

## HISTORIA EN UN CURSO DE POSGRADO PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN SERVICIO. UNA ESTRATEGIA PARA PROBLEMATIZAR LA TRIGONOMETRÍA ESCOLAR

Gisela Montiel Espinosa .  
CICATA – Cinvestav, IPN  
gmontiel@ipn.mx

México

**Resumen.** -. A través del análisis de *fuentes originales*, en un curso de posgrado con profesores de matemáticas en activo, proponemos la problematización de la trigonometría escolar; es decir, el cuestionamiento de aquello que enseñamos, más allá del cómo lo hacemos y cómo lo aprende el estudiante. Reconociendo los contextos, los problemas y los escenarios de origen de dicho conocimiento, y usando a la historia como mediador, se plantean elementos para la *resignificación* de lo trigonométrico en la construcción de conocimiento matemático.

**Palabras clave:** - . problematizar el saber escolar, lo trigonométrico, historia de las matemáticas.

**Abstract** .-. Through the analysis of mathematical original sources, on a postgraduate course with in-service teachers, we propose to problematize the school trigonometric knowledge, i.e., questioning what to teach and not just how we teach it and how students learn it. Recognizing the contexts, the problems and the scenarios of knowledge's origins, and using the history as a mediator, we found elements for a *new base of meanings* for trigonometric in the construction of knowledge.

**Key words:** - school knowledge, trigonometric, mathematics history.

### Introducción

El reconocimiento de la matemática educativa como disciplina autónoma ha descansado significativamente en el papel que le otorga al saber matemático como parte del objeto de estudio, al enfrentar un fenómeno didáctico. Sin embargo, para entender qué aprendizajes logran los estudiantes se ha asumido, con regularidad, al saber escolar como el saber matemático y se estudia cómo los métodos de enseñanza permiten alcanzar cierta comprensión de ellos. En este sentido no hay un cuestionamiento hacia la pertinencia de los significados que subyacen a dicho saber escolar, ni a su estructuración formal desvinculada de los contextos que le dan sentido al conocimiento en el desarrollo del pensamiento matemático. Esta situación se vive con claridad en el área de la trigonometría educativa.

En el marco de un curso de posgrado en matemática educativa, dirigido a profesores en activo, nos propusimos la problematización de un saber escolar, la razón trigonométrica, buscando más allá de éste los significados que le son propios. Nos situamos en un escenario histórico, pues si bien el profesor reconoce que en *en sus orígenes la Trigonometría trata con el cálculo de cuerdas y no de las razones*, suele desconocer las problemáticas, los contextos, las circunstancias y las condiciones donde se trata con esas cuerdas; pero sobre todo nos situamos en este

escenario para provocar un cambio de foco: de centrarse en la razón trigonométrica a atender la construcción de la *cantidad trigonométrica*.

### **El papel de la historia en la formación docente**

Los resultados obtenidos de usar la historia de las matemáticas en la escuela, con alumnos o con profesores, se relacionan al cómo se usa más que al rol de la historia en sí misma (Furinghetti, 2007). Es decir, el resultado depende del método que se usa para incorporar la historia en la educación matemática.

La historia de las matemáticas inserta en la formación de profesores ha sido un elemento variable, que ha dependido de países, tradiciones matemáticas, tradiciones de enseñanza, épocas, entre otros (ver la revisión de Schubring et al, 2000). La historia para *humanizar* o dar un *contexto* a la matemática, para ampliar la *cultura* matemática, para reconocer *problemas* interesantes o para analizar el *desarrollo o evolución* de los conceptos matemáticos, son algunos de los objetivos que se plantean al introducirla, tanto en cursos con estudiantes como en espacios de formación de profesores.

De particular interés para nuestro trabajo es la propuesta de Furinghetti (2007) que ocupa la historia de las matemáticas para provocar en el futuro profesor una reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos, que lo lleven a un diseño didáctico propio, abandonando la reproducción pasiva del estilo de enseñanza que experimentó siendo estudiante. Se dice entonces que la historia no se introduce *per se*, sino como *mediador* del conocimiento a enseñar; se usa la historia para *reorientar*, es decir, para hacer que el profesor experimente de nuevo la construcción de objetos matemáticos.

