UNA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL NÚMERO COMPLEJO Y SU OPERATIVIDAD

Rocío Antonio Antonio, Gustavo Martínez Sierra
Universidad Autónoma de Guerreo México
CICATA del IPN
antonny81@gmail.com, gmartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: medio

Resumen. *En esta investigación desarrollada desde la perspectiva teórica de la aproximación socioepistemológica, se presenta, la producción y puesta en escena de una secuencia basada en la ingeniería didáctica. De manera específica, este trabajo indaga sobre qué alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, bajo la hipótesis de que su significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática. El análisis de la producción de los estudiantes, al trabajar una secuencia de actividades diseñada por nosotros en base a la hipótesis anterior, da evidencia de que a pesar que los estudiantes insistían en que "las raíces cuadradas de números negativos no existen", nuestra secuencia los indujo a operar con ellos.*

Palbras clave: socioepistemología, número complejo, ingeniería didáctica, convención matemática, ecuación de tercer grado

Introducción

En trabajos previos de (Martinez-Sierra, 2005) se ha desarrollado algunas nociones teóricas que han sido útiles, por un lado, en la explicación de algunos fenómenos didácticos y, por el otro, en la interpretación de procesos de construcción de conocimiento. En particular, en el plano de la construcción de conocimiento, se ha dado evidencia de que ciertas piezas de conocimiento, a las que han llamado *convenciones matemáticas* (una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados), pueden ser entendidas como producto de un proceso de articulación matemática o de un proceso de integración de conocimientos.

Siguiendo las primicias de (Martínez-Sierra, 2005), de manera específica, este trabajo indaga sobre qué alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, bajo la hipótesis de que su significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática. Al respecto, a partir de un análisis histórico-epistemológico de la búsqueda de solución general de ecuaciones de tercer grado, de la forma $y^3 + py + q = 0$, afirmamos que *el significado del número complejo, en un plano algebraico, puede ser interpretado como elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones* (Antonio, 2008).

Para contrastar empíricamente la hipótesis anterior se procedió metodológicamente de la siguiente manera: 1) se diseñó una secuencia de actividades, en donde se *traspuso* (en sentido de Chevallard (1997) tal hipótesis constructiva, a polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$, 2) se experimentó la secuencia con 10 estudiantes del nivel medio superior mexicano (15 a 18 años) y 3) se analizó la producción de los estudiantes.

Aproximación socioepistemológica

La socioepistemología es una aproximación sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del saber, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004). Más precisamente, dentro de la teoría socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes dimensiones interdependientes son las que condicionan/determinan la construcción y la difusión del conocimiento matemático: las dimensiones cognitivas, didácticas, epistemológicas y sociales.

Un acercamiento epistemológico de los números complejos a través del proceso de convención matemática

A lo largo de la historia se identifican cuatro grandes etapas, caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos (Gómez y Pardo, 2005): 1) *Algebraica***.** Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, 2) *Analítica*. Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, 3) *Geométrica*. Introducción de un eje de imaginarios que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1 y 4) *Formal*. Formalización de los números complejos. Nuestro análisis histórico-epistemológico se centra en el contexto de la primera etapa, la algebraica.

Se menciona que en 1545 (Stillwell, 1989 y Dunham, 1999), Cardano publicó en su *Ars Magna* el método de solución de Tartaglia (conocida actualmente como el método de Cardano) la cual para el caso $y^3+py+q=0$ toma la forma: $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$, en términos modernos la fórmula implica a los números complejos cuando $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Sin embargo, no era posible considerar esto como un caso sin solución, *porque se sabía que una ecuación cúbica siempre tiene al menos una raíz real*. Así la fórmula de Cardano plantea el problema de convenir un valor real, encontrado por la inspección, digamos, con una expresión de la forma: $y=\sqrt[3]{a+b\sqrt{-N}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{-N}}$ (siendo *N* un número natural).

Pero, Cardano no hizo frente a este problema (la simplificación de $\sqrt[3]{a\pm b\sqrt{-N}}$, en su *Ars Magna*), él consideró que estos números eran "tan sutiles como inútiles", en el llamado caso irreducible de la ecuación cúbica, la cual tiene tres soluciones reales que aparecen como la suma o diferencia de lo que ahora llamamos números complejos.

