

## MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO EN UN AMBIENTE TECNOLÓGICO: UNA CATEGORÍA DE MODELACIÓN-GRAFICACIÓN PARA EL CÁLCULO

Liliana Suárez Téllez, Francisco Cordero Osorio

CINVESTAV-IPN

lsuarez@cinvestav.mx

Campo de investigación: Modelación matemática,  
Socioepistemología

México

Nivel: Superior

**Resumen.** *El resultado de esta investigación es el planteamiento de una epistemología para la modelación escolar caracterizada a través de un uso de las gráficas. Esta epistemología está conformada por dos aspectos de construcción social de conocimiento, el funcionamiento, es decir, aquellas circunstancias relacionadas con el uso y la modelación, que hacen de un conocimiento útil para resolver un problema o para integrar una teoría y la forma, es decir, las clases de tareas que quedan determinadas por el funcionamiento pero también determinan nuevas formas y funcionamientos.*

**Palabras clave:** modelación, movimiento, modelación-graficación, socioepistemología

### Introducción

La Matemática Educativa como escuela de pensamiento requiere de la conformación de grupos de investigación que crucen las fronteras de instituciones y países. En este escrito reportamos las conclusiones de uno de los proyectos de la líneas de Modelación y Tecnología (MyT) que forma parte un programa de investigación en el que participan profesores e investigadores de Argentina, Chile y México y tiene tres ámbitos de reflexión: lo epistemológico, lo científico y lo social (MENS, 2006). La línea de MyT toma como uno de sus marcos de referencia a la categoría de modelación-graficación discutida en Cordero (2006a) y desarrollada por Suárez (2006) para la modelación del movimiento en un ambiente tecnológico. Los antecedentes de nuestro proyecto están conformados por un Estado del Conocimiento de la modelación y la graficación como objetos de estudio dentro de la Matemática Educativa. La modelación se ha estudiado en su relación con la variedad de representaciones ‘más accesibles’ y que ayuda a la comprensión de los conceptos matemáticos (Molyneux-Hodgson et al, 1999). Es nuestra investigación se

1046

avanza hacia considerarla como una herramienta que transforma tanto la matemática como el fenómeno que estudia (como lo considera Arrieta, 2003). La graficación se ha investigado en relación con el estudio de las funciones (Leinhardt et al, 1990). Nuestra investigación estudia el ‘uso de las gráficas’ que resignifica la variación en fenómenos de cambio.

### La investigación

Desde una perspectiva socioepistemológica se formula un marco de referencia que dé cuenta de la articulación de las características de la modelación y de la graficación para la construcción de las ideas del cambio y la variación. Este marco está centrado en las características que se identifican en el estudio epistemológico como aquellas que permitan la constitución social de tales conceptos, “en ‘aquello’ que hace que el conocimiento sea así y no de otra manera. El ‘aquello’ es de naturaleza social que reconoce al grupo humano con su organización, su historia, su cultura y su institución que lo lleva a proceder de una manera y no de otra, es su *práctica social* generatriz de su conocimiento” (Flores, 2005).

### Marco Teórico

La aproximación socioepistemológica consiste en el estudio sistémico del uso del conocimiento matemático en situaciones específicas. Se reconoce una distinción entre el funcionamiento de una actividad matemática, la que realizan los matemáticos en su carácter de constructores de conocimiento matemático en su comunidad, y la actividad humana, la que realiza una persona haciendo uso de conocimiento matemático para responder preguntas de su vida diaria o profesional. Podemos ver que la primera está incluida en la segunda, sin embargo delimitamos la naturaleza de la primera ya que está dada no sólo por la naturaleza misma del conocimiento sino por el conjunto de aspectos

que norman el quehacer de un matemático en su vida profesional. De tal manera, en la actividad humana no se asignan objetos matemáticos a una realidad separada sino que dependen del contexto en el que se presente. La distinción entre actividad humana y actividad matemática desplaza la centración en los conceptos como la parte central de la construcción de conocimiento matemática hacia las actividades que implicar hacer de las matemáticas una herramienta para modelar. Se concluye la búsqueda de esas categorías basadas en estudios de uso. Los elementos para el diseño de las acciones didácticas tiene como núcleo la construcción de un marco epistemológico del conocimiento matemático que se llamará *epistemología* del contenido en cuestión (Cordero, 2001). La construcción de este marco será a través de las explicaciones que se logren del funcionamiento y la forma (Cordero y Flores, 2007) del conocimiento asociado al concepto matemático en cuestión. Este marco está compuesto de significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos. Esta mirada socioepistemológica da elementos para formular un nuevo estatus para la modelación y para la graficación, un estatus que las orienta como generadoras de conocimiento más que como habilidades o actividades. De esta forma proponemos una *categoría de modelación-graficación* que manifiesta la resignificación de la variación en situaciones de modelación del movimiento.