Sin embargo, en nuestro escenario contábamos con profesores *en-activo*, que laboran en distintos niveles educativos, con diversidad de formación profesional y docente, con experiencia profesional y docente en distintos niveles; que están formándose en un posgrado en matemática educativa, en la modalidad a distancia en línea. Es decir, adultos que trabajan y estudian en forma simultánea, que buscan un continuo ir y venir entre su proceso de formación y su quehacer profesional.

Nuestro método para introducir la historia de las matemáticas en este proceso de formación particular está matizado por la visión del posgrado mismo y la línea de investigación a partir de la cual se reconoce al contexto histórico como fuente para la problematización del saber matemático escolar.

## Formación de posgrado en matemática educativa

El posgrado en Matemática Educativa, del CICATA-IPN, nace como un proyecto social no centrado en la masificación (esperanza latente), sino en la diversidad, pues permite reunir por su naturaleza a una muestra diversa de profesores, tanto por los niveles educativos a los que pertenecen, como a las tradiciones culturales regionales o nacionales de sus países de origen (Lezama, 2009). El proyecto académico, desde la disciplina, ha sido nuestro eje rector y hemos ido actualizando, a la par de las posibilidades tecnológicas de la institución, nuestros formatos de diseño e interacción para lograr nuestros objetivos. En este sentido no soslayamos los recursos tecnológicos a herramientas operativas, sino que las integramos a un ambiente de aprendizaje para constituir un nuevo escenario educativo, donde si bien no son el fin, tampoco son solo el medio.

Asumimos a la formación en matemática educativa como el espacio donde el profesor de matemáticas reconoce a la disciplina como el campo de saber que aporta a su práctica docente y al cual contribuye con su experiencia en el aula. Un punto de partida para conseguir dicho reconocimiento es, desde nuestra perspectiva, hacer una clara distinción entre la Matemática, la Matemática Escolar y la Matemática Educativa,

En la matemática educativa se reconoce a la matemática escolar como un cuerpo autónomo de conocimientos que toma a la matemática como su saber de referencia, pero se distingue de ella, no solamente por su explícita pretensión didáctica, sino también por el profundo cambio de su epistemología (Cantoral, 1995).

Esta distinción no busca descartar la perspectiva desde ninguna de ellas, sino entender lo que cada una aporta al entendimiento del fenómeno social de interés: el *fenómeno didáctico*. Así, reconociendo que la *matemática escolar* está normada por un discurso hegemónico que subyace a los paradigmas de enseñanza, nos propusimos la problematización de la razón trigonométrica, a partir del análisis de la *fuentes original* en donde se le *institucionaliza* por primera vez como fundamento matemático de la teoría astronómica en el Almagesto de Ptolomeo.

Aquí, la historia también se introduce como un mediador, pero que *problematiza* al saber matemático haciendo uso de herramientas teórico-metodológicas construidas al seno de la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa.

## Metodología para el análisis de la historia

Furinghetti (2007), con el objetivo de culminar con un diseño de clase, realiza un experimento en cuatro fases y finaliza reconociendo que el proceso que lleva al futuro profesor al diseño se sintetiza en:

- Lectura de los programas de matemáticas
- Lectura de la historia en un *modo evolucionista*
- Distinción de las raíces cognitivas del concepto
- Confrontación de las raíces cognitivas en la historia y en los programas de matemáticas, mediante un *modo situado* de leer la historia
- Diseño de secuencias de enseñanza

Nuestra experiencia por otro lado tuvo que considerar elementos de diseño instruccional para la modalidad a distancia y la integración de acercamientos teórico-metodológicos a la historia en el contexto de la matemática educativa. Una exposición detallada del diseño del curso puede consultarse en (Montiel, 2010), aquí lo resumiremos en momentos:

Momento 1. Familiarización con el tópico escolar, no solo a nivel de dominio de contenido. Se realizó un análisis de textos orientado hacia la identificación de procesos de enseñanza, hacia distinguir el estatus *institucional* de este contenido escolar, es decir, el *saber a enseñar*.

Momento 2. Primer análisis del Libro I, Capítulo IX: *Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo* (traducido al español) del Almagesto de Ptolomeo, acompañado de los elementos teóricos sobre la construcción social del conocimiento trigonométrico que se propone en Montiel (*en prensa*).

