LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL MEDIANTE EL USO DE ORDENADOR

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado, Resolución de problemas, Tecnología avanzada , Visualización Nivel: Superior

Resumen. *El trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos ha tenido como principal fuente de inspiración a la visualización, y ésta ha jugado un papel relevante en el desarrollo de las ideas y conceptos del cálculo infinitesimal. Sin embargo, existe una tendencia actual a considerar que las matemáticas no son visuales, que en la enseñanza universitaria, se pone de manifiesto a través de un enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo.*

Con el propósito de mejorar las prácticas educativas, diseñamos una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral a que incorpora la utilización del ordenador como recurso didáctico facilitador de los procesos de enseñanza aprendizaje.

Palabras claves: visualización, experimentación, argumentación, extrapolación

Introducción

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva o geométricamente y cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en su utilización para la resolución de problemas.

Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en el que se mueven. Mediante ellos son capaces de relacionar, de modo muy versátil y variado, constelaciones frecuentemente muy complejas de hechos y resultados de su teoría y, a través de tales redes significativas, son capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con los que se enfrentan (Guzmán, 1996). Visualizar, en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la Universidad, tiene que ver con la capacidad de crear imágenes ricas que el individuo puede manipular mentalmente, puede transitar por diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, proporcionar en papel o pantalla de computadora la idea matemática que está en juego.

El trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos ha tenido como principal fuente de inspiración a la visualización, y ésta ha jugado un papel relevante en el desarrollo de las ideas y conceptos del cálculo infinitesimal. Una de las primeras aproximaciones a los problemas del infinito tuvo lugar en Grecia, a mediado del siglo V a. C., a partir de los problemas de inconmensurabilidad. Luego Arquímedes, a principios del siglo III, propuso un proceso heurístico para calcular áreas, volúmenes y el centro de gravedad de algunos cuerpos geométricos. Recién en el siglo XVII, luego de un largo período de oscuridad, los trabajos matemáticos griegos, traducidos al árabe y luego al latín, salieron a la luz junto con las especulaciones escolásticas medievales sobre el movimiento, la variabilidad y el infinito, y con el álgebra simbólica y la geometría analítica de finales del Renacimiento. Todos ellos formaron la rica amalgama que permitió en ese momento la explosión de la matemática infinitesimal. Cabe mencionar a los principales autores que utilizaron métodos geométricos: Cavalieri y Barrow, y a los que utilizaron métodos analíticos: Descartes, Fermat y Wallis y por supuesto, una mención especial para Newton y Leibniz, quienes culminaron este proceso y fueron nombrados como los descubridores del cálculo infinitesimal (Boyer, 1968).

Sin embargo, en el siglo XX la actividad matemática sufrió la influencia de una corriente formalista, que rechazaba la visualización como herramienta de demostración y análisis. La crisis de los fundamentos de principio de siglo empujó a los pensadores matemáticos hacia el formalismo, hacia el énfasis sobre el rigor, a una cierta huida de la intuición en la construcción de su ciencia. Lo que fue beneficioso para la fundamentación, fue considerado por muchos, bueno también para la transmisión de conocimientos. Las consecuencias para la enseñanza de las matemáticas en general fueron nefastas, pero especialmente para la evolución del pensamiento geométrico.

Desde entonces, las presentaciones no visuales son las más habitualmente utilizadas para comunicar ideas matemáticas. Esta tendencia se fundamenta hoy en la creencia de matemáticos, docentes y estudiantes, que las matemáticas no son visuales (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Como reacción a un abandono injustificado de la geometría intuitiva en nuestros programas, hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática.

Justificación

La algebrización del cálculo diferencial e integral fue un producto de este proceso. En la enseñanza universitaria, se pone de manifiesto a través de un enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo, que se basa en las operaciones algebraicas con límite, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista los conceptos específicos del Análisis, tales como las razones de cambio o la integral definida. Consideramos que las dificultades que presenta el aprendizaje del Análisis Matemático en primer año de la universidad, son atribuibles a esta situación de contexto. Tales dificultades están asociadas al predominio del formalismo en el abordaje de los conceptos y a la ausencia de asociación con un enfoque geométrico.

Anthony Orton ha trabajado durante largo tiempo sobre las dificultades en el aprendizaje del cálculo. Sus investigaciones en la Universidad de Leeds confirmaron que los alumnos tenían dificultades en el aprendizaje de los conceptos de cálculo: la idea de tasa de cambio, la noción de derivada como un límite, la idea de área como el límite de una suma (Orton, 1979). Cornu (1981) arribó a similares conclusiones respecto de la idea de "límite inalcanzable" y Schawarzenberger y Tall (1978) respecto de la idea de "muy próximo a".

