EL INFINITO ESCOLAR

Patricia Lestón, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Buenos Aires, Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN México
patricialeston@yahoo.com.ar, crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: estudios socioculturales Nivel: Medio

Resumen. *El presente trabajo forma parte de una investigación en la línea de la construcción social del conocimiento. El tema central de este reporte es la construcción escolar del infinito y las dificultades que éste concepto presenta debido a su origen sociocultural por un lado y matemático por otro. Se produce entonces un choque entre esos dos infinitos: el construido socialmente y desconocido por la escuela, y el matemático, que se utiliza en la escuela, pero es desconocido por los alumnos. Para indagar sobre la naturaleza del infinito con que se trabaja en el aula, se presenta y analiza una actividad, centrada en el estudio de funciones, y en particular de la existencia y cálculo de asíntotas que fue llevada a cabo con alumnos de escuela media. Las respuestas demuestran que el infinito construido fuera de la escuela sigue marcando en ellos la forma en que el infinito funciona y que el infinito matemático les presenta sólo conflictos y dudas.*
Palabras claves: infinito, nociones intuitivas, construcción social de conocimiento, escenarios socioculturales, socioepistemología.

Introducción

El infinito ha sido y aún es uno de los temas que más ha sido trabajado desde distintos campos de conocimiento (Matemática, Matemática Educativa, Filosofía, entre otros). Dentro de la matemática, su existencia y desarrollo no ha sido nada fácil: ha sido ignorado, negado, rechazado y a pesar de su antigüedad, no fue hasta que Cantor a fines del siglo XIX en contra de toda una comunidad lo trabajó, que fue aceptado finalmente como un elemento en la matemática.

En la escuela en cambio, su existencia no es reconocida como elemento a ser construido. Se lo utiliza, sí, pero no se lo concibe como objeto de conocimiento. Se asume ingenuamente que la idea intuitiva del infinito es suficiente para cubrir las necesidades del infinito matemático. El problema está en que, por un lado, el infinito intuitivo, construido socialmente no es compatible con el uso que de él se hace en la matemática y por otro, que el infinito matemático no forma parte del Discurso Matemático Escolar. A lo largo de la escolaridad de los alumnos va apareciendo en distintas circunstancias o momentos pero nunca como un objeto de conocimiento.

"el infinito desde el nivel inicial se convierte en un concepto que define muchas cosas, pero que no se define en ningún momento. Los alumnos lo aceptan, como aceptan tantas otras cosas de la escuela que no comprenden, pero es cuando su entendimiento es necesario para basar la construcción de otros conceptos cuando surgen los conflictos." (Lestón, 2008, p. 113)

Estos problemas que abordamos en un trabajo anterior (Lestón, 2008) estuvieron enfocados puntualmente en la búsqueda de lo que representaba el infinito fuera de la matemática, pues son esas ideas construidas extraescolarmente las que encontramos adentro de las aulas. Y es a partir del reconocimiento de estas que pretendemos comenzar a identificar las relaciones que de ellas se desprenden hacia el uso matemático del infinito. Lo que nos preguntamos ahora es entonces qué es lo que ocurre cuando comenzamos a tratar al infinito como objeto matemático sin haberlo definido, qué es lo que entienden nuestros alumnos y qué cuestiones se están pensando que dificultan la comprensión de conceptos básicos del Cálculo, como las asíntotas de una función.

Buscamos entonces empezar a documentar evidencias de los conflictos que la ausencia del infinito en el DME está provocando en las aulas de matemática, a fin de poder caracterizar al concluir nuestra investigación, una propuesta o al menos, una serie de sugerencias para que los docentes podamos ayudar a nuestros alumnos a construir elementos para la comprensión y uso del infinito matemático.

Marco teórico

La naturaleza de nuestra investigación nos lleva a considerar elementos teóricos que no en todas las aproximaciones son considerados: por un lado, lo que ocurre en la escuela, los elementos didácticos; lo que define a la naturaleza epistemológica del concepto, la manera en que las personas organizan sus pensamientos. Pero también lo que ocurre fuera de la clase, en los escenarios en los cuales los alumnos construyen sus ideas naturales o intuitivas asociadas al infinito. Esos escenarios son para nosotros, escenarios socioculturales con características muy particulares, en donde se translucen las ideologías de un grupo, sus necesidades, su filosofía, sus maneras de actuar y relacionarse (Crespo Crespo, 2007), que resultan de vital importancia para nuestro trabajo.

Nos encontramos entonces con la necesidad de un marco teórico que reconozca la importancia de lo social en la construcción de conocimiento y es por eso que adherimos a la Socioepistemología como referente teórico.