Esta dificultad fue resuelta en el siglo XVI por Rafael Bombelli, cuya *Algebra* apareció en 1572 (Struik, 1986). De esta manera Bombelli calculó el álgebra formal de números complejos (llegando a formular las cuatro operaciones con los números complejos en la forma actual) con el objetivo particular de reducir expresiones $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-N}}$ a la forma $c+d\sqrt{-1}$, así su método le permitió mostrar la "realidad" de algunas expresiones que son resultado de la fórmula de Cardano. Por ejemplo, la solución, dada por la fórmula de Cardano, de $y^3=15y+4$ es

$$y=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \text{ --------------------- (I)}$$

Por otra parte, la inspección da la solución *y* = 4, Bombelli tenía el presentimiento que las dos partes de "*y*" en la fórmula de Cardano eran de la forma $2+n\sqrt{-1}$, $2-n\sqrt{-1}$ y él encontró por cubos estas expresiones formalmente, usando $\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=(2)^3+3(2)^2\left(\sqrt{-1}\right)+3(2)\left(\sqrt{-1}\right)^2+\left(\sqrt{-1}\right)^3=2+11\sqrt{-1}$$

Esto ciertamente sería:

$$y=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1} \text{ --------------------- (II)}$$

$$y=\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1} \text{ ---------------------- (III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) se obtiene:

$y=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$ por lo tanto $(4)^3=15(4)+4$

En conclusión, nuestra hipótesis de construcción de conocimiento se basa en la consideración de que la primera formulación en relación a los números de la forma $A+B\sqrt{-N}$ (Siendo *N* un número natural) fueron *aceptados* en un dominio limitado algebraico; porque ellos aparecieron como útiles en la solución de ecuaciones de tercer grado de la forma $y^3+py+q=0$ (y no en las ecuaciones de segundo grado como se presentan en los libros de texto). Nuestra interpretación es que *se aceptó* la existencia de la raíz cuadrada de números negativos, junto a su operatividad, para *articular* una fórmula algebraica: $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$, con el hecho de que una ecuación cúbica siempre tiene al menos una raíz real. Es decir, *la existencia del número complejo puede admitirse a tanto elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones*. A tal proceso lo caracterizamos con lo que hemos llamado *convención matemática*.

Diseño, puesta en escena y análisis de una secuencia de actividades

Para la construcción de la secuencia de actividades a la hipótesis constructiva anterior, la hemos *transpuesto* a polinomios de la forma $x^n-1=0$. De manera particular, el objetivo de la secuencia es *propiciar la aceptación de los números complejos y la operatividad de la raíz cuadrada de números negativos* en estudiantes de nivel medio superior, en un contexto de cálculo de raíces de polinomios, de manera específica, con polinomios de la forma $x^n-1=0$. Nuestra hipótesis es que la aceptación puede apoyarse en la idea de que tales polinomios tienen '*n*-raíces diferentes'; idea que a su vez puede ser apoyada con la aceptación de la operatividad de las raíces cuadradas de números negativos.

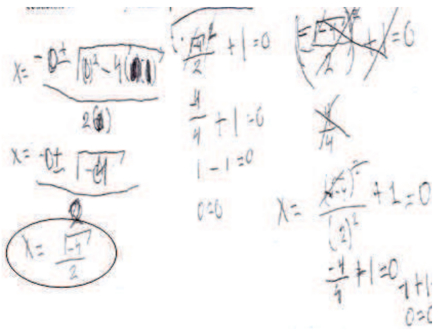
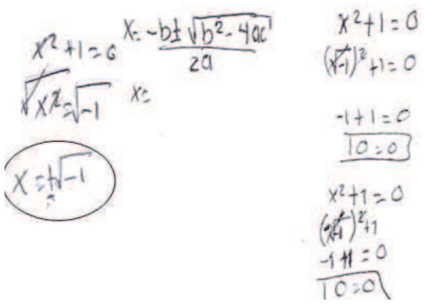
Específicamente, el diseño de nuestra secuencia figura en trece actividades, las cuales están agrupadas en cuatro fases: I. *Recordar* el cálculo de raíces de una ecuación (únicamente con raíces reales), II. *Identificar* el conocimiento previo que tiene el estudiante sobre la raíz cuadrada de un número negativo, III. *Aceptar y operar* con raíces cuadradas de números negativos en el cálculo de raíces; polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$ y IV. Presentar a ***i*****b** como la denotación formal de una raíz cuadrada de un número negativo y su propiedad.