Momento 3. Acercamiento a las herramientas teórico-metodológicas para hacer investigación en el marco de la Socioepistemología (Buendía y Montiel, *en prensa*, 2009) y para hacer investigación socioepistemológica en escenarios históricos (Espinoza-Ramírez, 2009).

Momento 4. Segundo análisis de la fuente original, considerando los factores de construcción social y reconociendo los elementos de resignificación de lo trigonométrico.

Para entender cómo se usó un concepto en un cierto periodo histórico, qué problemas resolvía y qué impedimentos redujeron sus alcances, es necesario evitar que se busquen en el pasado solo las raíces del conocimiento moderno, tal como los conocemos (enseñamos) actualmente. Maltese (2000) reconoce que para embarcarse en esta tarea es necesario poner

el objeto de la investigación en el marco de una cierta época, buscando su influencia en prácticas científicas previas e inclusive ir más allá y dar luz de los procedimientos y los algoritmos para descifrar la forma en la que se empleaba. Esta mirada se logró en el paso del momento 3 al momento 4, es decir, la introducción de un episodio histórico no basta, por sí mismo, para que se analizaran los significados y los usos que subyacen a lo trigonométrico y que nos proporcionan los elementos para problematizar el qué enseñamos en trigonometría.

### **Problematización y resignificación de lo trigonométrico en un escenario histórico**

Se revisó toda *producción* de los estudiantes-profesores haciendo uso de todos los registros generados en el curso: foros, blogs, tareas, participación en la Wiki e incluso las conversaciones vía chat o los correos enviados en forma individual; en donde se evidencie reflexión alrededor de *lo trigonométrico* en el episodio histórico elegido o en situación escolar.

El análisis que hicimos de estas producciones se enmarca en el paradigma de la investigación cualitativa expuesto en (Álvarez-Gayou, 2009), nos interesó comprender la realidad de un momento particular del proceso de formación de nuestros estudiantes, e interpretar dicha realidad con base en nuestro marco teórico, la socioepistemología y en considerar a los estudiantes dentro de su propio marco de referencia.

Los estudiantes lograron la problematización de la trigonometría escolar al:

- confrontar su dominio del conocimiento trigonométrico con la estructuración institucionalizada de lo trigonométrico en una época y una obra ajenas a su quehacer,
- identificar distintas 'orientaciones' didácticas en libros de texto, y al
- articular la teoría y sus resultados con su práctica docente.

Sin embargo, no se logró que todos reconocieran qué del desarrollo geométrico hace de lo construido un conocimiento trigonométrico, es decir, que identificaran que la cantidad trigonométrica surge de desentrañar la *naturaleza de la relación* ángulo-cuerda (como bien señaló ya Wentworth, 1883).

Identificamos la *resignificación* de lo trigonométrico cuando el estudiante-profesor reconoce el contexto de construcción geométrica en donde surge la cantidad trigonométrica, en relación a su práctica docente:

*Siento que si hubiese más tiempo en la escuela para plantear a los estudiantes actividades, de tal manera que ellos mismos puedan construir así geoméricamente las cantidades trigonométricas, tal vez existiría otra relación con la trigonometría.*

y establece que los conocimientos necesarios para dicha construcción ya no se restringen a la proporcionalidad, los triángulos semejantes y la medida de ángulos:

*Los conocimientos y herramientas matemáticas necesarias para dicha construcción:*

Herramientas matemáticas: Círculo, cuerda, arco, razones/proporciones.

Conocimientos matemáticos: Círculo, semicírculo, circunferencia, diámetro, arco, cuerda, sector, figuras geométricas (cuadrado, triángulo, rectángulo, pentágono, hexágono, decágono y dodecágono, cuadrángulo), ángulos (recto), línea, longitud, radio, proporciones, sistema sexagesimal (grados), semigrados (minutos, segundos y terceros).

### Reflexiones finales

Problematizar el saber escolar desde un escenario histórico, utilizando fuentes originales, nos obliga a confrontar la obra 'matemática' con la obra 'escolar' haciendo evidente que los procesos de transposición didáctica pueden sintetizar el saber al grado de hacerlo irreconocible con una mirada actual. Con ello no pretendemos que los saberes originales se lleven al aula, sino reconocer cómo el contexto, el lenguaje, los problemas y los paradigmas de una época hacen de ciertos saberes un conocimiento que se construye y se comparte en grupos humanos específicos; y cómo para acercarse a él es necesario reorganizar formas de pensamiento.