> *"... cuando se trata de indagar las condiciones de creación y desarrollo de las ideas matemáticas, así como las circunstancias sociales o culturales que posibilitan su construcción o los factores extra-matemáticos que moldea y permea el conocimiento, una epistemología en el sentido tradicional no alcanza a ofrecer explicaciones sobre este tipo de preguntas de naturaleza sociocultural. Se requiere entonces de un acercamiento epistemológico sensible a reconocer, entre otras; la naturaleza del conocimiento, los procedimientos de comunicación hacia los colectivos, así como los mecanismos por los que una cultura ejerce influencia en la formulación de ese conocimiento." (Castañeda, 2008, p. 503)*

La Socioepistemología, entendemos, nos permite movernos en distintos escenarios y observar todo lo que hace a la construcción, uso y vida del conocimiento. Y es eso lo que un concepto como el infinito requiere, ya que a pesar de su antigüedad se reconstruye en cada nueva generación tanto en la escuela como en la vida.

La propuesta: Objetivo y Encuesta Aplicada

En función de lo antes descrito, nos interesa en este momento comenzar a atender lo que ocurre con el infinito adentro de las aulas, en las clases de matemática. Hemos detectado ya una serie de ideas fuera de la matemática que se construyen en relación al infinito y que para los estudiantes no son contradictorias, relacionadas al tiempo, a la religión, al amor, a todo lo que pueda "no tener fin" o ser "excesivamente grande, más que cualquier otra cosa" (Lestón, 2008). Quisimos observar ahora qué hay de esas cuestiones filtrándose en el infinito matemático, el que conocen representado con un ∞ y relacionado con extensiones de rectas o propiedades de conjuntos numéricos.

Les aplicamos a alumnos de último año de bachillerato (17 años) un cuestionario basado en el estudio de funciones racionales, que saben graficar aún cuando no han iniciado el estudio de límites y derivadas formalmente. La actividad se propuso como diagnóstico del grupo al inicio de clases. Estas actividades de diagnóstico son aplicadas año a año para que el docente pueda evaluar el estado del grupo en relación a lo que se supone ya han aprendido y en función de esos resultados, diseñar su currículo para el resto del año lectivo. Los alumnos saben que esa evaluación no tiene repercusión en la aprobación del curso. El contrato didáctico está establecido de ese modo y eso permite que las respuestas sean pensadas y plasmadas en el papel de la manera más natural en que pueden hacerlo. No hay represalias si lo que dicen no es correcto. Estos trabajos por lo general no son devueltos a los alumnos, sino que los conserva el docente como documentación de nivel de inicio del grupo, es decir, no sólo no lleva calificación sino que ni siquiera tiene que enfrentarse al saberse equivocados.

La actividad presentada a los alumnos fue un plan de unas 30 preguntas y consignas, en las cuales se les recordaban algunas de las definiciones con que se había trabajado hasta ese momento y se les pedía que definieran con sus palabras cuestiones como asíntota, dominio, infinito y aproximación infinita.

Algunas de las partes más relevantes de este trabajo se transcriben a continuación.

Funciones Racionales

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

1. Presenta un ejemplo de este tipo de funciones.

2. Dominio de las funciones racionales.

$$Dm = \Re - \{C^0 \in Q(x)\}$$

2.1. ¿Puedes explicar a qué se debe esto?

2.2. ¿Qué es lo que ocurre en esos puntos? ¿Qué representan gráficamente?

3. Asíntotas verticales y horizontales

Si $a \notin Dmf(x)$ y además $f(a) \to \infty$, se define a $x = a$ como asíntota vertical.

3.1. Representa una función que presente una asíntota vertical.

3.2. Define con tus propias palabras una asíntota

3.3. ¿Qué quiere decir "aproximarse infinitamente"?

3.6. Si cuando $x \to \infty$, $f(x) \to a$, se define a $y = a$ como asíntota horizontal de la función.

3.7. Representa una función que presente una asíntota horizontal.

3.8. ¿Cómo lees la expresión $x \to \infty$?

