PARADOJAS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD

José Miguel Contreras[1], Juan Jesús Ortiz[1], Carmen Díaz[2] y Pedro Arteaga[1]
[1]Universidad de Granada. (España), [2]Universidad de Huelva. España
jortiz@ugr.es

Resumen. Este trabajo presenta los datos empíricos iniciales, de un intento por llevar los avances teóricos logrados hasta el momento, sobre el fenómeno de reproducibilidad desde un enfoque socioepistemológico, al contexto de las prácticas preprofesionales de estudiantes que se están formando como profesores de matemáticas (EPM); con la intención de reconocer los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos, entre ellos, las actuaciones de estos estudiantes como elementos de interacción social en calidad promotores de actividades de aprendizaje. Lo anterior apoyado en la reflexión guiada, que tiene doble función: sirve para que los practicantes tengan la oportunidad de establecer las relaciones necesarias entre la teoría y la práctica, y permite ir recogiendo su historia de práctica para el análisis epistemológico, cognitivo, didáctico y sociocultural, correspondiente.

Palabras clave: formación de profesores, enseñanza de probabilidad, paradojas de probabilidad.

Abstract. In this paper, the content needed in the didactic training of teachers to teach probability is described and some possibilities that classical paradoxes of probability offer to organize didactic activities that can help carrying out these activities. We present results of courses aimed for teachers in Mexico, Portugal and Spain.

Key words: training teachers, teaching probability, probability paradoxes.

Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad en secundaria tiene ya una gran tradición, los nuevos Decretos Curriculares sugieren un cambio en la metodología, recomendando la presentación, tanto del enfoque clásico, como del frecuencial de la probabilidad, este último basado en simulaciones o experimentos. Algunos profesores pudieran no estar familiarizados con la metodología propuesta o no ser conscientes de algunas de las dificultades y sesgos probabilísticos de sus alumnos (Stohl, 2005). Si su formación inicial se centró en las competencias matemáticas, pueden sentirse inseguros con enfoques más informales. Es importante apoyarlos y proporcionarles actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos (Ball, 2000).

Puesto que queremos que los estudiantes construyan su conocimiento en forma activa, resolviendo problemas e interactuando con sus compañeros en la clase, las actividades presentadas a los profesores también deben basarse en el enfoque constructivista y social del aprendizaje (Jaworski, 2001). En particular, estas situaciones deberían permitir la reflexión epistemológica sobre la estadística, el estudio de las investigaciones didácticas sobre errores y dificultades de aprendizaje, y el análisis y experimentación de métodos y recursos de enseñanza.

En este trabajo analizamos la posibilidad que algunas paradojas clásicas de la teoría de probabilidad tienen en la formación de profesores. Presentamos también datos de 166 profesores tomados en un taller que tiene como objetivo que los profesores trabajen las siguientes pautas:

a. Experimentar un proceso de aprendizaje de ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975), a partir de una situación didáctica que puede ser adecuada en la Educación Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

b. Contextualizar la reflexión epistemológica sobre las ideas estocásticas fundamentales e identificar cuáles de ellas intervienen en la situación didáctica.

c. Analizar las posibles dificultades y razonamientos incorrectos de los mismos profesores y ayudarles a diagnosticarlas en sus estudiantes.

Conocimiento del profesor para enseñar la probabilidad

Los profesores tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas (Ponte, 2001). Aunque, para la enseñanza en la escuela, no necesitan altos niveles de conocimientos matemáticos, tales como, por ejemplo, la teoría de la medida, sin embargo si requieren una comprensión profunda de las matemáticas básicas que se enseñan en la escuela. Además de la formación científica, el profesor requiere lo que se denomina "conocimiento profesional", en el cual Ball, Thames y Phelps (2005) incluyen cuatro componentes: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes. En Batanero, Godino y Roa (2004) se especifican las componentes necesarias para el conocimiento profesional de los docentes, que son revisados por Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) en la forma siguiente:

- Componente epistémica: conocimiento del contenido matemático o estadístico, es decir, el conjunto de problemas, procedimientos, conceptos, propiedades, el lenguaje y argumentos incluidos en la enseñanza de un tema dado y su distribución en el tiempo de enseñanza.
- Componente cognitiva: conocimiento de los niveles de los estudiantes del desarrollo y la comprensión del tema, las estrategias de los estudiantes, las dificultades y errores en cuanto al contenido previsto.

