces acá para llegar al 84, nosotros a ese anterior, sumarle los siete del número de la figura, entonces 28, 56 más 28 nos da 84, ya voy en la once

[realiza un vaivén de señalamientos entre la primera y la segunda columna de datos],  
por ejemplo si aquí nos dice son 200 (...)

**L25. Profesora Carolina:** Y digamos, tú ya tienes claro un proceso, y tú estabas intentando ponerlo en estas palabras [encierra en un círculo la inscripción  $x+x$  realizada por Julián], ¿Qué son esas palabras? O sea ¿cómo estarías entonces expresándome de esta forma?

**L26. Julián:** Entonces sería, esta  $x$  [señalando la primera  $x$  de los sumandos]

**L27. Profesora Carolina:** ¿Esta  $x$  qué sería?

**L28. Julián:** Sería el número cualquiera que me piden de la figura, y [señalando la segunda  $x$  de los sumandos y aumentando en tono de su voz] esta  $x$  sería, sería como... como...

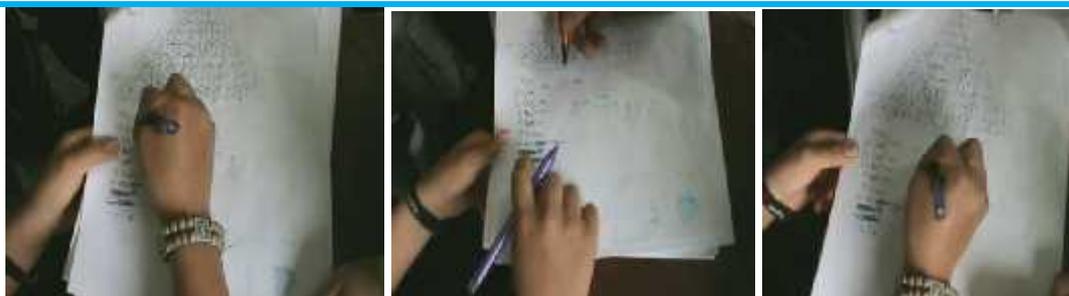
**L29. Profesora Carolina:** Pero entonces esta  $x$  es distinta a esta  $x$  [señala cada una de las partes de la inscripción  $x+x$  realizada por Julián]

**L30. Julián:** Si.

**L31. Profesora Carolina:** De eso hay que hacer claridad, porque de pronto nos confundimos y a esta  $x$  [señalando la primera  $x$  de los sumandos] le ponemos es este valor [señalando la segunda  $x$  de los sumandos], sí, tenemos que encontrar una forma de diferenciarlos, puede ser con otra letra, puede ser que pongas una palabra.

**L32. Julián:** ¡Ah! Como a o b o c.

#### Transcripción 8: Sesión 5 grupo 4



**Figura 27:** Secuencia de señalamientos realizados por Julián para explicar su generalización. Reconstrucción del video. Ver anexo 6.

Las actividades contextuales realizadas mediante el nodo semiótico “*tapar para comparar*” por Sergio y Julián, dieron pie para hacer un análisis sobre las diferencias de las cantidades de cubos encontradas entre una figura y otra, lo que los llevó a diseñar una tabla de valores (L19), en la que, por un lado expresan el número de la figura, y por otro la cantidad de cubos en ella; en una tercera línea, escriben la diferencia que hay entre una cantidad y otra, mediante la cual quieren llegar a una generalidad.

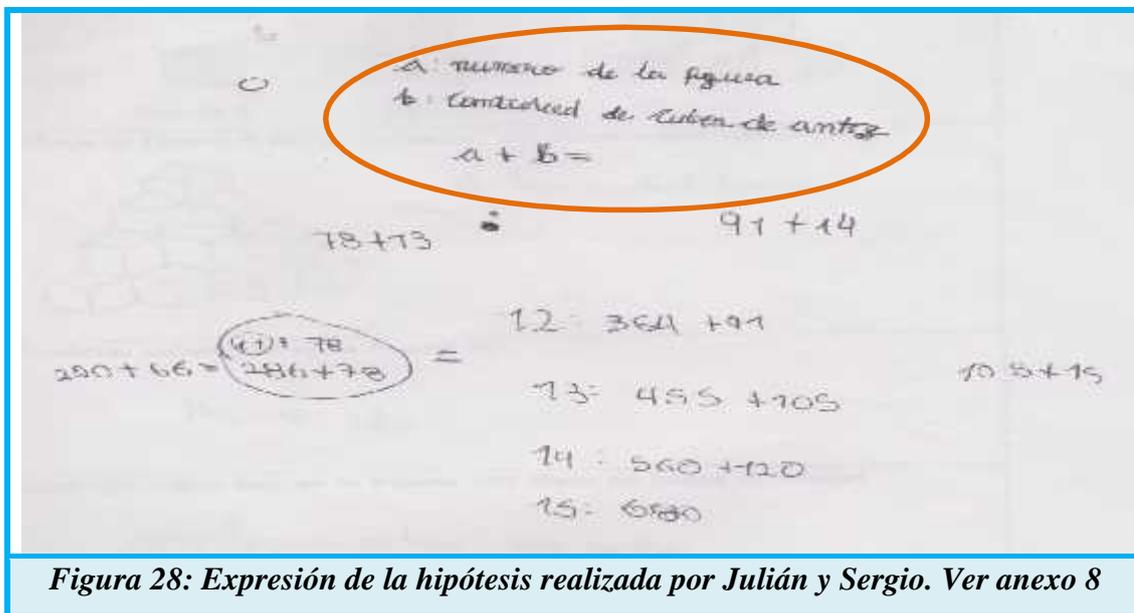
La hipótesis generada en L19 en relación con el número de la figura que se quiere encontrar se ve complementada en L22, donde Julián hace énfasis específico en “la fórmula”, que está en dependencia con el número de la figura, lo cual indica al señalar dicha columna y que además debe tener en cuenta el número de la figura anterior.