La puesta en escena

La exploración de la secuencia fue realizada en un plantel del nivel medio superior, en la ciudad de Chilpancingo, donde se trabajó con diez estudiantes (6 alumnas y 4 alumnos) de primer grado, en un intervalo de tiempo de tres horas y media. Con los estudiantes se formaron tres equipos de trabajo: dos de ellos contaron con tres estudiantes (equipo 1 y 3) y uno de cuatro integrantes (equipo 2). Aquí únicamente se reportan los resultados del equipo 1 y 2.

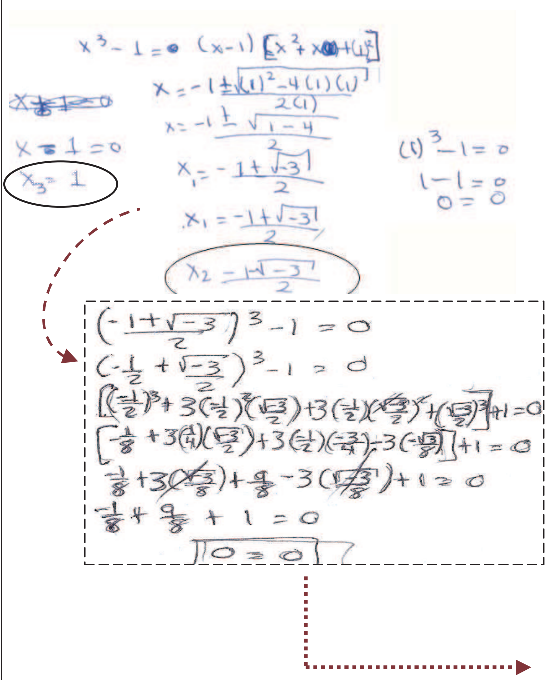
En la producción observamos que los objetivos propuestos de las dos primeras fases (Recordar el cálculo de raíces "reales" y el de identificar el conocimiento previo de las raíz cuadrada de un número negativo) sí se alcanzaron, pero, el objetivo de la tercera fase (el de aceptar y operar con las raíces cuadradas de números negativos) no se alcanzó de manera general; ya que en cada equipo no se llegó abarcar todas las actividades que contempla esta fase, además no todos los integrantes realizaron las operaciones solicitadas en la actividad 9 y 10 (la comprobación de las raíces encontradas), dado al rendimiento de participación que presentaron. En el siguiente apartado se muestra un bosquejo de la producción de los dos equipos de estudiantes, iniciando desde la segunda faseLa producción de los estudiantes

Fase II (Actividades 7 y 8). *Identificar el conocimiento previo que tiene el estudiante sobre la raíz cuadrada de un número negativo* (como la denota y la familiaridad que tiene con ella). En la actividad 8, en el cálculo de las raíces de $x^2 + 1 = 0$ a través de la petición explícita del uso de la fórmula general de segundo grado, el resultado general identificado sobre el conocimiento previo en los dos equipos, es que *"las raíces cuadradas de números negativos no existen"*. En la tabla siguiente mostramos la descripción e interpretación de la producción de los estudiantes.

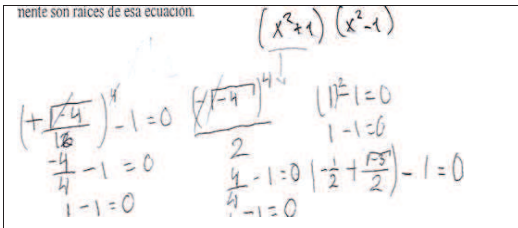
Equipo 1 	Estos estudiantes necesariamente querían obtener el valor de $\sqrt{-4}$, para ello utilizan la calculadora, el cual les marca: "*error*" y concluyen que "*no existe*". Al principio les fue difícil aceptar a este número como solución pero al hacer la comprobación dado a los procedimientos operacionales utilizados (por ejemplo al elevar una potencia a una fracción) y recordando que dependiendo del grado de la ecuación son las raíces a encontrar, concluyen que es "*una raíz con signo menos y otra con signo más*".
Equipo 2 	En este equipo se da dos casos para obtener las raíces de esta ecuación, el primer caso es utilizando la fórmula general tal como se lo pedíamos, y el segundo caso es despejando directamente a ***x*** en la ecuación. En los dos casos argumentan que "no existe la raíz" Al final realizan las comprobaciones y concluyen que "sí son raíces de la ecuación" porque "se pueden igualar".

