

ACERCAMIENTO INTUITIVO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA

José Carlos Cortés Zavala

Facultad de Físico Matemáticas, Universidad Michoacana

jcortes@umich.mx

Campo de investigación: Tecnologías Avanzadas

México

Nivel: Medio

Resumen. En el siguiente artículo se propone un acercamiento numérico y gráfico al concepto de derivada y de función derivada. Para ello se propone iniciar introduciendo las ideas de diferencias, incrementos y razón de incrementos. El que esto escribe diseño y desarrollo un software de apoyo a la introducción de estas ideas. Para abordar la temática se exponen ideas teóricas, una exposición de lo propuesto en el software y algunos resultados obtenidos.

Palabras clave: derivada, tecnología, visualización

Introducción

Diversos investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio. Basado en esta idea inicial se diseñó y desarrolló un software, que hemos denominado “Funciones y Derivadas”. En el software propuesto (Cortés, 2002) se incorporaron actividades que resaltan los aspectos relacionados con diferencias, incrementos y razón de incrementos, se toma como base las ideas visuales. Hughes (1990) ha observado que muchos estudiantes pueden calcular algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de determinar en una gráfica en qué lugares la función tiene derivada positiva y en cuáles negativa. Además, la autora nota que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede (1) iluminar la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y (2) la presentación algebraica. Por su parte Scher (1993) realizó un estudio sobre la utilización de múltiples representaciones para conceptualizar la derivada. El autor concluye que existe la necesidad de promover el uso de tales representaciones para que el estudiante obtenga un entendimiento adecuado de los conceptos del cálculo. También menciona, por ejemplo, que *“la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes”* (Scher, 1993, p. 16).

1088

Sabemos, con base en diversos estudios, que el concepto de derivada es tratado para su enseñanza con métodos puramente algebraicos los cuales ocultan información relevante para su aprendizaje. El tratamiento numérico y gráfico pocas veces es usado y cuando lo es solamente sirve como una introducción al proceso algebraico. Propuestas como la de Duval (1988, 1993 y 1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002) y Pluvinage (2005) mencionan la importancia, que tiene para el aprendiz, el manejo gráfico y numérico. Los aspectos numéricos, gráficos y algebraicos son representaciones de los objetos matemáticos y cada uno de ellos presenta cierto tipo de información del objeto, además permiten cierto tipo de actividades cognitivas en el sujeto. Cuando solamente se usa un tipo de representación se corre el riesgo, como lo menciona Duval (1988), de confundir al objeto con la representación, por lo que como metodología de trabajo, este investigador, propone el uso de múltiples representaciones de un objeto.

Como ya se menciona, en el párrafo anterior, cada representación deja visible un tipo de información, pero también oculta otra y cada una de ellas nos permite realizar cierto tipo de operaciones. Por ejemplo: Si tenemos la función cuya representación algebraica es: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, su gráfica está representada en la figura 1 y evaluada en algunos valores numéricos da como resultado la tabla 1.

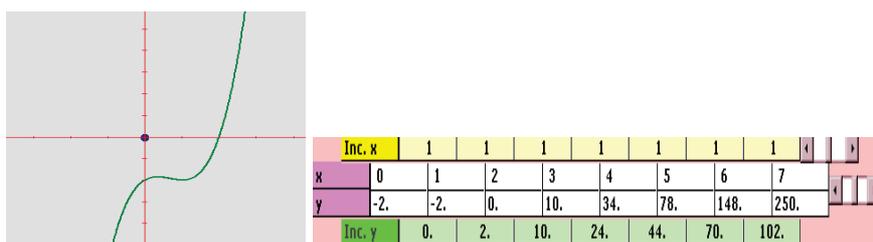


Figura 1

Tabla 1

A partir de estas representaciones podemos hacernos las siguientes preguntas:

¿En cuál de ellas nos basaríamos para afirmar que la función tiene dos raíces complejas?

¿Cuál de ellas nos permite visualizar en que intervalos la función es decreciente y en que creciente?

¿Cuál de ellas nos permite realizar la siguiente operación $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

¿En cuál podemos visualizar en forma más rápida que $f'(2) > 0$?

Para contestar algunas de estas preguntas es necesario contar con experiencia en el manejo del registro seleccionado y esta se obtiene de trabajar en cada representación. Es en este sentido que Duval (1988) menciona que es necesario realizar “tratamiento” en cada sistema de representación y conversión entre representaciones con la finalidad de lograr una articulación entre representaciones que nos permitirá acercarnos al concepto matemático.

Dentro del desarrollo de la presente experimentación se detectó que la idea de incremento de una variable no es entendida fácilmente por los estudiantes, lo cual dificulta entender la razón de cambio y por supuesto el concepto de derivada.