### **La Socioepistemología de la Modelación Graficación**

El estudio de la Obra de Oresme (1379) sobre la figuración de las cualidades proporciona una explicación de transformación de uso de las matemáticas de la época para abordar la problemática de las situaciones de cambio y variación, esta transformación, caracterizada en este trabajo a partir del debate entre el funcionamiento y la forma del uso de las figuras geométricas, aporta los principales elementos de la hipótesis epistemológica sobre el uso de las gráficas en situaciones de modelación del movimiento para resignificar el cambio y la variación y que se describen a continuación:

1048

- Datos epistemológicos, es decir aspectos propios del conocimiento que dan información sobre el uso del conocimiento matemático referido a las formas geométricas y de proporciones para obtener una funcionalidad en situaciones de variación.
- Una génesis del uso de gráficas para modelar situaciones de variación y cambio, en particular para modelar el movimiento (M-M).
- Una articulación de los datos epistemológicos (DE) aportados en el estudio del uso de las gráficas en el Tratado de Oresme con los aspectos distintivos del binomio modelación-graficación que, como se ha mencionado en el capítulo anterior, es una manifestación del uso de las gráficas en la construcción de ideas del Cálculo y el Análisis.

La articulación de estos resultados conforma una epistemología para la modelación escolar que está anclada en las gráficas, que se llamará una *socioepistemología de la modelación-graficación S(M-G)*, y que proporciona un marco de referencia para que los estudiantes resignifiquen sus conocimientos matemáticos.

### Metodología

La información que permite dar cuenta del problema de investigación se obtiene mediante un diseño de investigación con orientación cualitativa en una experiencia de laboratorio con una fuerte base epistemológica. De la confrontación entre las hipótesis de construcción específicas a partir de la Categoría Modelación-Graficación, C(M-G), y el desempeño de los estudiantes en una Situación de Modelación del Movimiento, SMM, se obtiene la caracterización del uso de las gráficas en la modelación que proporciona elementos para una reorganización en la matemática escolar de las ideas del cambio y la variación.

### **Diseño de una Situación de Modelación del Movimiento**

En el Diseño de la SMM entran en juego el conjunto de elementos que conforman la Socioepistemología Modelación-Graficación de la siguiente manera. Por un lado, 1) la situación establecerá como condición el uso de las gráficas para estudiar un fenómeno de variación, de tal manera que sea propensa a generar, por parte del estudiante y el profesor, un conjunto de preguntas sobre la cantidad o calidad de una variable con respecto al tiempo, esta variable será, principalmente la distancia de un móvil a un punto fijo de referencia, pero se pueden usar en otras variables físicas, 2) la situación será susceptible a simularse mediante una toma de datos de la variable en diversos instantes de tiempo generando por parte del estudiante múltiples realizaciones, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo en el razonamiento, 3) en el Diseño de Situación de una Situación de Modelación del Movimiento se espera encontrar la construcción de argumentos relacionados con el funcionamiento de la modelación de la variación, se espera que los estudiantes realicen una reorganización de sus conocimientos para establecer una nueva forma del uso de las gráficas para la realización de estas tareas y, también se espera, que los estudiantes hagan funcionales algunos de los argumentos construidos. Es por eso que, para fines de análisis del D (SMM) se identifican tres momentos, que por lo descrito anteriormente no se espera que aparezcan de forma secuencial.

#### *Momento I. Forma (SMM-MI)*

El propósito de este primer momento del diseño de situación de modelación del movimiento (SMM-MI) es establecer con el estudiante los elementos de forma de la gráfica que se usarán para describir la situación de modelación del movimiento. Es en este momento, SMM-M1, cuando los estudiantes toman decisiones explícitas o implícitas

1050

sobre algunos de los siguientes aspectos del sistema de ejes coordenados: la elección de las variables que intervienen en la situación, el cuadrante o los cuadrantes donde tendrá sentido la gráfica, Las unidades de medición de las variables, los valores máximos y mínimos para cada variable, la elección de un punto de referencia.

