LAS CONCEPCIONES DEL PROFESOR Y SU RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO ECUACIÓN LINEAL

Mario Adrián Caballero Pérez, María Guadalupe Ordaz Arjona
Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán . México
mcaballero1988@hotmail.com, oarjona@audy.mx

Resumen. El estudio de las ecuaciones en la enseñanza del álgebra en bachillerato desempeña un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes, no sólo por estar relacionado con temas de otras asignaturas, sino porque permite modelar problemas reales. Sin embargo, el tratamiento escolar de éstas, propicia dificultades en su aprendizaje, e ideas incompletas de ecuación. Conviene entonces indagar sobre las razones de que los profesores de matemáticas aborden la enseñanza de la ecuación de una forma y no de otra. En particular uno de nuestros objetivos, fue caracterizar las concepciones sobre el concepto ecuación lineal, para lo cual establecimos cuatro categorías de concepciones: Operacional, Estructural, Funcional y Geométrico. Los resultados obtenidos al momento indican que la ecuación lineal es concebida como un objeto matemático definido por medio de reglas, propiedades y procedimientos propios del álgebra y no como herramienta para la resolución de problemas.

Palabras clave: ecuación lineal, concepciones, profesores

Abstract. The study of equations in the teaching of algebra in high school have an important role in student learning, not only as it relates to other subject, also allows us to model real problems. However, the teaching of them fosters their learning difficulties, and ideas incomplete about equation. Then, should investigate the reasons that teachers of mathematics teach equation one way and not another. In particular, one of our goals was to characterize the conceptions about the concept linear equation, for which we established four categories of conceptions: Operational, Structural, Functional and Geometric. The results to date indicate that the linear equation is conceived as a mathematical object defined by rules, properties and procedures of the algebra and not as a tool for solving problems.

Key words: linear equation, conceptions, teachers

Introducción

Planteamiento del problema

La ecuación es un concepto matemático que ha sido relacionado estrechamente con la enseñanza del Álgebra, y contemplado como un requisito en otras asignaturas, como es el caso de geometría analítica y cálculo. Sin embargo, se ha visto que el aprendizaje de este concepto no es sencillo, lo cual queda evidenciado al observar la diversidad y recurrencia de errores y dificultades en los estudiantes, tanto de carácter conceptual como procedimental, por ejemplo, el manejo del signo igual y, el significado de las literales y de la solución. Existen investigaciones que tratan acerca de las causas que originan estos errores, algunas de corte epistemológico, analizando los cambios conceptuales que se dan en la transición de la aritmética al álgebra, y otras enfocadas en el alumno, particularmente en sus actitudes hacia el aprendizaje, o en los procesos cognitivos. Sin embargo, se ha estudiado en menor medida, cómo el profesor de matemáticas, en particular, el tratamiento que le da a los conceptos, puede contribuir al surgimiento de errores. Por ejemplo, durante la enseñanza en el aula, el profesor suele definir una ecuación como una igualdad con una incógnita, lo cual como menciona Sessa (2005) induce a la idea de que la ecuación es un número que existe pero es desconocido, y en consecuencia, no es posible concebir la idea de ecuaciones sin solución y de ecuaciones con soluciones infinitas. Es así que en la escuela, a la ecuación se le da un tratamiento que propicia en los estudiantes, por un lado, dificultades en el aprendizaje del Álgebra, y por otro, ideas inadecuadas o incompletas de lo que es una ecuación. Conviene entonces indagar sobre las razones que causan que los profesores de matemáticas aborden la enseñanza de la ecuación de una forma y no de otra. Coincidimos con García, Azcárate y Moreno (2006), en que las concepciones juegan un papel importante en el desarrollo de la actividad docente, y el conocer las concepciones de los profesores sobre algún concepto matemático puede ayudar a explicar el tratamiento que los profesores dan a éstos. En este trabajo presentamos los resultados preliminares de una investigación que pretende explicar cómo se relacionan las concepciones de los profesores sobre la ecuación lineal con el tratamiento que estos le dan al concepto. En este reporte, planteamos el trabajo realizado en torno al objetivo: *caracterizar las concepciones que los profesores tienen sobre la ecuación lineal.*