- Aspecto afectivo: conocimiento de las actitudes de los estudiantes, las emociones, las motivaciones sobre el contenido y el proceso de estudio.
- Componente mediacional: conocimiento de los recursos didácticos y tecnológicos disponibles para la enseñanza y las posibles formas de utilizar y distribuir estos recursos en el tiempo.
- Componente interaccional: gestión de las organizaciones posibles del discurso en el aula y las interacciones entre el profesor y los estudiantes que ayudan a resolver las dificultades de los estudiantes y los conflictos.
- Componente ecológico: el conocimiento de la relación del tema con el currículo oficial, otros temas matemáticos o estadísticos y con los entornos sociales, políticos y económicos que apoyan la enseñanza y el aprendizaje.

Estos modelos de formación del profesor proporcionan una pauta para organizar actividades formativas dirigidas a desarrollar todo o parte de dicho conocimiento. Como indican Ponte y Chapman (2006), debemos considerar los profesores como profesionales, y formar a los docentes en la práctica profesional, haciendo que todos los elementos de la práctica (preparación de las clases, tareas y materiales, la realización de clases, observación y reflexión sobre la experiencia) sean el elemento central del proceso de formación del profesorado.

Paradojas como herramienta para desarrollar el conocimiento del docente

Una herramienta didáctica posible es utilizar algunas de las paradojas clásicas que aparecidas en la historia de la probabilidad para diseñar actividades dirigidas a la formación de profesores. Puesto que el profesor tiene unos conocimientos sólidos de probabilidad elemental, hemos de buscar problemas, que, siendo aparentemente sencillos, puedan tener soluciones contra intuitivas o sorprendentes. No es difícil encontrar este tipo de situaciones, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica con frecuencia nos engaña (ver Székely, 1986). La construcción de la teoría de la probabilidad no ha sido sencilla, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que llevó al progreso de la misma (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005).

Estos problemas, así como las soluciones, tanto correctas como erróneas, que algunos participantes puedan defender vehementemente, servirán para analizar cuáles son los conceptos involucrados en las soluciones, algunos de los cuales surgieron precisamente para dar solución a uno de estos problemas paradójicos, como reconocen varios autores. Lesser (1998) indica que el uso inteligente de estos ejemplos contra-intuitivos apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje. Los estudiantes se pueden beneficiar al desarrollar su motivación y meta cognición, descubriendo las conexiones con la historia y la vida real. Falk y Konold (1992), por su parte, afirman que estas actividades requieren una consciencia de sus propios pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador de los resultados sorprendentes que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente.

Batanero, Godino y Roa (2004) proponen una actividad basada en la paradoja de Bertrand que ayudan a distinguir y comparar la concepción frecuentista y Laplaciana de la probabilidad, además de reflexionar sobre los conceptos de experimento dependiente y probabilidad condicional, así como sobre el papel de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático. La actividad tiene el siguiente enunciado

Tomamos tres tarjetas de la misma forma y tamaño. Una es de color azul en ambos lados, la segunda es de color rojo en ambos lados y la tercera es azul de un lado y roja por el otro. Ponemos las tres tarjetas en una caja, y agitar la caja, antes de seleccionar una tarjeta al azar. Después de seleccionar la tarjeta se muestra uno de los lados. El objetivo del juego es adivinar el color de la cara oculta. Repetimos el proceso, poniendo la tarjeta de nuevo en la caja antes de cada nueva extracción. Hacemos predicciones sobre el color del lado oculto y gana un punto cada vez que nuestra predicción es correcta. ¿Cuál es la mejor estrategia en este juego?