En la siguiente figura mostramos cómo una estudiante-profesora hace uso de la construcción verbal de Ptolomeo y las notas del traductor para hacer una reconstrucción geométrica en su propio lenguaje, que le permita continuar con el resto de las construcciones geométricas del Almagesto.

Handwritten student work showing the reconstruction of a geometric construction from Ptolemy's Almagest. The work includes a verbal analysis of the text, a geometric diagram of a rectangle with an inscribed square, and a note from the translator.

Analysis de la expresión:  
 "El rectángulo que está encerrado bajo CF y FD, junto con el cuadrado de la línea DE es igual a aquellos cuadrados que se forman con las líneas BD y DE."

Construcción verbal de Ptolomeo

Cuadrángulo:

②

Diagram showing a rectangle with vertices D, E, C, F. A square is inscribed within it, with vertices D, E, and another point on the right side. Calculations:  $4.5 \times 4.5 = 20.25 u^2$  and  $14.5 \times 5.5 = 79.75 u^2$ .

Traducción geométrica de EP3

(con Notación actual:  $CF \cdot FD + ED^2 = EF^2 = EB^2$ )

Nota del traductor

Fig. 1 Extracto de la reconstrucción que hizo una estudiante-profesora del Almagesto de Ptolomeo

El lenguaje geométrico-euclidiano (verbal) fue el primer obstáculo en el análisis del capítulo. Sin embargo, esto los llevó a reconocer que éste es en realidad su contexto de origen y que ello pudiera explicar las dificultades que el estudiante tiene del paso de la razón (con el método del triángulo rectángulo) a la función (con el método del círculo trigonométrico), el hecho de despojarlo de su contexto natural.

El binomio Historia-Educación referido a las matemáticas ha encontrado diversas manifestaciones exitosas. Buendía y Montiel (en prensa, 2009) lo han usado para reconocer en la primera elementos que contribuyan en (1) la explicación de fenómenos de aula y (2) en la construcción de epistemologías de prácticas que condicionan la construcción de conocimiento matemático. Las autoras ponen en evidencia cómo desde la aproximación socioepistemológica se desarrollan estrategias de investigación a través de la historia para determinar aquellas circunstancias que dan cuenta de porqué hoy tratamos con la matemática escolar como lo hacemos.

Ahora, el binomio como mediador en la formación docente, gracias a la vinculación teoría-práctica educativas que hace el propio profesor, provee de nuevos elementos para el rediseño del discurso trigonométrico escolar.

### Referencias bibliográficas

Almagesto. Libro I, Capítulo IX: Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo [traducido al español]

Alvarez-Gayou, J. (2009). *Cómo hacer Investigación cualitativa. Fundamentos y Metodología*. México: Paidós Educador.

Buendía, G. y Montiel (en prensa). *From history to research in mathematics education. Socio-epistemological elements for trigonometric functions*. Capítulo aceptado en V. Katz y C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1287-1296. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, R. Farfán (Ed.), Ediciones de la UNAM, Vol. I, Cap. Plenarias, I – 10. Ministerio de Educación, La Habana, Cuba.

- Espinoza-Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies of Mathematics* 66: 131-143.
- Lezama, J. (2009). Posgrado a distancia en línea en matemática educativa, una alternativa de formación de profesores. La propuesta del Instituto Politécnico Nacional para América Latina. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1585 – 1594. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Maltese, G. (2000). On the Relativity of Motion in Leonhard Euler's Science. *Archive for History of Exact Sciences* 54(4), 319-348.
- Montiel, G. (2010). Problematizando la trigonometría escolar en un curso de posgrado en línea en matemática educativa. En G. Buendía (ed.) *A diez años del Posgrado en Línea en Matemática Educativa en el IPN*, 141-174. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.
- Montiel, G. (en prensa). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. Aceptado para su publicación. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C.-I., El Idrissi, A., Gispert, H., Heiede, T., et al. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI study* (pp. 91–142). Boston, MA: Kluwer.
- Wentworth, G. (1883). *Plane and Spherical Trigonometry*. Ginn Heath & Co., Printers.