En este punto ya se ha logrado una transformación de la abducción obtenida a partir del medio semiótico “*tapar para comparar*” y la ha convertido en una expresión que permite ver una relación algebraica enmarcada en el contexto de la labor de los estudiantes, al observarse la necesidad de conocer una figura previa para poder generar la siguiente (L24), y al tener en cuenta una dependencia con el número de posición de la misma, lo cual evidencia mediante un vaivén de señalamientos.

Además se acentúa el peso de la indeterminancia que en el dato anterior estaba dada por “así sucesivamente” (L15), a partir de la necesidad de expresar en términos alfanuméricos en este dato, asociado a la expresión “un número cualquiera” (L28) junto a la relación de dependencia que se lee en “*que me piden de la figura*” (L28).

El ciclo de señalamientos y expresiones lo cierra la profesora al querer que su estudiante caracterice y diferencie cada una de las  $x$  que componen la expresión alfanumérica propuesta por Julián. Por dificultades asociadas al proceso de recolección de la información, no se pudo registrar en video las actuaciones de Sergio

y Julián que los llevaron al refinamiento de la expresión. Sin embargo, al finalizar la sesión y obtener las hojas de trabajo, se observó que la expresión quedó escrita así:



**Figura 28: Expresión de la hipótesis realizada por Julián y Sergio. Ver anexo 8**

En este sentido, el nodo semiótico “*tapar para comparar*” sufrió refinamientos significativos que llevaron a los estudiantes a alcanzar una sobriedad en su forma de pensar con una concentración de significados en un menor número de gestos a través de la cual expresaron la generalización. Para ver su comparación del estado inicial al final, se presenta la Tabla 7:

Medios semióticos	Descripción inicial	Descripción final
Gestos	Recubre la parte de la figura que le permite visualizar la figura anterior dentro de esta	Los recubrimientos se ven relegados pues la acción se realiza sobre números más no sobre la imagen.
	Compara la parte que observo con su similar en la figura anterior a través de señalamientos.	Los señalamientos se realizan sobre la tabla de valores para indicar la relación con la expresión alfanumérica
Expresiones	Ve la necesidad de	Dice expresiones que dan

	acompañar sus indicaciones con expresiones que le permiten dar cuenta de lo que está observando.	muestra clara de la indeterminancia, además de mostrar formas de pensamiento algebraico.
Ritmos	El énfasis que hace sobre la similitud que encuentra entre una figura y la anterior.	Destaca los vínculos entre los números en cuanto a posición, cantidad y diferencia en relación a la fórmula que desea plantear.
<b><i>Tabla 7: Contraste en la evolución del nodo semiótico tapar para comparar</i></b>		

El nodo semiótico “*tapar para comparar*” que inicialmente se enfocaba en el trabajo con las figuras y mostraba una forma de conteo característico de un pensamiento algebraico factual, desembocó en expresiones que dan cuenta de una forma de pensamiento algebraico contextual, en el que las expresiones y los señalamientos usados evolucionaron de una imagen a un simbolismo alfanumérico.

La generalización no se caracteriza como simbólica pues el planteamiento algebraico no se consolidó ni se comprobó para los términos de la secuencia; del mismo modo, el significado que poseía para los estudiantes dicha expresión no pudo ser registrado en video ni indagado posteriormente.

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Introducción

Este capítulo presenta la respuesta a la pregunta de investigación articulada a partir de los objetivos, en este sentido, se resalta la constitución de los nodos semióticos y su evolución mediante la contracción semiótica; luego, se presenta una síntesis del trabajo junto a observaciones generales de todo el proceso, pues se considera importante hacer una mirada global al trabajo teórico y metodológico realizado. Por último, se realiza reflexiones y apuntes personales en torno a dificultades y otros elementos para considerar en investigaciones futuras.

### 5.2. Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación planteada fue *¿Qué medios semióticos de objetivación emergen y cómo evolucionan en la actividad matemática de los estudiantes de sexto grado cuando abordan tareas sobre generalización de patrones?*

Para dar cuenta de la emergencia de medios semióticos en la actividad matemática, se rediseñó una tarea sobre generalización de patrones figurales motivada por los criterios teóricos de la investigación, es decir, que incentivara a una movilización de recursos semióticos a partir de la interacción social. La selección de esta actividad fue justificada en el apartado 3.3, y conllevó a un estudio juicioso de la teoría cultural de la objetivación.

Una característica que inicialmente se consideró añadía dificultad a la tarea, fue la elaboración de los dibujos de la secuencia, por lo cual, se preveía que los estudiantes incursionarían prontamente en otros tipos de representación; sin embargo, la

realización de los dibujos se llevó a cabo inclusive en figuras como la 15, donde se solicitaba que no se hiciese el dibujo. Esto no se consideró un obstáculo para la investigación, pues contribuyó a la movilización de recursos.

La tarea se implementó en un ambiente que se acogía a los criterios propuestos en la teoría cultural de la objetivación, donde la interacción social tiene un papel preponderante, en la que se hace presente la característica histórica y cultural de los sujetos y del objeto matemático, lo que a su vez facilita los espacios para realizar una labor conjunta entre los miembros de la comunidad.

Las comunidades fueron libremente establecidas en una población que se caracterizaba por tener compromiso frente a la tarea planteada y a su grupo de trabajo, por tanto la interacción fue más allá de la negociación de significados, generando espacios de reflexión conjunta sin temor al fracaso o al rechazo.

Los medios semióticos que emergieron durante la actividad matemática se vieron condensados en dos nodos semióticos analizados en el apartado 4.3. El primero, denominado “*conteo de lo oculto*”, lleva implícito recursos como los gestos, evidenciados en señalamientos con los dedos al indicar las cantidades que estaban contando, y al realizar desplazamientos para mostrar la particularidad que encuentra entre una figura y otra. Esto fue complementado con gestos indexicales que fueron evocados a partir de la necesidad de nombrar los elementos que requieren ser señalados, y ritmos para hacer visible el foco de atención que tenía la intención de resaltar.