Batanero, Godino y Roa (2004) sugieren que, para trabajar con esta actividad, los participantes primero han de hacer algunas pruebas del juego y, a continuación, el formador de profesores ha de pedirles que encuentren la estrategia que produce la oportunidad de ganar más veces en una serie larga de ensayos. Debido al carácter contra intuitivo, surgirá más de una solución (algunas incorrectas). Después de algunas repeticiones del juego, todas las estrategias sugeridas por los profesores deben figurar en la pizarra y posteriormente sería organizado por el formador de profesores un debate para decidir cuál es la mejor estrategia. El objetivo de este debate, donde es posible tanto el razonamiento correcto como los conceptos erróneos, es aumentar el conocimiento probabilístico del maestro. Si no hay acuerdo final, los participantes serán animados a realizar una demostración matemática de su estrategia y se organiza un debate que permitirá revelar los razonamientos erróneos.

Resultados de nuestro estudio

Batanero, Godino y Roa (2004) evaluaron esta actividad en una muestra de 47 estudiantes españoles de pregrado que se preparan para ser profesores de estadística a nivel universitario. En nuestro estudio se ha ampliado el tamaño de la muestra y se han realizado talleres en diferentes contextos. Los datos se recogieron por escrito de la actividad dada por 166 docentes en activo que participan en tres talleres distintos (España, n=98 profesores de matemáticas de secundaria, Portugal, n=27 profesor de matemáticas de la escuela secundaria y México, n=41 profesores de Estadística a nivel secundario o universitario).

En la tabla 1 se presenta la composición de la muestra. Los profesores en formación españoles eran alumnos del quinto curso en la licenciatura de Ciencias y Técnicas Estadísticas. Los profesores portugueses en formación eran licenciados en matemáticas y cursaban el Máster de Didáctica de la Matemática. Todos ellos realizaron el taller dentro de una asignatura optativa de Didáctica de la Matemática. Los profesores en ejercicio realizaron el taller en congresos dirigidos al profesorado, en sus países respectivos. Su formación inicial era variada, siendo mayoría los licenciados en Matemáticas en España o Educación Matemática (en Portugal y México). En el taller impartido en México participaron también profesores en activo de estadística en diversas titulaciones universitarias, algunos de los cuales tenían una formación como ingeniero, médico o farmacéutico.

Tabla 1. Frecuencia (y porcentaje) de participantes por paises según situación

Situación del profesor	España	Portugal	México	Total
En ejercicio	40 (38.1)	14 (50)	33 (100)	87 (52.4)

En formación	65 (61.9)	14 (50)	0 (0)	79 (47.6)
Total	105 (59)	28 (16.9)	33 (24.1)	166 (100)

El número medio de años de experiencia docente en toda la muestra fue 12.6. El objetivo de este estudio es comparar si las dificultades de partida y el aprendizaje a lo largo de la actividad descrita por Batanero, Godino y Roa (2004) en los profesores en formación se reproducen en el caso de los docentes en servicio. Otras diferencias son el tamaño de la muestra, cuatro veces mayor que la utilizada por Batanero, Godino y Roa (2004) y las diferencias de contexto, así como el incluir profesores en activo.