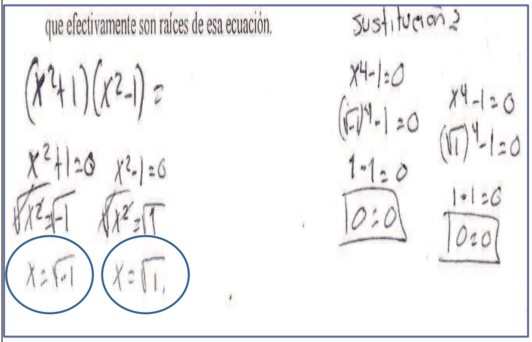
*Fase III (*Actividades. 9, 10, 11 y 12). *Aceptar y operar con raíces cuadradas de números negativos en el cálculo de raíces, de polinomios de la forma* $x^n = 1$. Para motivar a ello se les pide que verifiquen si satisfacen a la ecuación las raíces encontradas. Aquí se utilizan las herramientas del desarrollo de un binomio, factorización y la fórmula general de segundo grado. En las tablas siguientes mostramos la descripción e interpretación de la producción de los dos equipos aquí reportados.

Actividad 9

	Equipo 1 Al igual que en la actividad 8, tratan de simplificar: $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ La reacción que tuvieron estos estudiantes fue peor a la de la actividad 8 con la obtención de este valor y más cuando se les pidió que verificaran si era raíz de la ecuación cúbica; para ellos no fue nada sencillo realizarlo, por los cálculos requeridos, en especial $\left(\frac{\sqrt{-a}}{b}\right)^n$
	Equipo 2 En este equipo solamente una de las integrantes realizó las operaciones de la verificación **y** explicó a los demás las operaciones realizadas, pero no logró que las demás realizaran los cálculos de comprobación.

Actividad 10

	Equipo 1 *Podemos observar que en las dos comprobaciones que se realizaron en la ecuación* $x^4-1=0$, *eliminan directamente la raíz cuadrada con el exponente cuatro y elevan al denominador al cuadrado.*

	Equipo 2 Aquí se observa los cálculos obtenidos por un integrante del equipo. La cual argumenta su comprobación*: "es raíz a la cuatro* $\left(\sqrt{-1}\right)^4 = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ *y las raíces iguales se suman y tienes doble raíces (cuatro raíces), ésta y ésta sería* $\left(\sqrt{-1}\right)^2$ *y ésta igual* $\left(\sqrt{-1}\right)^2$*, esta se elimina, menos por menos da más, sería uno, menos uno, sería cero igual a cero* $1-1=0$*".*

A manera de conclusión

En los resultados de la puesta en escena se evidencia de que a pesar que los estudiantes insistían en que "*las raíces cuadradas de números negativos no existen",* nuestra secuencia los indujo a operar con ellos para encontrar las raíces de algunos polinomios propuestos en las actividades y así, aceptándolos de manera operativa, como por ejemplo, en las actividades 8 y 9 cuando verifican que los valores obtenidos si son raíces. El argumento básico es que "se pueden igualar", es decir, que al sustituir los valores en la ecuación su resultado es cero. Lo anterior considerando que no comprobaron todos los valores obtenidos en las ecuaciones, solamente algunos de ellos. Consideramos que con estas evidencias, nuestra secuencia de actividades da indicios de que es posible construir el significado del número complejo y su operatividad en tanto el proceso de convención matemática (Antonio, 2008).

Referencias bibliográficas

Antonio, R. (2008). *Una construcción del significado del número complejo y su operatividad a través del proceso de convención matemática.* Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Cantoral, R. & Farfán, R.M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathematiques 24*(2.3), 137-168.

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Dunham, W. (1999). *The Master of Us All.* EEUU: Mathematical Association of America.

Goméz, A. & Pardo, T. (2005). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM,* pp.251-260.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 195-218.

Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its history*. New York: Springer-Verlag.

Struik, D. J.(1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.