Para registrar su evolución se dio cuenta de 5 segmentos específicos donde se registraba la actividad en la que se involucrara dicho nodo, obtenidos de las sesiones 2, 3 y 4 de la investigación, allí se mostraba cómo los señalamientos cambiaron de indicativos sobre la figura a realizarse sobre cantidades concretas, para lo cual los desplazamientos sirvieron como punto de referencia, esto se apoyó en gestos

indexicales que se vuelven términos descriptivos clave para la comprobación de la hipótesis, a la que los ritmos le dan el sentido de indeterminancia.

Es de resaltar que el nodo semiótico “*conteo de lo oculto*” se centra en las fórmulas corpóreas provenientes de actividad perceptual, las cuales fueron refinadas hacia formas más sofisticadas, lo que permitió una evolución desde un tipo de pensamiento algebraico factual hacia uno contextual. En este sentido, los análisis realizados sugieren un refinamiento de recursos semióticos y en consecuencia una concentración del significado en relación con la manera de abordar la tarea desde un punto de vista algebraico, esto es, hay un despliegue de un proceso de contracción semiótica.

El segundo nodo semiótico sensible de análisis se denominó “*tapar para comparar*” lleva implícito recursos como gestos, usados para recubrir y hacer visible una particularidad a través de señalamientos; expresiones con intenciones propias, que le permiten a los estudiantes acompañar los gestos; y ritmos con los que hace énfasis de las similitudes encontradas entre una figura y su anterior.

Su evolución quedó registrada en tres segmentos de las sesiones 1, 2 y 5 de la investigación, cuya evolución fue significativa en términos de los registros empleados, ya que los recubrimientos se ven relegados y la acción se termina realizando sobre los números, mas no sobre las imágenes, por tanto, los señalamientos se hacen sobre la tabla de valores para indicar una relación con una expresión alfanumérica intuitiva.

Las expresiones verbales dan cuenta de una indeterminancia y de las relaciones de dependencia entre los valores encontrados en el transcurso de la actividad, por lo que los ritmos destacan los vínculos entre los números en cuanto a la posición de la figura, la cantidad de cubos y la diferencia entre los valores encontrados.

El nodo semiótico “*tapar para comparar*” que inicialmente se enfocaba en la acción sobre las figuras y se centraba en las particularidades mediante las cuales se podía

contar, propias de un pensamiento algebraico de tipo factual, desembocó en expresiones que dan cuenta de una forma de pensamiento algebraico contextual, en el que las expresiones y los señalamientos usados evolucionaron de una imagen a un simbolismo alfanumérico que tiene sentido solo en el contexto del grupo.

En este caso, el contexto es clave en la actividad, pues por ejemplo cuando Julián semiotiza  $a+b$ ,  $a$  representa el número de la figura y  $b$  hace referencia a la cantidad de cubos de la figura anterior; esto coincide con la idea de Vigotsky (1989, citado en Vergel, 2014a) según la cual se piensa a través de los signos, resultados similares a los encontrados en el trabajo doctoral de Vergel (2014).

En este sentido, se identificó los medios semióticos de objetivación presentes en dos nodos semióticos, a partir de los que se analizó su evolución durante la actividad matemática con tareas sobre generalización de patrones, que realizaron dos grupos de estudiantes de grado sexto.

## **5.2. Síntesis y observaciones**

La reciente aceptación en Colombia del conocimiento como resultado de una actividad social y de una evolución histórica, abre las puertas a la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje a partir de la evolución de los medios semióticos emergentes en la actividad matemática; en este sentido, algunos gestos, señalamientos, escritos o tonos de voz, entre otros, empleados por los estudiantes reflejan una toma sensible y progresiva de conciencia que desemboca en un refinamiento hacia formas de comunicación más sofisticadas.

Para indagar qué medios semióticos de objetivación emergen y cómo evolucionan en la actividad matemática, se estudió particularmente el proceso de generalización de patrones figurales que desarrollan un grupo de estudiantes de grado sexto cuando hacen sus primeros contactos en este campo, centrando el análisis la descripción de la

evolución de los medios semióticos de objetivación, específicamente del proceso de contracción semiótica.

Para desarrollar la investigación se tuvo en cuenta 4 fases, la primera consistió en el rediseño de tareas bajo la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación. Para esto, se realizó un pilotaje de 11 tareas enfocadas en observar los recursos semióticos que movilizaron los estudiantes, por tanto, la tarea tenía como propósito provocar la emergencia de medios semióticos de objetivación durante el desarrollo de la actividad matemática. De estas, se seleccionó una que se consideró incentivaba a la movilización masiva de recursos semióticos, y permitía la interacción entre los estudiantes y el docente.

La segunda fase fue la implementación de la tarea obtenida del pilotaje, se aplicó durante nueve sesiones cada una de 70 minutos, de una clase de matemáticas de grado sexto del Colegio Claretiano De Bosa en Bogotá. La selección de los dos grupos focales se dio a partir del interés y el compromiso evidenciado por los estudiantes hacia la actividad; del mismo modo se pusieron en juego las consideraciones teóricas y metodológicas ajustadas a las necesidades de la investigación.

Para la recolección de la información se tomó en cuenta 4 etapas: la grabación de la actividad mediante una videocámara manejada por una asistente de investigación; la obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante; la transcripción de los segmentos que constituirían los datos y el análisis de videos desde una perspectiva multimodal

En la tercera fase correspondiente a la interpretación de los datos, se tomó como unidad de análisis los medios semióticos de objetivación que movilizaron los estudiantes y que evidenciaron el proceso de objetivación a partir de la conformación de nodos semióticos; de ahí, se realizó un análisis multimodal mediante el cual observó su evolución. La constitución de cada dato se dio a partir de la selección de episodios.

La cuarta fase hace referencia a la descripción de cada uno de los datos para luego realizar el análisis comparativo y el contraste teórico, para esto, se contó con dos ejes temáticos que articulaban la propuesta de investigación.