### *Momento II. Argumentación (SMM-MII)*

Este segundo momento del diseño de situación de modelación del movimiento (SMM-M2) proporciona un espacio para que los estudiantes justifiquen la elección de las gráficas en realizadas en el SMM-M1. La justificación tendrá sentido en función de la relación que guarden las gráficas con la situación de movimiento planteada. Los estudiantes recurren a *procedimientos* donde ponen en juego los significados, establecen relaciones *proceso-objetos*, logrando construir los *argumentos* relacionados con el funcionamiento de una situación de modelación del movimiento. Algunos de estos procedimientos son: 1) Calcular la velocidad en los trazos rectos, 2) Calcular la velocidad promedio en algunos intervalos en los trazos curvos, 3) Estimar la pendiente de la curva, asociando la pendiente a la velocidad, 4) Encontrar una expresión algebraica para gráfica y derivarla analíticamente para, de esta manera dar cuenta de la velocidad. Los estudiantes establecerán las siguientes relaciones proceso-objetos: 1) La velocidad de una gráfica creciente es positiva, 2) La velocidad de una gráfica decreciente es negativa, 3) La velocidad de una recta será constante, 4) La velocidad de una gráfica creciente cóncava hacia arriba será decreciente, 5) La velocidad de una gráfica creciente cóncava hacia abajo será creciente, 6) La velocidad de una gráfica decreciente cóncava hacia arriba será decreciente y 7) La velocidad de una gráfica decreciente cóncava hacia abajo será creciente. La construcción de argumentos que se espera está relacionada con los elementos de funcionamiento: 1) La necesidad de ‘comprender’ fenómenos, 2) Relación entre figuras geométricas y cualidades de los fenómenos, 3) Distinción entre cantidad y calidad de movimiento, 4) Caracterización de los extremos a partir de la constancia de

disminución de la variación en sus proximidades, 5) La suma continua para calcular la distancia como el área de la velocidad.

### *Momento III. Funcionamiento (SMM-MIII)*

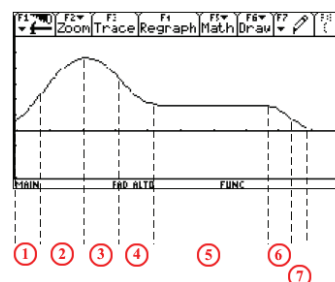
El propósito de este tercer momento es que el estudiante use los significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos descritos en los momentos anteriores. El estudiante pone en funcionamiento la construcción a través del uso de argumentos que incorporan significados, procedimientos y relaciones.

### **Análisis de datos**

Tenemos evidencia de que los elementos de funcionamiento de la figuración de las cualidades surgen en una SMM al identificar las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad que los participantes logran establecer como *argumentos* para explicar la variación en una situación de cambio. Y tenemos evidencias de las formas de uso de las gráficas a partir de la caracterización de los *significados* y los *procedimientos* que los participantes ponen en juego al establecer las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad en una situación de cambio en los momentos del diseño de situación: donde establecen la forma, construyen los argumentos y los ponen en funcionamiento.

A modo de resumen la siguiente figura presenta una de las gráficas posibles de SMM.

En él, se han destacado aquellos intervalos donde se observan cambios en el crecimiento o concavidad o se transita desde un tipo de trazo curvo a uno recto o viceversa, sobre los cuales deberían focalizarse los argumentos de los estudiantes para el paso de una gráfica de posición a una gráfica de velocidad. La tabla siguiente contiene un resumen algunas de las evidencias encontradas que proporcionan los argumentos conducentes a la construcción del argumento global.



Se han destacado también aquellos intervalos mencionados en la gráfica anterior.