Marco de referencia

Las concepciones son un constructo que los investigadores han creado para referirse a parte del conocimiento personal que los seres humanos poseen. Moreno y Azcárate (2003), consideran que las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, imágenes mentales, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. Esta caracterización corresponde a una idea general de concepción, sin embargo, para hablar de las concepciones del profesor de matemáticas, hemos considerado la propuesta de García, Azcárate y Moreno (2006), en la cual, las concepciones consisten en la estructura que cada profesor da a sus conocimientos, para posteriormente, enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes. Bajo esta idea, una concepción sobre la ecuación lineal está conformada por la organización e interiorización de los significados que el profesor tiene de este concepto. Sfard (1991), citado en Kieran (1992), considera que las nociones matemáticas pueden ser concebidas de dos formas, una *Operacional*, considerándolas como procesos, y una *Estructural*, concibiéndolas como objetos. En el trabajo de Panizza, Sadovsky y Sessa (1996), se considera que una concepción que permite la compresión de la ecuación lineal, involucra la elaboración de los conceptos *raíz, conjunto solución, variable y ecuaciones equivalentes.* Nosotros establecimos un conjunto de categorías de concepciones sobre la ecuación lineal (**Ver Tabla 1**), considerando los significados atribuidos a los elementos señalados por Panizza, Sadovsky y Sessa (1996), y las concepciones propuestas por Sfard (1991, citado en Kieran, 1992), además de otros aspectos relacionados con la ecuación lineal como *las literales, el signo igual, y los métodos de resolución*.

Aspectos metodológicos

Una vez establecido nuestro marco de referencia, el siguiente paso consistió en identificar las concepciones que los profesores tienen de la ecuación lineal; estudiamos a siete profesores que laboran en Colegios de bachilleres del estado de Yucatán, contemplando formación inicial en: Ingeniería Civil, Ingeniería Industrial, Ingeniería en Construcción, Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas y Licenciatura en Educación, con experiencias docentes que varían desde dos hasta cuarenta años. Para identificar las concepciones aplicamos una encuesta, diseñada a partir de los indicadores señalados en las categorías de concepciones, está encuesta constó de seis preguntas, dándoles cuatro opciones de respuesta que correspondían a una de las cuatros categorías señaladas anteriormente. También se aplicó un cuestionario conformado por cuatro ítems, que pretendían mostrar cómo el profesor hace uso de la ecuación lineal, a través de analizar las formas en que resuelve ciertos problemas matemáticos. Adicionalmente se realizó una entrevista, que permitió complementar la información de las concepciones.

INDICADORES	OPERACIONAL	ESTRUCTU-RALISTA	FUNCIONAL	GEOMÉTRICO
Definición de ecuación lineal	La ecuación es una expresión en la que existe un valor desco-nocido, el cual debe ser hallado por medio de operaciones matemáti-cas.	La ecuación es un concepto matemático definido, cuyos elemen-tos y técnicas de reso-lución son específicos.	La ecuación es una herramienta que per-mite la resolución de problemas y que se relaciona estrecha-mente con el concep-to de función.	Es un concepto matemático, cuya utilidad e importancia, radica en su versatilidad para ser representado en forma gráfica.
El papel del signo igual	Es visto como un operador unidireccional Sirve para indica cuales son las operaciones que deben realizarse.	Le da a la ecuación la característica de igual-dad, es decir, ambos miembros de la ecua-ción tienen el mismo valor.	Indica las condicio-nes que se establecen en el problema que se pretende resolver.	Indica la condición que cumplen los puntos pertenecientes a un lugar geométrico en un sistema coordenado.
El significado de las literales	Representan los valores que se desconocen, y que deben ser hallados.	Números generalizados, es decir, representan to-dos aquellos números que puedan ser susti-tuidos en la ecuación.	Son las variables de una función lineal.	• Es la abscisa de un punto (una literal). • Representan los puntos de un sistema coordenado (dos literales).
El significado de la raíz o solución	Es el número cuyo valor era desconocido.	Es el valor que hace que la igualdad sea verda-dera.	El valor con el cual se da solución a un	• Es el valor de la abscisa para el cual

			problema.	la ordenada es cero (una literal). • Son los puntos que pertenecen a un lugar geométrico (dos literales).
El significado de resolver una ecuación lineal	Efectuar procedimien-tos, no necesariamente algebraicos, con el fin de dar respuesta a la ecuación.	Hallar todas las solu-ciones de la ecuación mediante operaciones algebraicas que no alteren la igualdad.	Hallar el valor de la variable de una fun-ción, que cumple con la condición indicada en un problema.	• Hallar el punto en que una gráfica corta al eje X. (una literal) • Hallar el conjunto de puntos que pertenecen a un lugar geométrico (dos literales).