El primer eje temático, fue el relacionado con la teoría cultural de la objetivación, donde la actividad mental es considerada como una reflexión con el mundo mediatizada a través de artefactos, de acuerdo a la labor de los individuos; enmarcados en significados culturales que actúan como enlaces entre la conciencia individual y la realidad subjetiva. Se prestó atención a la evolución del pensamiento algebraico contextual, particularmente, sobre la evolución de las fórmulas corpóreas hacia formas más sofisticadas, asociadas al proceso de contracción semiótica.

El segundo eje temático fue la generalización como parte del pensamiento algebraico, donde la verbalización, los gestos, movimientos, señalamientos e incluso los tonos de voz evidencian formas de pensamiento que tienen intenciones frente a una labor, principalmente, las formulas corpóreas.

Desde esto, se observó la conformación de nodos semióticos que se vieron sujetos a la toma de decisiones de los estudiantes entre lo que consideraron relevante y lo que no, lo cual significó que compensaran la reducción de los recursos con una concentración de significados, es decir, realizaron una contracción semiótica, de primer tipo, donde las declaraciones tienen menos y mejor articuladas las palabras, junto con gestos más precisos.

Las generalizaciones presentadas fueron presimbólicas, viendo el paso de factuales, realizadas por medio de acciones numéricas a través de gestos y lenguaje con intenciones propias, actividades perceptuales y sensoriales; a contextuales, que va más allá de cifras específicas generadas para tratar con objetos genéricos del contexto de la secuencia, principalmente a través de fórmulas corpóreas.

Del primer dato se resaltó la actividad perceptual realizada por el grupo 3 frente a las formulas expresadas a través de acciones que se despliegan en el espacio y el tiempo, que fueron refinada hacia formas más sofisticadas, lo que permitió una transición entre un tipo de pensamiento algebraico factual hacia uno contextual, a través de un proceso de contracción semiótica evidenciado en la evolución del nodo semiótico “*conteo de lo oculto*”.

En el segundo dato, el nodo semiótico “*tapar para comparar*” que inicialmente se enfocaba en el trabajo con las figuras y era de conteo típico de un pensamiento algebraico factual, desembocó en expresiones que dan cuenta de una forma de pensamiento algebraico contextual, en el que las expresiones y los señalamientos usados evolucionaron de una imagen a un simbolismo alfanumérico.

Es motivo para otras investigaciones indagar específicamente sobre la necesidad y el contraste de las tareas en el proceso de investigación bajo la teoría cultural de la objetivación, del mismo modo pertinencia de aplicar solo una o varias para el proceso de enseñanza-aprendizaje y para la recolección de la información, pues en esta investigación, en seis de las nueve sesiones se trabajó sobre una sola tarea, y de ahí se obtuvo resultados.

Otro fenómeno importante para observar es el proceso de contracción semiótica que parte de laderas presimbólicas, es decir, de generalizaciones factuales y contextuales, a simbólicas, que llevan explícitas generalizaciones en lenguajes alfanuméricos, y que en este trabajo se tocó por encima, pero no se profundizó debido a dificultades con el proceso de recolección de información.

Desde una mirada intuitiva y no mostrado en este documento, es motivo de inquietud la conformación de nodos semióticos sociales y su respectiva evolución, desdeñando de ellos procesos de objetivación como iconicidad y contracción semiótica, adjunto, se prevé que el diseño de tareas que conlleven a dar cuenta de este tipo de actividad

deben ser rigurosamente piloteadas, ya que lo que se quiere observar es bastante específico y no en todos los casos emerge, como en esta investigación.

### **5.3. Reflexiones y apuntes**

En este apartado se pretende condensar las principales dificultades que surgieron en torno a cada una de las fases de este proyecto de investigación, que propician un espacio de reflexión frente a situaciones particulares que se presentaron.

Es muy importante tener claras y apropiadas desde el comienzo las perspectivas teóricas a utilizar, y su viabilidad y alcance al investigador, pues, para el caso de la teoría cultural de la objetivación, los posicionamientos teóricos en cuanto a las ideas de saber, enseñanza-aprendizaje y labor entre muchos otros constructos, son definidas, y pueden entrar en contrariedad con las concepciones personales que se tengan al respecto.

Del mismo modo, el acceso a la información puede verse limitada por el alcance a la misma, incluida muchas veces la barrera del idioma que aunque puede ser fácil de superar, es uno de los principales aspectos que baja la moral del investigador frente a la investigación.

Es muy necesario tener en cuenta desde el comienzo la población con la que se pretende trabajar, y en la medida de lo posible, tener el lugar en el cual se va a llevar a cabo, pues factores como estos pueden ser determinantes para diseñar la pregunta de investigación y por tanto, desarrollar todo el proceso; del mismo modo, contemplar de antemano quienes participaran específicamente de la toma de datos y qué papeles cumplirán, incluido por supuesto, el papel del investigador, que en esta investigación fue la misma persona que dirigió las sesiones de clase.

Considerar los elementos que se necesitan para la recolección de la información depende en gran medida del presupuesto que se tenga, pues la cantidad de cámaras .se

vio limitada a una, sin embargo, elementos de control externo como el sonido generado por los estudiantes del aula de clase, muchas veces impidieron que las grabaciones fueran totalmente claras, lo que dificultó la transcripción de las mismas.

Igualmente, se contó con un solo asistente de investigación, quien tenía un conocimiento nulo de la teoría aquí trabajada, por tanto, ciertos aspectos que pudieron ser de gran relevancia para la investigación, no fueron capturados, (como en el caso del dato 2), sin embargo no constituye una dificultad que no pueda ser superada por el investigador.

La saturación teórica es un estado natural que se da después de la recolección de la información, pues no se tiene únicamente los datos tomados (lo cual incluye video, audio y transcripciones) sino el marco teórico que constituye la lupa bajo la cual se va a analizar la información, todo esto bajo la guía de la pregunta y los objetivos de la investigación, sin embargo, sin el ánimo de caer en un estado subjetivo y positivista, se debe tener en cuenta qué es lo que se quiere, y conforme a esto, seleccionar lo que se ajuste a las necesidades mediante un proceso de depuración bajo un foco teórico amplio.