3.9. ¿Cómo aparece en la gráfica representado $x \to \infty$ *?*

3.25De acuerdo a todo lo trabajado define en términos matemáticos el infinito

Lo que los alumnos dicen al respecto del infinito

El inicio de la actividad no tiene mayores problemas, los gráficos y ejemplos pedidos fueron correctamente presentados y descriptos. Frente a la definición de dominio de las funciones racionales, los alumnos han construido los elementos necesarios para saber que "no se puede dividir por cero":

> *"Todos los reales pertenecen al dominio menos el conjunto de ceros del denominador. Esto se debe a que el denominador sería cero y sería imposible de resolver"*

Y también pueden decir qué es lo que ocurre en esos puntos que no son parte del dominio de la función:

> *"Esos puntos representan asíntotas verticales o discontinuidades puntuales"*

Esperábamos hasta aquí que no se presentaran mayores conflictos, pero cuando iniciamos con las preguntas puntuales sobre las asíntotas, los problemas aparecen:

> *"Es una línea recta que indica que no hay imagen en ese punto"*

> *"Punto que no pertenece al dominio de la función. Al reemplazar x por ese punto, la función dará infinito"*

Ese tipo de respuestas podrían aceptarse aunque suenan mucho a memorización de definiciones. Otros alumnos sin embargo, fueron menos académicos pero el discurso suena más a lo que en verdad piensan al respecto:

“Es una línea discontinua que marca el espacio irreal donde no existe ningún punto”

“Una asíntota es un número inexistente dentro de un dominio dado que divide a la gráfica. Ningún número se le va a semejar, se le van a aproximar”

Y es frente a respuestas como estas en donde vemos que en nuestros alumnos hay mezcladas definiciones con ideas que tienen que ver con lo que han construido para poder internalizar esas nociones.

La frase “aproximarse infinitamente” es una noción que habitualmente surge en la clase de matemática asociada a estas cuestiones, en especial con las asíntotas verticales, pensando que en realidad comprenden esa idea que involucra nada menos que a la continuidad del conjunto de los números reales. Esa idea también es contradictoria: en la vida, las cosas no pueden aproximarse infinitamente sin tocarse. Por eso resulta que cuando indagamos en esas cuestiones podemos observar que no lograron incorporar ese elemento presente en el DME. Algunas referencias a esto pueden encontrarse en (Lestón, 2008) y otras, las podemos ver en lo que dicen los alumnos cuando son cuestionados al respecto de manera directa:

“Que siempre se acerca al punto pero nunca logra alcanzarlo”

“Quiere decir que la función tomará un valor con una diferencia cada vez menor a la asíntota pero nunca lo alcanza, aunque parece que sí”

“Que se acerca al número, en decimales, pero nunca llega”

“Que hay muchos valores que se le aproximan con decimales (3,49539 al 4 se aproxima) pero la función nunca llega al resultado entero de ese valor (el 4)”

“Que se va como pegando pero en realidad no se pega porque por eso es asíntota, así que parece que sí se tocan pero si se pudiera ver más de cerca se ve que no, pero parece que sí”

“Es que se siguen pegando porque el límite no existe y los números pueden dividirse infinitamente”

"Los números son interminables y pueden multiplicarse y dividirse eternamente, definiéndolos como números incalculables"

La justificación que logran hacer de este comportamiento de las funciones puede construirse sin la noción de continuidad, basta con la densidad de los números racionales. Y en algunos casos, el ser y el parecer son tratados como elementos de argumentación. La graficación a la que están acostumbradas hace que construyan ese tipo de argumentos: se dibuja sólo de la función una parte, y en esa parte se ven ciertas cosas, pero les pedimos que crean que, de seguirla, seguiría ocurriendo lo mismo, aún cuando parece que no. No hay argumentos matemáticos consistentes, excepto el saber que puedo seguir encontrando números entre dos dados.

A continuación, les preguntamos entre otras cosas cómo leían la expresión $x \to \infty$, frente a lo cual la naturaleza con que aparece el infinito se deja ver:

"x es igual a infinito"

"x tiende a ser infinito"

"x comprende a todos los reales"

"x tiende a ser cualquier número"

"Todos los números existentes"

"Es un símbolo o manera de representar que los valores numéricos de una función no tienen fin, pues continúan"

"Que la línea es ilimitada, sin fin"

"Es el valor numérico que sucede cuando el coeficiente principal de P es mayor que el coeficiente principal de Q"

Puede observarse entonces que ese infinito es de una naturaleza diversa: puede ser un número, puede ser todos los números juntos, puede ser un conjunto como el de los números reales, puede ser una recta que continúa sin límite, puede ser el resultado de una operación entre polinomios. Y algo que pensábamos era comprendido por todos (la variable se incrementa infinitamente) no lo es. Y sin esa idea, difícilmente hayan logrado comprender lo que representa una asíntota horizontal.

Y finalmente, retomamos algunas de las definiciones que nos dieron para infinito de acuerdo a lo que habían estado pensando y discutiendo a lo largo de toda la actividad.