Ervynck (1981) no sólo ha documentado las dificultades de los alumnos en comprender el concepto de límite sino que resalta la importancia de los procesos de visualización mediante aproximaciones sucesivas. En este sentido, los habituales gráficos encontrados en los libros de cálculo tienen dos problemas: son estáticos, con lo cual no pueden transmitir la naturaleza dinámica de muchos de los conceptos, y además poseen una variedad limitada de ejemplos, uno o dos generalmente, lo cual conduce a desarrollar en el alumno una imagen restringida del concepto en cuestión. (Tall y Sheath, 1983)

En este sentido, los alumnos no logran comprender el concepto de integral definida de una función como el área bajo la curva de la misma, pues no visualizan cómo se construye esta área según una suma, conocida habitualmente como Suma de Riemann (si bien Fermat, en 1629, había presentado un método geométrico que permitía aproximar con muy buena precisión el área bajo la curva $y=x^n$ en un intervalo dado, utilizando infinitos subintervalos sobre la abscisa y sumado las áreas de los sucesivos rectángulos con base en la abscisa y altura dada por la ordenada del punto. (Boyer, et. al)).

Atendiendo a la perspectiva de los procesos de enseñanza, cabe notar que los docentes habitualmente introducen el concepto en forma expositiva, eludiendo el verdadero propósito que consiste en obtener aproximaciones cada vez más precisas. También es habitual que se realice un abordaje simplista del concepto y sin aparente conexión con las aplicaciones del cálculo integral, lo cual obstaculiza la comprensión por parte de los alumnos, y por ende, la resolución de problemas referidos al cálculo de áreas, longitud de curvas, volumen de sólidos de revolución; y los referidos a aplicaciones a la ingeniería: trabajo, presión, fuerza hidrostática y centros de masa.

El uso del ordenador en el aula puede resultar un recurso didáctico facilitador de los procesos de enseñanza aprendizaje para:

a) transmitir la naturaleza dinámica de un concepto a partir de la visualización,

b) coordinar los distintos registros de representación de un concepto,

c) la creación de medios personalizados que mejor se adapten a los requerimientos pedagógicos de la propuesta.

Metodología

Con el propósito de mejorar las prácticas educativas, diseñamos una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en el contexto de primer año de la Universidad que atendiera a la propuesta de utilización del ordenador tal como se indicó en los items *a, b* y *c* enumerados anteriormente. En ese sentido:

- Se diseñó un paquete de software que permitiese el abordaje del cálculo integral a partir del concepto de integral definida asociado al área bajo la curva, desde una perspectiva geométrica, atendiendo a los procesos que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas,
- Se seleccionaron los problemas a resolver por los alumnos en forma tal que su abordaje permitiese establecer un puente entre la conceptualización de la integración y los problemas de aplicación relacionados con la ingeniería. En ese sentido, el uso del ordenador permitió disponer de una gama muy amplia de problemas, dónde la elección no fue condicionada por las dificultades del cálculo algebraico.
- Se diseñó un conjunto de actividades orientadas a promover que los alumnos conjeturen, experimenten, analicen retrospectivamente, extrapolen, argumenten, pregunten a sus pares y a sus docentes, se comprometan en el desarrollo de sus actividades, discutan sobre sus propios errores y evalúen su desempeño.
- Se rediseñaron las técnicas de evaluación, de tal manera que el análisis de las producciones, facilitase al alumno el poder reflexionar sobre sus propios errores y, para que a la hora de realizar las evaluaciones, dispongan de las mismas herramientas que utilizaban en clase.

Implementación de la propuesta

Esta propuesta fue implementada durante el período julio-noviembre 2006 en un curso de Ingeniería Eléctrica, de la Facultad Regional General Pacheco, de la Universidad Tecnológica Nacional. La misma consistió en la distribución del alumnado en pequeños grupos de no más de tres alumnos, los cuales trabajaron en varios subproyectos. Cada uno de ellos incluyó un número importante de problemas de modo que los alumnos pudieran experimentar, conjeturar y obtener conclusiones sobre la resolución de problemas mediante un software diseñado.

A modo de ejemplo, presentamos el primer subproyecto.