A manera personal, considero que es de suma importancia no solo mostrar los aciertos y resultados de las investigaciones, sino también las dificultades, desde el hecho logístico hasta el teórico, pues considero que es una parte fundamental dentro de la formación del investigador que muchas veces se deja de lado.

# Capítulo 6

## Aspectos Complementarios

### 6.1. Referencias bibliográficas

- Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcarate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S., Rivière, V., (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking*, 267-299.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: Radford, L., & D'Amore, B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número special della rivista Relime (Cinvestav, México D.F., México). 177-196
- Godino, J & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros> [2013, Julio 2]
- Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo*. Trabajo de grado no publicado para optar al título de master en docencia de la matemática, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá-Colombia.
- Lasprilla, A. (2012). *Medios semióticos de objetivación que emergen en estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales*. Trabajo de grado no publicado para optar al título de especialista en educación matemática Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia.

- Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.
- Miranda, I. (2009). *Objetivación de saberes científico-culturales relacionados con el movimiento lineal representado con gráficas cartesianas: una experiencia con estudiantes de bachillerato*. Tesis doctoral no publicada en Ciencias, Espacialidad en Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México D.F.-México.
- Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30.
- Pretexto Grupo (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Gaia.
- Radford, L. & Roth, W. (2010). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, Disponible en [http://www.luisradford.ca/pub/18\\_RadfordRoth\\_ESMSpecialIssue\\_v27\\_2ndSubm.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/18_RadfordRoth_ESMSpecialIssue_v27_2ndSubm.pdf) [2014, Abril 15]
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23 Disponible en [http://www.luisradford.ca/pub/84\\_learning\\_math\\_v22n1v2.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/84_learning_math_v22n1v2.pdf) [2014, Abril 15]
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning* 5(1), 37-70. Disponible en: [http://www.luisradford.ca/pub/79\\_gestures.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/79_gestures.pdf). [2013, Julio 2]
- Radford, L. (2005). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. En Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, 1(1), 143-145.

- Disponible en [http://www.luisradford.ca/pub/67\\_PME05RF.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/67_PME05RF.pdf) [2014, Abril 15]
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), 267-299.
- Radford, L., Bardini, C. & Sabena C., (2007) Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity, En *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 507–530 Disponible en [http://www.luisradford.ca/pub/47\\_JRME07.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/47_JRME07.pdf) [2014, Abril 15]
- Radford, L. (En prensa) De la teoría de la objetivación. En *Revista Latinoamericana de etnomatemática*.
- Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 40(1) 83-96. Disponible en: [http://www.luisradford.ca/pub/45\\_zdm\\_radford.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/45_zdm_radford.pdf) [2013, Julio 2]
- Radford, L. (2008b). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In Radford L., Schubring G., Seeger F. (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* 215-234. Rotterdam: Sense Publishers.
- Radford, L. (2009a). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 111 – 126. Disponible en: [http://www.luisradford.ca/pub/35\\_RadfordWhydogesturesmatter.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/35_RadfordWhydogesturesmatter.pdf) [2013, Julio 2]
- Radford, L. (2009b). “No! He starts walking backwards!”: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. En *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. Disponible en: [http://www.luisradford.ca/pub/33\\_ZDM2009Graphs.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/33_ZDM2009Graphs.pdf) [2013, Julio 2]
- Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA* 4(2), 37-62. Disponible en

- [http://www.luisradford.ca/pub/23\\_PNA2010Layersgenerality.pdf](http://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf) [2014, Abril 15]
- Radford, L. (2010b). Sings, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education* 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2013a) En torno a tres problemas de generalización, en Rico, L., Cañadas, M., Gutierrez, J., Molina, M., & Segovia, I., (Eds) *Investigación en didáctica de las matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro* España: Comares, 3-15
- Radford, L. (2013b) Cultura e historia: dos conceptos difíciles y controversiales en las aproximaciones contemporáneas en la educación matemática en Abreu M., & Farias C., (Eds.), *Cultura, Práticas Sociais e Educação Matemática*. São Paulo: Livraria da Física (2013) Disponible en <http://www.luisradford.ca/pub/Cultura%20Historia%20y%20Pensamiento%20Matematico.pdf> [2014, Abril 15]
- Radford, L. (2013c). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (1), 7-44. Disponible en <http://www.luisradford.ca/pub/2013%20REDIMAT%20-%203%20key%20concepts%20final%20version.pdf> [2014, Abril 15]
- Rojas & Vergel (2012). *Proceso de generalización y Pensamiento algebraico*, Curso taller, Especialización en Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia (Inédito).
- Socas, M. Camacho, M; Palarea & Hernández C. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid, Síntesis
- Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.
- Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). En *Revista Científica / edición especial*, Bogotá, Colombia, 234 - 240
- Vergel, R. (2014a). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis Doctoral Laureada, Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en

Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

Vergel, R. (2014b) El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios*, 39, 65-76.

Villanueva J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales*. Trabajo de grado no publicado para optar al título de master en docencia de la matemática, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá-Colombia.

## 6.2. Anexos

### GUÍA DE PILOTAJE

“La contracción semiótica como proceso de objetivación en el campo del pensamiento algebraico”

#### PILOTAJE DE LA TAREA

NOMBRE: \_\_\_\_\_

EDAD: \_\_\_\_\_

FECHA: \_\_\_\_\_

OBSERVACIONES AL INSTRUMENTO:

---

---

---

---

---

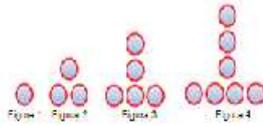
---

---

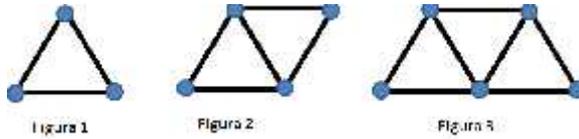
---

---

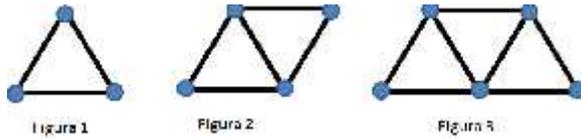
---



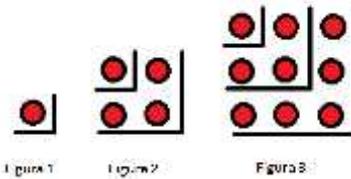
Dibuje la Figura 5 de la secuencia ¿Cuántos círculos hay en la Figura 9? ¿Cuántos círculos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.