Tabla 2. Frecuencia (y porcentaje) de estrategia inicial según país

	País			
Estrategia inicial	España (n=98)	Portugal (n=27)	México (n=41)	Total (n=166)
E1. Apostar al color de la cara mostrada (correcta)	33 (33.7)	5 (18.5)	3 (7.3)	41 (24.7)
E2. Predecir el color contrario del que se muestra	8 (8.2)	3 (11.1)	2 (4.9)	13 (7.8)
E3. Considerar que no hay estrategia (aleatoriedad)	38 (38.7)	14 (51.9)	27 (65.8)	79 (47.7)
E4. Elección de un mismo color en todos los ensayos	3 (3.1)	1(3.7)	1 (2.4)	5(3.0)
E5. Alternar colores	4 (4.1)	3 (11.1)	0 (0)	7 (4.2)
E6. Usar los resultados anteriores para la predicción	7 (7.1)	1 (3.7)	4 (9.8)	12 (7.2)
E7. Cambiar las estrategias a lo largo de la secuencia de ensayos	4 (4.1)	0 (0)	4 (9.8)	8 (4.8)
E8. Propiedades no físicas de las tarjetas	1(1.0)	0(0)	0 (0)	1(0.6)

La tabla 2 presenta las estrategias iniciales. Aparecen una variedad de estrategias de partida, por lo que se logró el objetivo de crear una situación problemática que sirvió a los profesores a enfrentarse a sus diferentes soluciones y a reflexionar sobre las intuiciones erróneas en probabilidad. Algunos participantes no percibían inicialmente la independencia de los ensayos, ya que utilizan los resultados anteriores antes de predecir el color. Las estrategias fueron muy similares en los distintos entornos (México, Portugal y España), aunque con diferentes porcentajes y similares a las descritas por Batanero et al., a pesar de que el grupo contenía profesores con experiencia docente (educación secundaria o universidad). El mayor porcentaje de estrategias correctas en el grupo español se debe a la presencia en este grupo de una proporción importante de licenciados en estadística.

Tabla 3. Resumen de estrategias iniciales y finales por país

	España		Portugal		México	
Estrategia	Inicial	Final	Inicial	Final	Inicial	Final
Correcta	32 (32.6)	71 (72.4)	5 (18.5)	17 (63)	3 (7.3)	23 (56.1)
Incorrecta	66(67.4)	27 (27.6)	22 (81.5)	10 (37)	38 (92.7)	18 (43.9)
	98	98	27	27	41	41

Esta mayor proporción se refleja también en los resultados finales (tabla 3), donde se resumen las estrategias iniciales con las consideradas correctas después de tres repeticiones de la serie de 10 jugadas (30 experimentos), seguida cada una de debate. Las diferencias iniciales en la proporción de estrategias correctas/incorrectas entre países se hicieron más pequeñas en las estrategias finales. Puesto que los profesores fueron invitados a escribir y justificar sus soluciones como parte del taller, hubo un tiempo de reflexión, y, como consecuencia del debate, en la etapa final, la mayoría de los profesores ha cambiado a la estrategia correcta. Observamos globalmente un aumento muy importante de las respuestas correctas, que se duplican respecto a la situación inicial.

El porcentaje de aumento es similar en todas las muestras alrededor del 40% de profesores pasan de una estrategia incorrecta a otra correcta. Por consiguiente, los datos sugieren un cambio positivo en general en las concepciones de los docentes acerca de los conceptos involucrados en la actividad. En la tabla 4 se presentan los datos por tipo de profesor. Observamos también poca diferencia entre los profesores en formación y ejercicio, inicialmente (Chi-cuadrado= 1.16, 1 g.l. p= 0.28) con menos del 30 % de estrategias correctas en los dos grupos y finalmente (Chi-cuadrado= 0.27, 1 g.l p= 0.60) con porcentajes de estrategias correctas superiores al 60%. Concluimos la similitud de intuiciones incorrectas en los dos colectivos y la utilidad para ambos de la actividad formativa propuesta.