La Propuesta

El planteamiento propuesto en el software se ubica dentro de la teoría de sistemas de representación semióticos, por lo que el software deberá permitir la manipulación de diferentes representaciones relativas a diferentes registros de representación, además de motivar las tareas de conversión entre representaciones; es decir, deberá permitir tratamiento de representaciones en cada uno de los registros y conversión entre representaciones.

Tratamiento numérico

Se propone un acercamiento numérico al concepto de derivada, a través de razón de cambio. Un primer acercamiento para lograrlo es introducir las progresiones aritméticas y motivar al estudiante a desarrollar estrategias manipulando incrementos que le permitan resolver los ejercicios. El proponer un acercamiento discreto al concepto de derivada (a través de razones de cambio) permite que el estudiante trabaje con elementos que para él son concretos; además, posteriormente se puede introducir la pendiente de una recta como la razón de incrementos, es decir, dar significado a lo que representa una razón de cambio.

Progresiones Aritméticas para Introducir la noción de Diferencia de dos datos

El tema de *Progresiones Aritméticas* se aborda en cuatro niveles (fig. 2), con el objetivo de iniciar un acercamiento numérico al concepto de Razón de Cambio.

Nivel I	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>posición</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>valor</td> <td>28</td> <td>30</td> <td>32</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	posición	1	2	3	4	5	6	7	8	valor	28	30	32					
posición	1	2	3	4	5	6	7	8											
valor	28	30	32																
Nivel II	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>posición</td> <td>1</td> <td>11</td> <td>21</td> <td>31</td> <td>41</td> <td>51</td> <td>61</td> <td>71</td> </tr> <tr> <td>valor</td> <td>8</td> <td>28</td> <td>48</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	posición	1	11	21	31	41	51	61	71	valor	8	28	48					
posición	1	11	21	31	41	51	61	71											
valor	8	28	48																
Nivel III	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>posición</td> <td>1</td> <td>14</td> <td>33</td> <td>48</td> <td>64</td> <td>77</td> <td>88</td> <td>94</td> </tr> <tr> <td>valor</td> <td></td> <td>-1</td> <td>38</td> <td>95</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	posición	1	14	33	48	64	77	88	94	valor		-1	38	95				
posición	1	14	33	48	64	77	88	94											
valor		-1	38	95															
Nivel IV	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>posición</td> <td>1</td> <td>19</td> <td>33</td> <td>44</td> <td>60</td> <td>72</td> <td>85</td> <td>93</td> </tr> <tr> <td>valor</td> <td></td> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td>56</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	posición	1	19	33	44	60	72	85	93	valor		15			56			
posición	1	19	33	44	60	72	85	93											
valor		15			56														

Figura 2

Incrementos de Variables

En el tema de *Incrementos* el objetivo es introducir esta noción en los estudiantes. Proponiendo un primer acercamiento gráfico (fig. 3) y se aborda el trabajo con cuatro niveles.

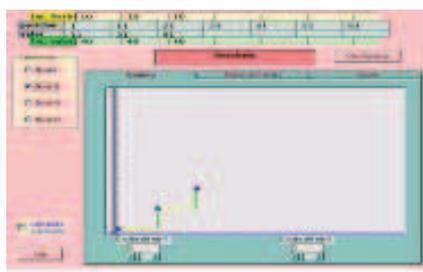


Figura 3

Razones de Cambio

Bajo este acercamiento discreto al concepto de *Razón de Cambio* se logra que el estudiante trabaje con elementos que para él son concretos. Además, se puede introducir después la pendiente de una recta como la razón de incrementos, es decir, dar significado a lo que representa una razón de cambio. La opción *Razón de Cambio* se aborda como el cociente de dos incrementos, obteniéndose una nueva función. Se pueden seleccionar diferentes tipos de funciones. Si se Selecciona una función cúbica de la forma, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se generan aleatoriamente los parámetros a , b , c y d (fig. 4 y 5).

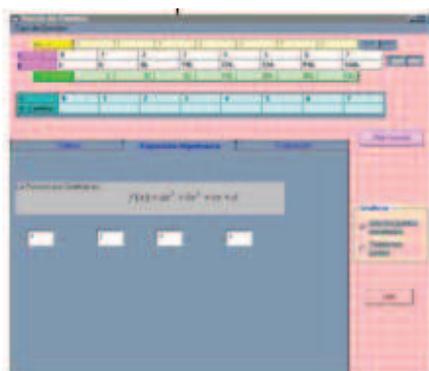


Figura 4

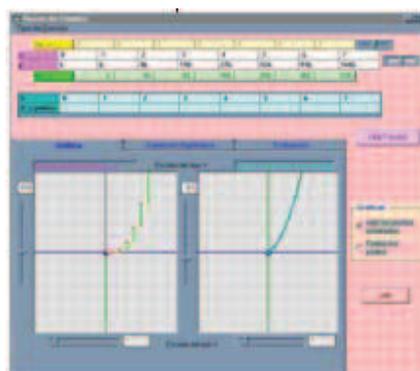


Figura 5

Tratamiento Gráfico

El tratamiento geométrico que proponemos en torno al concepto de derivada siempre parte de una Línea Secante que se convierte en Línea Tangente. En relación con lo anterior Wenzelburguer (1993 p.3) menciona:

“Normalmente se usa el problema de la tangente geométrica como motivación para introducir la derivada. Este método tiene muchas desventajas porque no es fácil de entender que el límite de la pendiente de una familia de secantes es la pendiente de la tangente a la cual se llama derivada. Además, no se ve una conexión inmediata entre una tangente geométrica que es un fenómeno estático y el dinamismo de una derivada que describe el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra.”

La propuesta que aquí se realiza va en este sentido y consideramos que un tratamiento gráfico de la línea secante, de la línea tangente de la función razón de cambio y de la función derivada servirá para franquear esta barrera. A continuación exponemos estas ideas:

Primeramente introducimos gráficas de funciones de la forma general, por ejemplo una función polinomial de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, en la cual tenemos parámetros manipulables a , b , c , y d para modificar la función polinomial. Podemos seleccionar el trazar una Línea Secante (Figura 6) o una Línea Tangente (Figura 7) o la Gráfica de la Función Razón de Cambio (Figura 8) o la Gráfica de la derivada (Figura 9) obteniendo, de acuerdo a la selección, la tabla correspondiente.

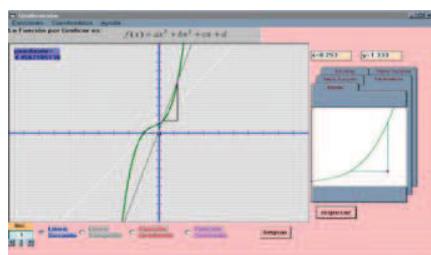


Figura 6

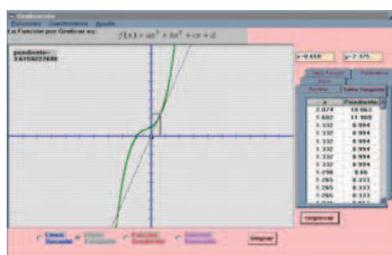


Figura 7

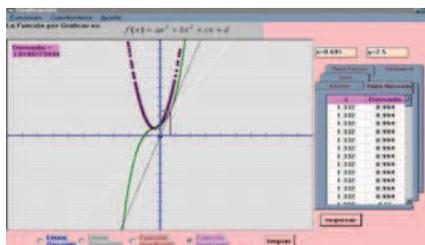


Figura 8

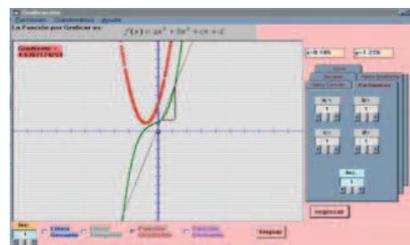


Figura 9

A través del uso de estas actividades se pretende que el estudiante comprenda la noción de incremento, de razón de cambio, de cómo la línea secante se encuentra relacionada con la razón de cambio, de cómo la tangente se relaciona con la razón de cambio cuando el *incremento de x* se hace pequeño, de cómo al graficar las pendientes de la línea secante se obtiene algo parecido a la gráfica de la derivada, que a su vez es la gráfica obtenida de las pendientes de la línea tangente.

Experimentación

La experimentación se practicó con cinco estudiantes de bachillerato durante doce horas, repartidas en cuatro sesiones. Se trabajó en una sala equipada con tres computadoras, un pizarrón y dos cámaras de video. Se formaron tres equipos de trabajo (dos con dos estudiantes y uno de uno) y cada uno de ellos trabajó en una computadora con el software desarrollado. En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete, para que en las sesiones siguientes el estudiante navegara libremente los contenidos permitidos en el software. El instructor se desempeñó básicamente como un observador pero podía intervenir para contestar algunas preguntas cuando le eran requeridas o para hacer preguntas que propiciaran que los estudiantes encontrarán por sí

mismos la estrategia correcta. Los estudiantes podían comunicarse libremente las ideas o las estrategias de solución, las cuales fueron grabadas en video.

Se experimentó con la parte del software correspondiente al tratamiento numérico (progresiones, incrementos y razón de cambio). Primeramente, se trabajó con el apartado de progresiones aritméticas. El software genera, en forma aleatoria, una tabla en la cual se presentan espacios vacíos, siendo la tarea del usuario el llenarlos (figura 1); el software realiza la evaluación del dato introducido y muestra si es correcto o incorrecto. Esta opción presenta una introducción y cuatro niveles.