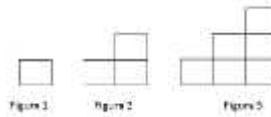
Dibuje la Figura 5 de la secuencia ¿Cuántos palillos hay en la Figura 9? ¿Cuántos palillos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de palillos para una Figura cualquiera.



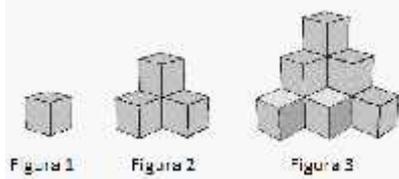
Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántas uniones hay en la Figura 9? ¿Cuántas uniones hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.



Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos círculos hay en la Figura 9? ¿Cuántos círculos hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de círculos para una Figura cualquiera.



Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 9? ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de cuadrados para una Figura cualquiera.



Dibuje la Figura 4 de la secuencia ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 9? ¿Cuántos cuadrados hay en la Figura 100? Explique un procedimiento para calcular el número de cuadrados para una Figura cualquiera.

**2, 4, 6, 8, 10, ...**

¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?

**1, 3, 5, 7, 9, ...**

¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?

**2, 5, 8, 11, 14, ...**

¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?

**2, 6, 10, 14, 18, 22, ...**

¿Qué número sigue? ¿Cuál es la regla que siguen? ¿Cómo se puede determinar el número que se obtiene después de haber realizado 100 veces el proceso?

## LAS TAREAS

### TAREA 1

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

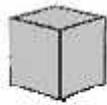


Figura 1

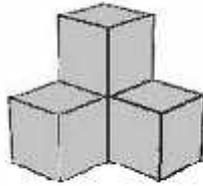


Figura 2

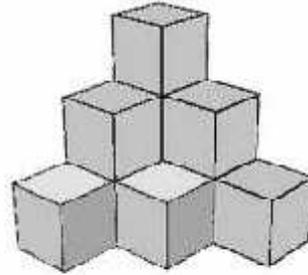


Figura 3

1 Dibuje la Figura 4 de la secuencia, ¿Cuántos cubos tiene?

2 ¿Cuántos cubos hay en la Figura 9?

3	<b>¿Cuántos cubos hay en la Figura 15? ¡Pero no hagas el dibujo!</b>
4	<b>¿Cómo hiciste para saber la cantidad de cubos en los dos casos anteriores?</b>
5	<b>¿Cómo harías para encontrar la cantidad de cubos en la figura 100?</b>

## TAREA 2

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

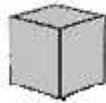


Figura 1

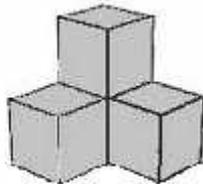


Figura 2

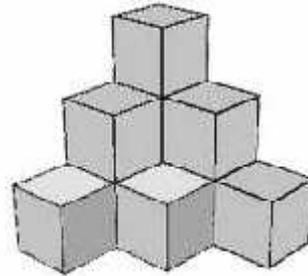


Figura 3

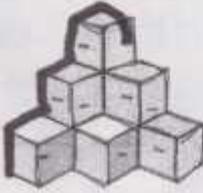
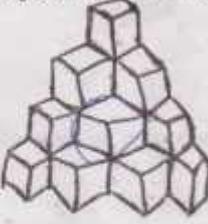
- 1 Escribe un mensaje a un compañero indicando la forma para encontrar la cantidad de cubos en la figura 100

HOJAS DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES

ANEXO 1

TAREA 1 GRUPO NO: 6

Nombre: Laura Valentin Ovalle Mendez  
Fecha: 1-NOV-2013

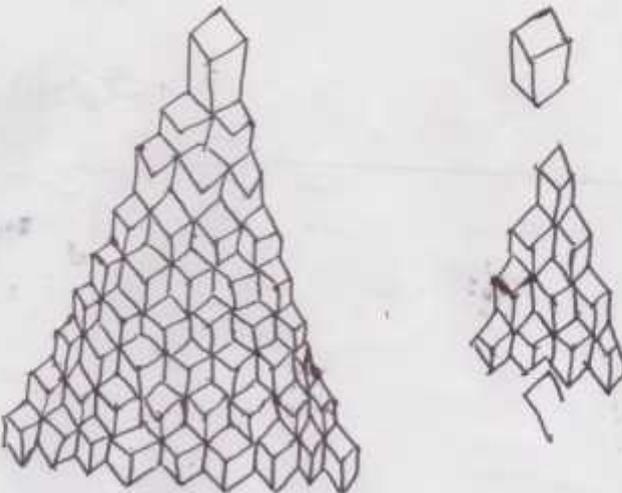
 Figura 1	 Figura 2	 Figura 3
<p>1 Dibuje la Figura 4 de la secuencia, ¿Cuántos cubos tiene?</p> <div style="display: flex; align-items: center;"><div style="flex: 1;"></div><div style="flex: 2; padding-left: 20px;"><p>FIGURA 4: tiene 20 cubos</p></div></div>		
<p>2 ¿Cuántos cubos hay en la Figura 9?</p> <p style="text-align: center;">la figura No 9 tiene 765 cubos</p>		
<p>3 ¿Cuántos cubos hay en la Figura 15? ¡Pero no hagas el dibujo!</p> <p style="text-align: center;">hay 340 cubos en la figura numero 15</p>		