Subproyecto Nº 1: Abordaje del concepto de integral definida por aproximaciones sucesivas

En la 1º actividad se solicita a cada grupo de trabajo que estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos x$, con $-\pi \leq x \leq \pi$, utilizando primero 10 rectángulos, luego 100 y luego 1000. A continuación se les pide que argumenten acerca de la convergencia de las aproximaciones. En un ítem posterior, con el propósito de descubrir las relaciones entre las aproximaciones por defecto-exceso y los intervalos de crecimiento-decrecimiento de la curva, se les solicita que modifiquen el intervalo de estudio, por ejemplo $[0, \pi/4]$, y que analicen los valores obtenidos en el área por defecto y exceso.

En la 2º actividad de les solicita que analicen la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: *"Las aproximaciones por defecto al valor del área bajo la curva, requieren considerar los puntos muestra a la izquierda de cada subintervalo, así como las aproximaciones por exceso requieren considerar los puntos muestra a la derecha de cada subintervalo."*

Luego deben proponer, con el auxilio del software, ejemplos que sustenten su argumentación.

En la 3º actividad cada grupo debe analizar la convergencia del área bajo la curva de diferentes funciones, incluso algunas no continuas, en el intervalo considerado, y luego exponer sus conclusiones.

Cada grupo debe presentar un informe con los resultados obtenidos y los archivos generados con el software en disquete o unidad de almacenamiento removible.

En las figuras 1 y 2 se muestran dos de las vistas obtenidas con la utilización del software. La primera corresponde a una aproximación con 10 subdivisiones y la segunda con 100.

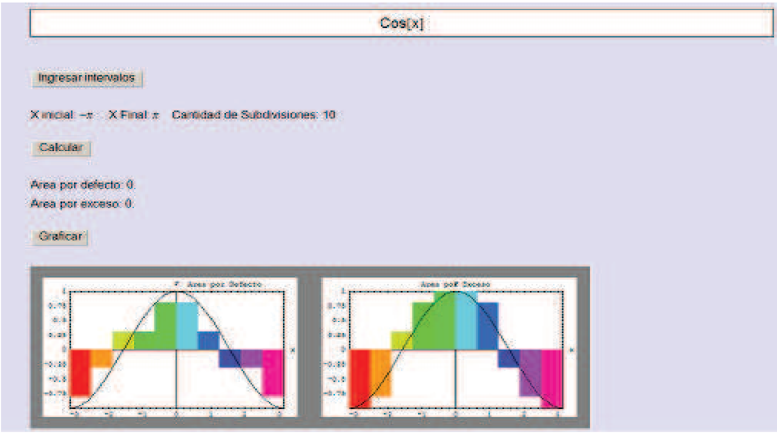

Figura 1

Captura de la pantalla del software de conceptualización de integral definida, calculando área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos x$, *con* $-\pi \leq x \leq \pi$, *utilizando 10 subdivisiones.*

Los restantes subproyectos que formaron parte de la propuesta, los cuales no se exponen por razones de espacio, fueron:

Subproyecto Nº 2: Familia de integrales,

Subproyecto Nº 3: Teorema fundamental del cálculo,

Subproyecto Nº 4: El área entre dos curvas,

Subproyecto Nº 5: Aplicaciones de la integración.