Observaciones generales

Los integrantes de los equipos no tuvieron ningún problema en la navegación con el software y entendieron rápidamente la tarea por desarrollar. Tuvieron algunos conflictos para encontrar la estrategia adecuada, pero al final lo lograron.

Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados

El análisis de esta experimentación se centrará en explicar, con base en las video-grabaciones, si las ideas de incremento de una variable y de razón de cambio fueron entendidas por los estudiantes. Asimismo, este análisis será un primer contacto para vislumbrar la posibilidad de que un acercamiento por medio de la función razón de cambio permita a los estudiantes transitar al concepto de derivada.

Opción de progresiones

En esta primera tarea (u opción) del software, se presenta a los estudiantes una introducción a lo que es una progresión aritmética y cuatro niveles de ejercicios. Todos los estudiantes entendieron bien la introducción y la tarea por desarrollar. El nivel I y nivel II no presentaron ningún problema para encontrar la solución requerida en cada caso. Pero

en el nivel III y nivel IV, fue muy difícil para los estudiantes dar una respuesta adecuada al tipo de ejercicio propuesto. Sólo un equipo de trabajo encontró una estrategia para resolver lo requerido en el nivel III. A continuación se describe cómo fue el desempeño del equipo con respecto a la tarea solicitada.

Elizabeth y Leticia están intentando resolver el siguiente ejercicio:

Posición	1	6	25	42	52	53	81
Valor	4	14	52				

Elizabeth: veamos cuánto es. [comienza a escribir en su libreta, haciendo cuentas] son 17 por 2 que son 34 y le sumamos 52.

Investigador: ¿Me explicas cómo lo obtuviste?

Elizabeth: Del 1 al 6 hay 5 espacios. Sé que si 1 es igual a 4 y hay 2 espacios entre uno y otro, y se va incrementando de 2 en 2 entonces son 42 menos 25 para sacar los espacios; multiplicado por 2, y le sumo el valor de 52.

Leticia: Sacamos el espacio que hay de un lado a otro y, como ya sabemos que va de 2 en 2, de 52 a 53 hay un espacio y lo multiplicamos por 2.

Investigador: Ese número que obtuvieron es muy importante (el 2). ¿Cómo lo sacaron?

Elizabeth: Muestra una tabla y me da una explicación sobre ella.

<i>Posición</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>
<i>Valor</i>	<i>4</i>	<i>6</i>	<i>8</i>	<i>10</i>	<i>12</i>	<i>14</i>

Llenaron la tabla con los valores que faltaban del 1 al 6, y determinaron que se va incrementando de 2 en 2 cada posición. Se les sugirió que revisaran la opción de incrementos y la definición de razón de cambio. Después de revisar la opción y la explicación de lo que es una razón de cambio, concluyeron:

Elizabeth: ¡Ya! Lo que pasa es que con el incremento que le damos, lo podemos sacar al dividir el incremento de x entre el incremento de y .

Leticia: Es al revés.

Elizabeth: Y ya nos ahorramos lo que estábamos haciendo.

Como podrá observarse para la solución de ejercicios de este tipo es necesario utilizar la razón de cambio, lo cual fue logrado por este equipo. En tareas posteriores ya tenían esta idea y la aplicaron.

A manera de conclusión

Por medio del uso de tablas de valores de funciones es posible que los estudiantes entiendan y usen la razón de cambio. Con esto, pueden empezar a construir una nueva función y a partir de ella, los educadores pueden introducir la función derivada.

Referencias bibliográficas

Cortés, C. (2002) *Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial* Tesis doctoral, no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México.

Cortés, C. García, J., Núñez, G. (2005). *Software para la enseñanza de la derivada*. Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. México: Editorial Morevallado.

Confrey, J.(1993). *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations*. (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association), April, 1993.

Duval R. (1988) *Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres*. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones:

la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang, Suisse.

Hitt F. (2002) *Funciones en contexto*. México: Editorial Pearson Educación.

Hugues, D. (1990). *Visualization and Calculus Reform*. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project* (MAA notes #19). Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.

Mejía, H.(1997). Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *VIII seminario nacional de calculadoras y computadoras en educación matemática*. Pp.315-322. México: Universidad de Sonora.

Pluinage F. (2005) *Reflexiones sobre la recta numérica al servicio del cálculo en Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México: Editorial Morevallado.

Scher, D.(1993). Student's Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics in College* (Fall): 3-17.

Wenzelburguer, E. (1993). *Cálculo diferencial*. México: Editorial iberoamérica.