ANEXO 2

clase 3

45  
53  
67  
85  
105  
125  
143  
157  
165

~~165~~

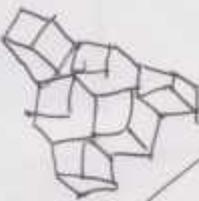


#d's

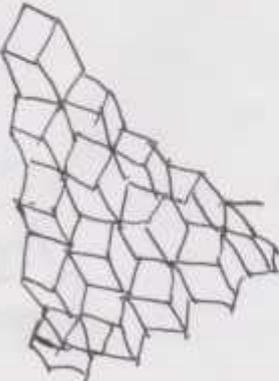
---

15  
x6

A



X



Santiago  
Andres

ANEXO 3

Trabajo #2

53  
67  
85  
105  
125  
143  
157  
165

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 100 \\ \hline 000 \\ 1000 \\ \hline 10000 \end{array}$$

---

Clase 4

~~119~~  

119  
14  
24  
33  
44

$$\begin{array}{r} 119 \\ + 14 \\ \hline 26 \end{array}$$

## ANEXO 4

Grupo 5

TAREA 2

Nombre: Juan Sebastian Andrade Ramirez  
 Fecha: 13/11/2013



Figura 1

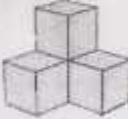


Figura 2

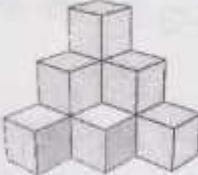


Figura 3

1 Escribe un mensaje a un compañero indicando la forma para encontrar la cantidad de cubos en la figura 100

Compañero: Para encontrar la cantidad de cubos de la figura 100 debes contar cada piso de la piramide y lo multiplicas por 2 tienes que hacerte mismo procedimiento con todos los pisos y no te pongas a dibujar si el ultimo piso tiene 100 y el primero 1 es muy logico que veas un orden desde 100, 99, 98, 97, 96... y asi hasta llegar a un 1. Este procedimiento te va a ahorrar el dibujo de las piramides y tambien ayudara para no tener que contar cubo por cubo. Mi teoria es muy efectiva y facil aun que necesites mucha concentracion. Por ejemplo:

$100 \times 2 = 200$	$99 \times 2 = 198$	$98 \times 2 = 196$
$97 \times 2 = 194$	$96 \times 2 = 192$	$95 \times 2 = 190$
$94 \times 2 = 188$	$93 \times 2 = 186$	$92 \times 2 = 184$
$91 \times 2 = 182$	$90 \times 2 = 180$	$89 \times 2 = 178$
$88 \times 2 = 176$	$87 \times 2 = 174$	$86 \times 2 = 172$
$85 \times 2 = 170$	$84 \times 2 = 168$	$83 \times 2 = 166$
$82 \times 2 = 164$	$81 \times 2 = 162$	$80 \times 2 = 160$
$79 \times 2 = 158$	$78 \times 2 = 156$	$77 \times 2 = 154$
$76 \times 2 = 152$	$75 \times 2 = 150$	$74 \times 2 = 148$
$73 \times 2 = 146$	$72 \times 2 = 144$	$71 \times 2 = 142$
$70 \times 2 = 140$	$69 \times 2 = 138$	$68 \times 2 = 136$
$67 \times 2 = 134$	$66 \times 2 = 132$	$65 \times 2 = 130$
$64 \times 2 = 128$	$63 \times 2 = 126$	$62 \times 2 = 124$
$61 \times 2 = 122$	$60 \times 2 = 120$	$59 \times 2 = 118$
$58 \times 2 = 116$	$57 \times 2 = 114$	$56 \times 2 = 112$
$55 \times 2 = 110$	$54 \times 2 = 108$	$53 \times 2 = 106$
$52 \times 2 = 104$	$51 \times 2 = 102$	$50 \times 2 = 100$
$49 \times 2 = 98$	$48 \times 2 = 96$	$47 \times 2 = 94$
$46 \times 2 = 92$	$45 \times 2 = 90$	$44 \times 2 = 88$
$43 \times 2 = 86$	$42 \times 2 = 84$	$41 \times 2 = 82$
$40 \times 2 = 80$	$39 \times 2 = 78$	$38 \times 2 = 76$
$37 \times 2 = 74$	$36 \times 2 = 72$	$35 \times 2 = 70$
$34 \times 2 = 68$	$33 \times 2 = 66$	$32 \times 2 = 64$
$31 \times 2 = 62$	$30 \times 2 = 60$	$29 \times 2 = 58$
$28 \times 2 = 56$	$27 \times 2 = 54$	$26 \times 2 = 52$
$25 \times 2 = 50$	$24 \times 2 = 48$	$23 \times 2 = 46$
$22 \times 2 = 44$	$21 \times 2 = 42$	$20 \times 2 = 40$
$19 \times 2 = 38$	$18 \times 2 = 36$	$17 \times 2 = 34$
$16 \times 2 = 32$	$15 \times 2 = 30$	$14 \times 2 = 28$
$13 \times 2 = 26$	$12 \times 2 = 24$	$11 \times 2 = 22$
$10 \times 2 = 20$	$9 \times 2 = 18$	$8 \times 2 = 16$
$7 \times 2 = 14$	$6 \times 2 = 12$	$5 \times 2 = 10$
$4 \times 2 = 8$	$3 \times 2 = 6$	$2 \times 2 = 4$
$1 \times 2 = 2$	$0 \times 2 = 0$	

etc.: sumando todo nos dara nuestro resultado

ANEXO 5

Grupo: 4

TAREA 1

Nombre: Susana Alejandra Lucio Osorio

Fecha: 14 de Noviembre de 2012



Figura 1



Figura 2

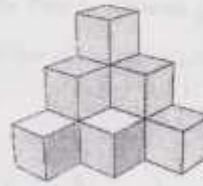
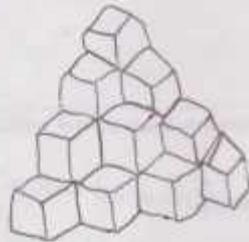