Tabla 1

Resultados

Por la extensión del documento nos centraremos en presentar los resultados obtenidos en el Cuestionario, enfocándonos en el análisis realizado a dos de los ítems, y a dos profesores, el profesor A, y el profesor D. En dicho análisis pretendíamos obtener información sobre cómo el profesor hace uso del concepto, para lo cual se complementó con la información obtenida en la entrevista, y de esa forma indagar más sobre la concepción que tenía sobre la ecuación lineal, para posteriormente corroborarlo con lo reportado en la encuesta.

Profesor A. Ítem 1

"Un auto A inicia en el principio de una carretera y avanza a una velocidad constante de 60 Km/h. Media hora después, un auto B parte del mismo punto hacia la misma dirección con una velocidad de 90 Km/h".

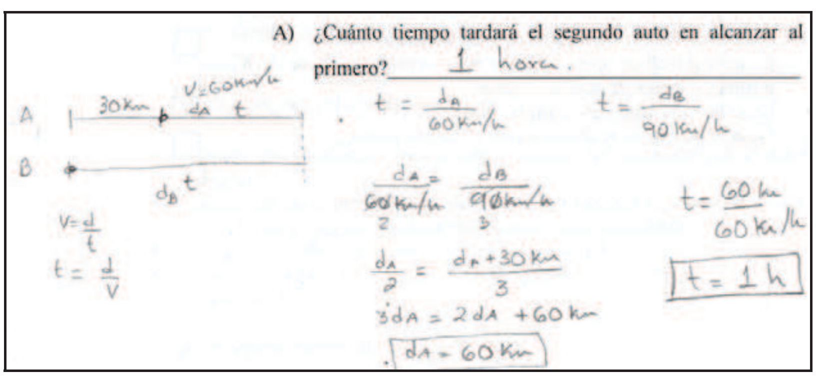

Figura 1

En el inciso A (ver Figura 1) la profesora emplea el símbolo "=", como un *símbolo de equivalencia*, ya que expresa la igualdad entre las expresiones correspondientes a los tiempos de los vehículos A y B, y resuelve empleando *métodos algebraicos que no alteran la igualdad planteada*, como se puede apreciar en la transposición de términos que hace. Las literales representan la distancia que recorren los automóviles, y estas literales pueden ser sustituidas por diferentes valores, por lo cual, corresponden a *números generalizados*. Además, la raíz de la ecuación corresponde al tiempo en que las distancias recorridas son iguales, por tanto, representa *el valor para el cual, la igualdad se conserva*. Así, la concepción que muestra aquí es *Estructural***.**

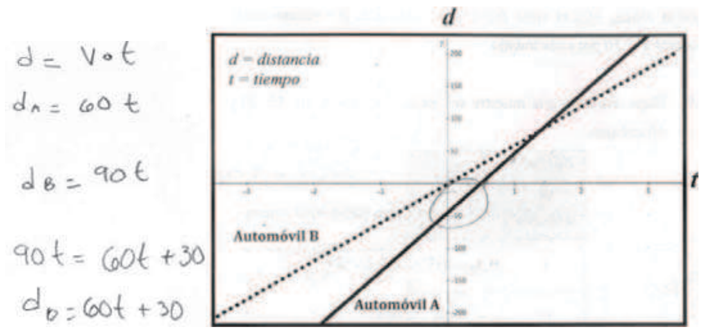

Figura 2

En el inciso C del mismo ítem (ver Figura 2), se le mostraba a la profesora un gráfica que representa la situación descrita en el inciso A y se le preguntaba si ella incluiría la gráfica al plantearles este problema a sus estudiantes; la profesora dice que no la incluiría, sin embargo, resuelve nuevamente el inciso A mostrando ahora un procedimiento distinto, pero acorde a la situación mostrada en la gráfica, ya que considera al automóvil A como referencia para el tiempo de inicio, a diferencia del procedimiento mostrado en el inciso A, donde consideró el automóvil B como referencia para el tiempo inicial, incluso la respuesta que dá es distinta a la presentada anteriormente. Asimismo, al preguntarle en la entrevista sobre cómo utilizó la gráfica, la profesora dice:

"*como te piden el tiempo en que las distancias son iguales, vemos en el eje de las Y, dónde las rectas se cortan, y luego para hallar el tiempo, buscamos el valor del eje X correspondiente al punto de corte"*

Aunado a ello, cuando en la entrevista se le preguntó cuál de los dos procedimientos (el del inciso A y del inciso C) considera más adecuado, la profesora responde que ambos, ya que según ella, la figura del inciso A y la gráfica del inciso *C "son similares y proporcionan la misma información"*. En ambos procedimientos la profesora enfatiza en la representación auxiliar, los segmentos en el inciso A, y la gráfica en el inciso C, y al decir que proporcionan la misma información, vemos que la profesora considera la literal como los *valores del eje X*, a la raíz de la ecuación como *la abscisa de un punto específico*, y al signo "=" como *la relación que cumplen* *las abscisas y ordenadas de los puntos de una recta*. Por tanto, al considerar las respuestas plasmadas en el inciso C y en la entrevista, decimos que la concepción que muestra la profesora es *Geométrica*.

Profesor A. Ítem 2

"Carla planea ir de vacaciones con su prima Kate durante una semana, por lo que pide prestados $195 para comprar una podadora de césped, con el fin de ganar dinero para el viaje cortando el césped de los vecinos. Ella decide cobrar $11.50 por cada trabajo"

D) ¿Cuántos trabajos tiene que hacer Carlos con el fin de ganarse al menos $500 para su viaje de vacaciones?

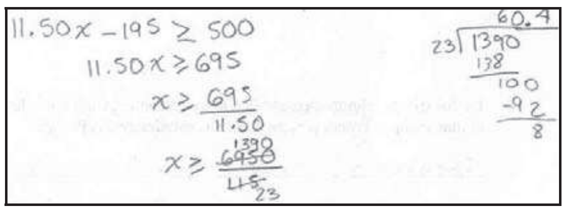

Figura 3

En el inciso D (Figura 3), el signo "=" es remplazado por una desigualdad que representa *la condición que cumple la expresión correspondiente a la ganancia obtenida* por cada trabajo, es decir, la ganancia sea mayor a $500. La literal representa el número de trabajos para los cuales la ganancia es mayor a $500, y como la ganancia depende del número de trabajos realizados, entonces la literal es una *variable*. La solución no es un valor único, sino *un conjunto de valores que dan solución al problema*, y resolver la desigualdad implicó realizar operaciones algebraicas que no alteren la desigualdad. Por tanto, la concepción de la profesora es *Funcional***.**

Profesor D. Ítem 1

En el inciso A el profesor plantea una ecuación derivada de igualar las ecuaciones correspondientes a las distancias recorridas por cada automóvil, y la resuelve por métodos algebraicos (ver Figura 4). El símbolo "=" representa *la equivalencia* que debe haber en las distancias recorridas, y por tanto, entre las ecuaciones de cada automóvil, la literal que utiliza, representa los tiempos en que cada uno recorre cierta distancia, por tanto, la literal es un *número generalizado* y la solución es *el valor de la literal que mantiene la igualdad entre las expresiones indicadas*. Resolver la ecuación es realizar *operaciones algebraicas que no alteren la igualdad* entre las expresiones. En la entrevista se observó, que el profesor concibe a la ecuación lineal ajena a la función lineal, afirma: "*hay algunos conceptos, como el de funciones que no lo manejamos".* También se aprecia que considera a la ecuación lineal bajo un enfoque puramente algebraico, lo cual concuerda con lo que dice sobre el uso de la gráfica en el ítem 1:

"no había visto la gráfica, resolví la ecuación sin verla". Da a entender que el uso de la gráfica no fue necesario, y que se centró únicamente en el planteamiento y resolución algebraica de la ecuación correspondiente. Por tanto, la concepción del profesor es *Estructural*.