<i>La velocidad de una gráfica de posición</i>	<i>Algunas evidencias tomadas del trabajo de los estudiantes</i>
1. creciente es positiva	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Aquí ocurre una velocidad positiva y...”</li> </ul>
2. decreciente es negativa	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “...una velocidad negativa hacia acá...”</li> <li>• “La negativa es cuando regresa, la parte negativa está regresando...”</li> </ul>
3. lineal será constante <b>(5)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “...llega aquí y no hay velocidad...”</li> </ul>
4. creciente y cóncava hacia arriba (creciente y que crece) será creciente <b>(1)</b>	No existen evidencias explícitas para este caso
5. creciente y cóncava hacia abajo (creciente y que decrece) será decreciente <b>(2)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Esto significa que hay una disminución de la velocidad, entonces cuando va a dar la vuelta, hay una disminución...”</li> </ul>
6. decreciente y cóncava hacia arriba (decreciente y que crece) será creciente <b>(4 y 7)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “...Y si se conduce por donde va la parte roja, estamos considerando que va a acelerar...”</li> <li>• “...que cuando va llegando a su objetivo, voy disminuyendo mi velocidad,”</li> </ul>
7. decreciente y cóncava hacia abajo (decreciente y que decrece) será decreciente <b>(3 y 6)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “...llega aquí y no hay velocidad, comienza nuevamente a caminar y hay otra velocidad.”</li> <li>• “...cuando llego al final de esos 4 minutos vuelvo a meter velocidad poco a poco no de golpe.”</li> </ul>

El análisis del trabajo de los estudiantes a través del contraste entre los análisis a priori y a posteriori se observa la existencia de los Momentos del Diseño de Situación.



Efectivamente, en el análisis que se encuentra en la ilustración anterior, un trazo de forma global incluye decisiones sobre la elección de las variables a representar por cada uno de los ejes coordenados, la elección de un punto de referencia, la elección de los cuadrantes y la percepción de aspectos característicos de la gráfica como puntos iniciales y finales, así como puntos extremos. A este momento se le caracteriza por *las tareas del establecimiento de la forma, M1-SMM*. Sin embargo, es la problematización sobre la variación a partir de la modelación-graficación lo que permiten observar la formulación de procedimientos y procedimientos que al intentar validar o justificarlos propicia que emerjan relaciones que se establecen como argumentos. Se notó una ausencia, la de funciones algebraicas para determinar la relación analítica que podría definir la situación de variación. A este momento se le caracteriza por *la construcción de argumentos, M2-SMM*. Las evidencias del momento de *funcionalidad, M3-SMM* se muestran en las ilustración donde se hacen explícitas las relaciones que los estudiantes logran establecer para las formas básicas de graficación.

## Conclusiones

Una Situación de Modelación del Movimiento que se sustenta en la socioepistemología de Modelación-graficación, propicia una resignificación de la variación. Tenemos evidencia de la existencia de un 'uso de las gráficas' que está determinado por una problematización que promueve el interés por el estudio del cambio. Las gráficas de las funciones son herramientas para modelar el cambio intrínseco a las funciones de posición, velocidad y aceleración donde podrían intervenir conceptos como la razón de cambio, la relación de una función con su derivada, manejo simultáneo de dos o más órdenes de variación, máximos o mínimos o la acumulación de una función. Pero también, y más importante para las hipótesis de trabajo de nuestra investigación, las gráficas de las funciones son el conocimiento mismo que se desarrolla y que hoy aportan datos epistemológicos que

lado, tenemos explicaciones sobre cómo la graficación conforma elementos importantes de construcción para las ideas de la variación y que se desarrollan de manera independiente, en este caso anterior al desarrollo analítico del concepto de función. También tenemos explicaciones sobre un uso argumentativo ya que la gráfica pasa a ser un elemento central en explicaciones como el de la caracterización de los puntos extremos o en el establecimiento de la veracidad de relaciones físicas o numéricas conocidas.

*Reconocimiento.*

*Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior.*

*Clave: No. 47045.*

### Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del DME, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4, (2), 103-128.

Cordero, F. (2006a). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20, (1), 59-79.

Cordero, F. (2006b). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. 265-286.

Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 10, (1), 7-38.

Flores, R. (2005). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Leinhardt, G.; Stein, M.; Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60, (1), 1–64.

MENS. (2006). Grupo de Matemática Educativa del Nivel Superior. Documento interno de trabajo. Magíster en Matemática Educativa del Departamento de Matemáticas de la PUCV, Chile.

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., Ursini, S. (1999). Mathematical modelling: the interaction of culture and practice. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 167-183.

Oresme, N. (1379). Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum. En Clagett, M. (1968) Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. Madison: University of Wisconsin Press.

Suárez, L. (2006) El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico para la modelación del cambio en un ambiente tecnológico. Memoria predoctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez, L., Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. © ISSN 1850 - 6666 / NIECYT – UNICEN (Aceptado para su publicación).