Figura 3

1 Dibuje la Figura 4 de la secuencia, ¿Cuántos cubos tiene?



Por lo tanto 20 cubos la figura 4

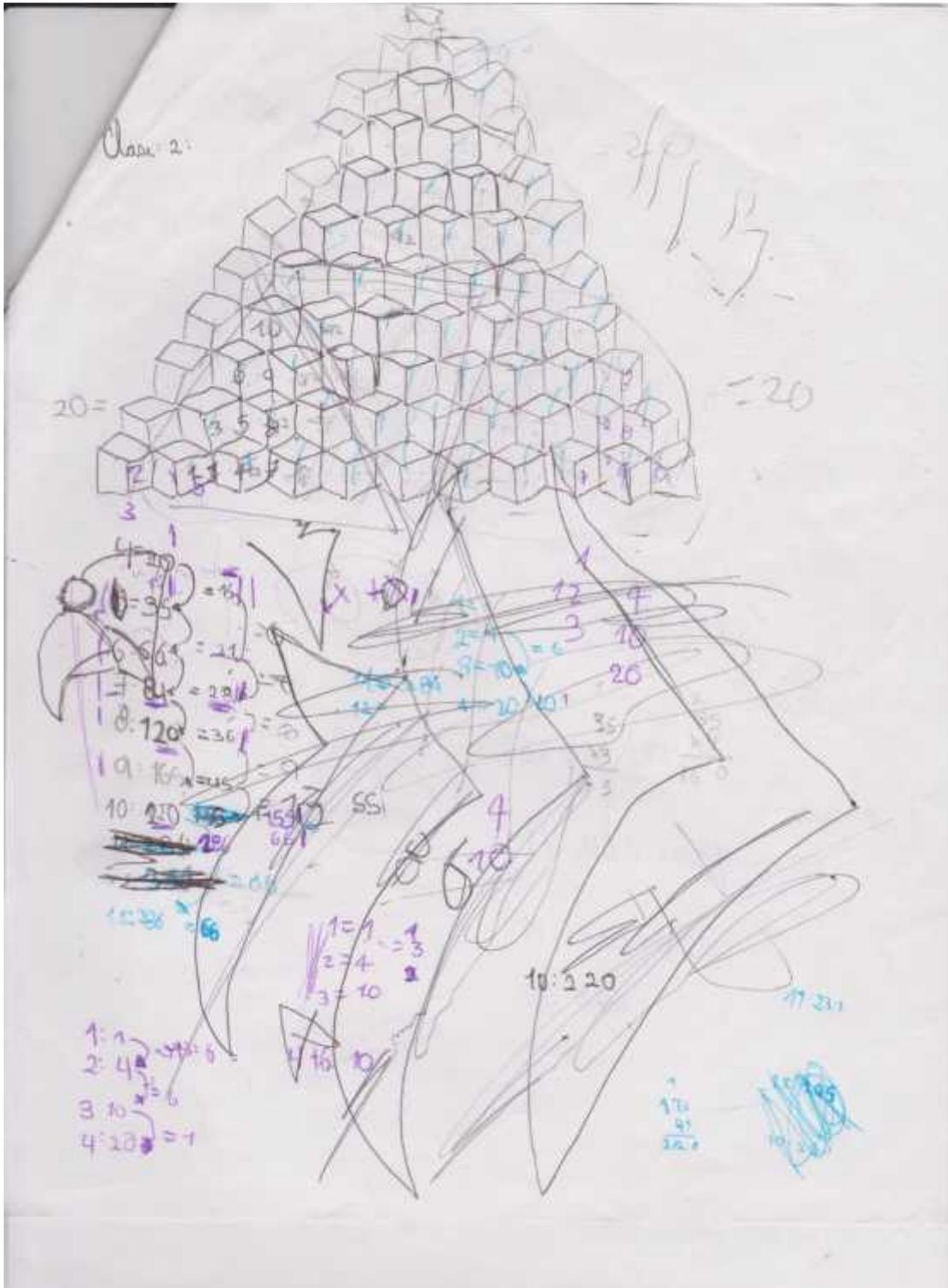
2 ¿Cuántos cubos hay en la Figura 9?

Hay 16 cubos

3 ¿Cuántos cubos hay en la Figura 15? ¡Pero no hagas el dibujo!

en la figura 15 hay 180 cubos

ANEXO 6



ANEXO 7

Grupo = 4

TAREA 1

Nombre: Julian Andrés Calderón Calderón  
Fecha: 01/Nov/13



Figura 1

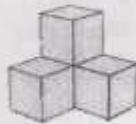


Figura 2

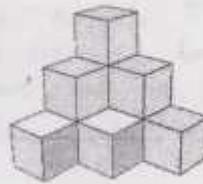
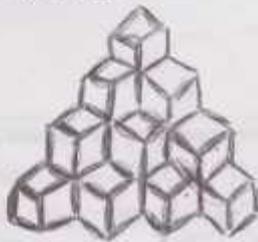


Figura 3

1 Dibuja la Figura 4 de la secuencia, ¿Cuántos cubos tiene?



= 20

2 ¿Cuántos cubos hay en la Figura 9?

165 cubos

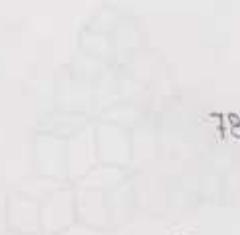
3 ¿Cuántos cubos hay en la Figura 15? ¡Pero no hagas el dibujo!

## ANEXO 8

Ejercicio 6

a: número de la figura  
 b: cantidad de cubos de azúcar

$a + b =$



$78 + 13$

:

$220 + 66 =$

$78 + 78$   
 $286 + 78$

$=$

12:  $364 + 91$

13:  $455 + 105$

14:  $560 + 120$

15: ~~680~~

$708 + 15$