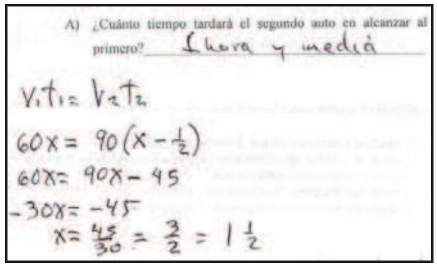

Figura 4

Profesor D. Ítem 2

En el procedimiento mostrado en la Figura 5, el símbolo "=" representa *la equivalencia* que se da entre el número de trabajos y la ganancia que se obtiene, mientras que la literal son los trabajos que se realizan, y por tanto, representa *un número generalizado*. La solución de la ecuación, es el valor para el cual, la expresión correspondiente al número de trabajos es equivalente a la ganancia, es decir, *el valor que hace verdadera la igualdad*. En la entrevista, el profesor menciona que el uso de tablas ayuda a los estudiantes en la resolución del ítem, debido a que pueden "*visualizar las relaciones y hacer el planteamiento de la ecuación"*. Sin embargo, esta idea la asoció únicamente a los estudiantes, pues para él no es necesario el uso de la tabla, ya que basta el planteamiento algebraico. Por tanto, la concepción que muestra es *Estructural*.

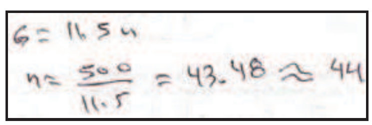

Figura 5

Conclusiones

Los resultados obtenidos de la encuesta, el cuestionario y la entrevista se presentan en la Tabla 2, en la que se indica el profesor y la concepción que predomino en el análisis.

PROFESOR	CONCEPCIÓN
A	Geométrica
B	Estructural
C	Estructural
D	Estructural
E	Operacional
F	Operacional
G	Geométrica

Tabla 2

De estos resultados concluimos que hay una tendencia en los profesores estudiados hacia una concepción *Estructural* de la ecuación lineal, ya que está presente en tres de los profesores, en tanto que la concepción *Geométrica* y *Operacional* se presenta cada una en dos profesores. Debido a que sólo tres de siete profesores presentaron una concepción *Estructural*, esto nos indica que hay una tendencia a concebir la ecuación lineal como un concepto matemático definido, cuyos elementos y técnicas de resolución son específicos del álgebra, el signo igual da a la ecuación la característica de igualdad, es decir, que los miembros a la derecha e izquierda de la igualdad pueden entenderse como partes de la ecuación, que deben ser iguales. Las literales son vistas como números generalizados, es decir, representan todos aquellos números que puedan ser sustituidos en la ecuación, donde la raíz de la ecuación lineal representa el valor que hace que la igualdad sea verdadera.

Llama la atención que la concepción *Funcional* no se encontró presente en los profesores estudiados, puesto que en ella se logra una articulación entre los diferentes registros de representación de la ecuación lineal, y se considera el uso variables, el cual es un elemento esencial para el aprendizaje del álgebra. Sin embargo, aunque no fue predominante, en algunos profesores se observó que en cuanto al significado atribuido a las literales, estas eran concebidas como variables de una relación funcional, e incluso se hacía mención de la relación de dependencia entre las variables. Por otra parte, la entrevista permitió observar que la mayor parte de los profesores conciben de forma separada, conceptual y académicamente, conceptos como función y ecuación, y asimismo, la representación gráfica es concebida por los profesores como un elemento ajeno a la enseñanza de la ecuación lineal. Sin embargo, los mismos profesores consideran importante la inclusión de gráficas en la enseñanza de la ecuación lineal, ya que proporciona una alternativa para el aprendizaje y la comprensión del concepto.

En un estudio posterior se complementarán los resultados obtenidos hasta ahora con la descripción del tratamiento dado a la ecuación lineal por profesores de bachillerato, con el objetivo de analizar de qué forma las concepciones influyen en el tratamiento dado a este concepto, con lo cual se tendría una forma de caracterizar la práctica docente en función de las concepciones, dando así referencia sobre las concepciones que deberían ser modificadas en los profesores durante cursos de actualización y formación, y de ese modo, contribuir a una enseñanza de la ecuación lineal que propicie un aprendizaje enfocado en la compresión del concepto, y no en la memorización de reglas.

Referencias bibliográficas

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 9, número 1, 85-116.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Douglas A. Grouws (ed.), pp. 390-419. Nueva York: Macmillan.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias* 21(2), 265-280.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática. Comunicación realizada a la sección REM de la reunión anual de la Unión Matemática Argentina, Córdoba.

Sessa, C. (2005). Una entrada al álgebra a través de la generalización. En Sessa (Eds.). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: Orígenes y perspectivas* (pp. 67 – 126). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.