> *“El infinito indica que una función continúa”*
>
> *“Es un valor que nunca tiene fin”*
>
> *“Es un valor que nunca llega a su fin”*
>
> *“Inalcanzable”*
>
> *“El infinito son aquellos valores (o números) a los cuales nunca se puede terminar se llegar o cerrar”*
>
> *“Son aquellos valores, números o dibujos que nunca se pueden cerrar”*

Lo que podemos ver de estas respuestas es que el infinito es una calificación de sin fin, ilimitado, inalcanzable; o es un valor o número o dibujo, pero que no “cierra”, que en la cultura de estos alumnos puede entenderse como un “no convence”. El infinito aparece como un punto o número que se va alejando, no es sino que se va haciendo. Llamativo es además que este infinito no contemple al infinitamente próximo: no se acerca mucho sino que se aleja mucho. Lo que queda entonces es una noción muy próxima a la natural, a la intuitiva, a la que construyeron en casa de pequeños: muy grande, tan grande que no se acaba.

Conclusiones

Sostenemos la hipótesis de que nuestros alumnos entran al aula con toda una cultura construida previamente, y que, aunque la escuela la rechace, se hace presente cada vez que piensan, hablan o niegan algo de lo que les presentamos. Y esa cultura que les es propia y que les sirve “en el mundo real” que en ningún caso es el de la escuela, tendrá siempre un peso mayor que el que puede tener lo que construyen en la escuela. Si en nuestras clases renegamos de esas ideas, e intentamos ignorarlas y dejarlas fuera de toda discusión, no haremos más que alejarnos de lo que en realidad nuestros alumnos están pensando.

La forma en que se tratan las funciones, el trabajo con límites, provocarán en los modelos que los alumnos se han formado, inconsistencias en más de una ocasión: los conceptos se confunden, las propiedades y definiciones se aprenden y aplican, pero poco significan. Evidencia de esto es la dificultad general que presentan los alumnos en la primera aproximación que tiene ante el estudio del análisis matemático.

Este trabajo, muestra la existencia de conceptos que, como el infinito, se construyen fuera de la escuela y cuando entran en el aula de matemática, se manifiestan de manera conflictiva, si no se exploran las construcciones previas. El proceso de construcción del infinito en la escuela, se ve influido por ideas intuitivas y extraescolares que reaparecen generando obstáculos epistemológicos que se ponen en evidencia al enfrentar ideas relacionadas al infinito escolar.

> *"El impacto de las ideas intuitivas en el caso del infinito es innegable, especialmente porque fuera de la matemática el infinito no es contradictorio. En los sentimientos, en el tiempo, en el espacio, en la religión, el infinito "cierra": convence, caracteriza de manera tal que todo el mundo sabe de lo que se está hablando. Los conflictos aparecen sólo dentro de la matemática: entonces, ¿por qué alguien cambiaría un modelo que no tiene problemas (el modelo intuitivo) por un modelo que se muestra contradictorio, conflictivo y que "no convence" (el modelo matemático)? La matemática escolar debe tomar parte en la modificación del discurso de manera tal que los alumnos encuentren en el sistema matemático un modelo compatible y sin problemas." (Lestón, 2008, 115)*

El infinito matemático es complejo, contradictorio con el sentido común, desafiante. Los docentes lo sabemos y sabemos también que la discusión de este tipo de problemas lleva más tiempo del que tenemos disponible para lo que los planes de estudio nos dicen es importante. Sin embargo, lo importante se está apoyando en una idea sin sustento teórico, se está construyendo sobre una base de arena que, ante la primera brisa de contradicción, se cae. No sabemos aún si es posible llevar el infinito matemático con todas sus complejidades a la escuela, nos lo seguimos preguntando. Pero sí sabemos que suponer que con lo que saben alcanza no sirve: el infinito que traen y que es de ellos, sirve para muchas cosas, pero no para la matemática. El de ellos, lo han construido en casa, en la plaza o con sus amigos, mirando el cielo y preguntando desde cuándo o hasta dónde. El infinito matemático, en cambio, es nuestro y si queremos que sea también de ellos, deberemos hacer algo al respecto. Al menos establecer que no todo es lo mismo aún cuando se llama igual.

Referencias bibliográficas

Castañeda, A. (2008). Desarrollo de la noción de graficación en la antigüedad. En Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21, (pp. 503-508). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Crespo Crespo, C. (2001). Acerca de la comprensión del concepto de continuidad. En *Boletín de SOAREM* nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Crespo Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (I), (pp. 529-534). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal and Ordinal Infinities: An Epistemological and Didactic View. *Educational Studies in Mathematics. 4,* 175-197.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN.

Lezama, J. (2005). Una Mirada Socioepistemológica al Fenómeno de la Reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3(8), 339-362.