Tabla 4. Frecuencia (y porcentaje) de estrategias iniciales y finales según situación profesional

	En formación		En ejercicio	
Estrategia	Inicial	Final	Inicial	Final
Correcta	23 (29.1)	53 (67.1)	19 (21.8)	55 (63.2)
Incorrecta	56 (70.9)	26 (32.9)	68 (78.2)	32 (36.8)
Total	79	79	87	87

Reflexiones finales

Los resultados mostrados señalan la necesidad de mejorar el conocimiento del contenido probabilístico en los profesores, incluso de los profesores en ejercicio, quienes, en una proporción considerable mostraron intuiciones incorrectas al comienzo de la actividad y no fueron capaces de dar una demostración completa de la estrategia, una vez identificada al final del juego. Pensamos que ello se debe a que la preparación matemática de los profesores en su formación inicial se centra en el conocimiento común del contenido, y sería necesario complementarlo con un conocimiento especializado del contenido, que incluye información sobre los sesgos en el razonamiento probabilístico. Los profesores requieren también un conocimiento didáctico del contenido, incluyendo aspectos como metodología de enseñanza y representaciones instruccionales, tales como tipos de demostración matemática asequible a los estudiantes.

Para proporcionar a los participantes en el taller estos conocimientos, la actividad se complementó en la segunda sesión del taller con el análisis didáctico sobre el conocimiento matemático que necesitan los estudiantes para resolver el problema, los errores potenciales de los estudiantes y las fases didácticas del taller. La actividad también ayudó a aumentar algunas componentes de los conocimientos profesionales:

- Componente epistémica: Al hacer reflexionar al futuro profesor sobre los diversos significados históricos de la probabilidad (subjetiva, frecuentista y clásica) y las controversias ligadas a su definición en diferentes momentos históricos;
- Componente cognitiva: pues adquieren conocimientos sobre la dificultades de los estudiantes con los conceptos de probabilidad condicional e independencia y sobre posibles razonamientos y estrategias correctas e incorrectas para resolver el problema;

- Componente afectiva: experimentando nuevos métodos de enseñanza, basados en el juego, experimentación y debate, que permite aumentar el interés de los alumnos y su participación en la actividad;
- Componente interaccional: aumentando su experiencia sobre la forma de organizar el discurso y el tiempo didáctico y de hacer aflorar y resolver los conflictos cognitivos de los estudiantes;
- Componente ecológica: pues la actividad se puede conectar con el estudio de las concepciones erróneas sobre el azar (psicología) y con los problemas sociales relacionados con la adicción a los juegos de azar (sociología).

Los profesores necesitan apoyo y formación adecuada para tener éxito en el logro de un equilibrio adecuado de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad. Lamentablemente, no todos los profesores siempre reciben una buena preparación para enseñar la probabilidad en su formación inicial. Sin embargo, actividades como las que se analizan en esta presentación pueden servir al mismo tiempo para aumentar los conocimientos de probabilidad en los docentes y sus conocimientos profesionales.

Finalmente, apuntamos a la necesidad de seguir investigando sobre los componentes esenciales en la preparación de los profesores para enseñar la probabilidad y el método adecuado en el que cada componente debe ser enseñado. Esta es un área importante de investigación que puede contribuir a mejorar la educación estadística a nivel escolar.

Agradecimientos: este trabajo forma parte del proyecto EDU2010-14947 (MICIN) y de la beca FPI BES-2008-003573, MEC-FEDER.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge for teaching*. Recuperado el 03 de septiembre de 2010 de http://www-personal.umich.edu/~dball/.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). *Training teachers to teach probability. Journal of Statistics Education,* 12, 1. Recuperado el 05 de septiembre de 2010 de http://www.amstat.org/publications/jse/

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Falk, R., & Konold, C. (1992). The pshycology of learning probability. En F. Gordon & S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twuenty-first century*, MAA Notes 26 (pp. 151-164). Washington, DC, EE. UU: Mathematical Association of America.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., & Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, México: ICMI e IASE. Recuperado el 7 de agosto de 2010 de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatons.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teachers, teacher educators and researchers as co-learners. En L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht: Kluwer.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, 87(4), 232-235.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics,* 20(1), 10-12.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. En T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishers.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics.* Dordrech: Reidel.