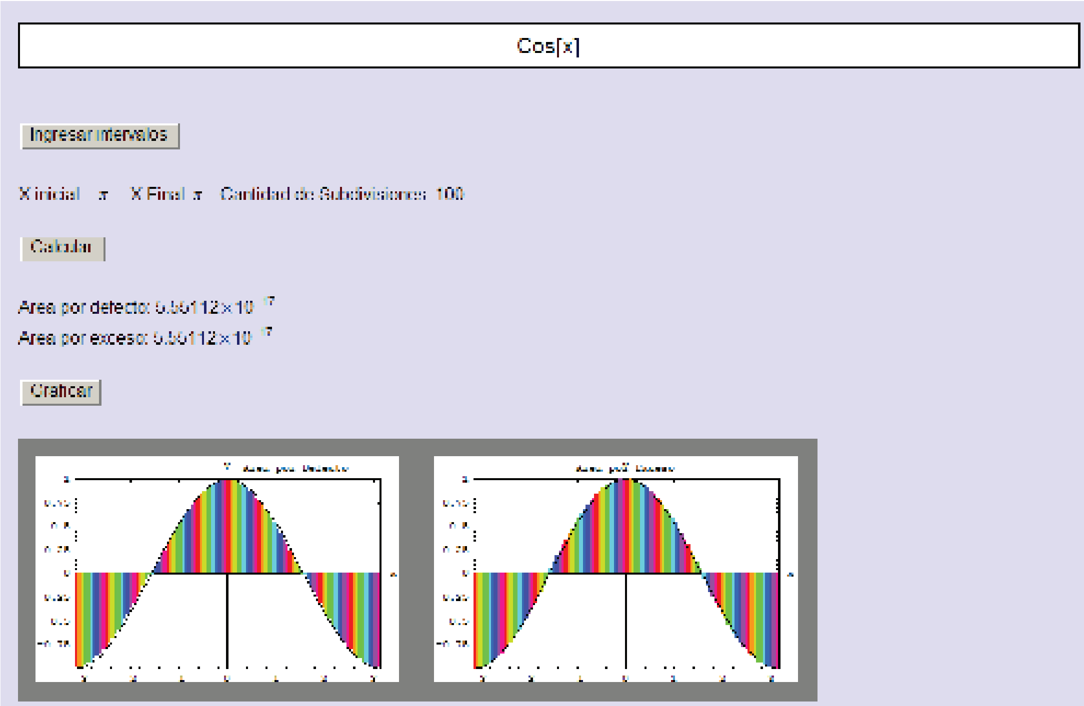

Figura 2

Captura de la pantalla del software de conceptualización de integral definida, calculando área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos x$, *con* $-\pi \leq x \leq \pi$, *utilizando 100 subdivisiones.*

Conclusiones

La realización de las actividades requirió del uso de los paquetes de software desarrollados ad-hoc. Los alumnos debieron graficar en numerosas oportunidades, modificar sus conjeturas, proponer nuevas soluciones, experimentar, analizar retrospectivamente los resultados obtenidos, proponer nuevas soluciones. Consideramos que es importante que los alumnos puedan interpretar consistentemente los resultados obtenidos, tanto algebraica, como numérica ó gráficamente.

En segundo lugar, creemos necesario el desarrollo de nuevos talleres capacitación. La infraestructura técnica requerida exige que los profesores y los alumnos tengan acceso a las nuevas tecnologías y que tengan la suficiente destreza para usarlas. Además, los profesores de otras áreas necesitan reflexionar sobre cómo hacer uso de la tecnología en la enseñanza de su propia asignatura.

También será necesario atender al afianzamiento de la infraestructura social. Las nuevas tecnologías o los aprendizajes asociados al uso de un software deben integrarse a los procesos educativos esenciales en vez de constituir una actividad aislada. El currículo, la organización y la estructura de los cursos y las prácticas evaluadoras deben apoyar la nueva cultura de aprendizaje en colaboración y construcción del conocimiento. Sirve de muy poco que nuestros alumnos aprendan a resolver problemas en el área de las ciencias, haciendo uso de herramientas informáticas, si luego en materias de años superiores se les exige que resuelvan integrales haciendo uso de intrincados métodos de integración a mano con lápiz y papel, tal como en siglos anteriores.

Finalmente creemos necesario atender al afianzamiento de la infraestructura epistemológica. Los profesores y los estudiantes deben desarrollar una conciencia epistemológica de las diferentes categorías de conocimiento y de los procesos de investigación para comprender el significado de buscar respuestas a través del uso del ordenador. En ese sentido, estamos diseñando y seleccionando problemas integradores para la asignatura Análisis Matemático I, de tal modo que los alumnos, distribuidos en grupos, puedan dar respuesta a los mismos, haciendo mención sobre cómo se llevaron a cabo los procesos de indagación y conjeturación, cuáles fueron las experiencias realizadas, etc.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. Nueva York: J. Wiley. (Traducido al castellano en Madrid: Alianza.)

Cornu, B.(1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. En *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME,* (pp. 322-326). Grenoble, France.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics. MAA Notes 19*, 25-37.

Ervynck, G. (1981). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function. En Actes du Cinquieme Colloque du Groupe Internationale PME*, (pp. 330-333). Grenoble, France.*

Guzmán, M (1996). El rincón de la pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. *Elementos básicos del Análisis*. Madrid: Pirámide.

Orton, A. (1979). An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. En *Cognitive Development. Research in Science and Mathematics,* (pp.201–215). Gran Bretaña: Universidad de Leeds

Schwarzenberger, R., Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Teaching*, (82), 44–49.*

Tall, D., Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 357–362). Israel.