APROXIMACIONES AL VALOR DE LA INTEGRAL DEFINIDA UTILIZANDO UNA CALCULADORA GRAFICADORA

Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Nelson Hernández Reyes, Pablo Gómez Fuentes, Débora Oliva Alfonso, Danelia Sánchez Camaraza
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría Cuba
e_hazday@yahoo.com, ecarlos48@yahoo.com, nelsonh@ind.cujae.edu.cu, pablog@ind.cujae.edu.cu
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. Este trabajo muestra una experiencia llevada a cabo con un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería a través de un curso facultativo en el que se retomó el cálculo de integrales definidas, utilizando la tecnología, con el propósito de:

- Consolidar el concepto de integral definida a través de su definición y de su interpretación geométrica.
- Mostrar otras formas de calcular una integral definida mediante aproximaciones numéricas y su interpretación geométrica.

El recurso tecnológico utilizado en este caso fue una calculadora graficadora CASIO ClassPad 300, aprovechando las posibilidades que ofrece la misma desde el punto de vista geométrico y de programación, que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: integral definida, calculadora graficadora, métodos aproximados

Introducción

Este trabajo muestra una experiencia llevada a cabo con un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería a través de un curso facultativo en el que se retomó el cálculo de integrales definidas, utilizando la tecnología, con el propósito de consolidar el concepto de integral definida a través de su definición y de su interpretación geométrica y de mostrar otras formas de calcular una integral definida mediante aproximaciones numéricas y su interpretación geométrica.

El recurso tecnológico utilizado en este caso fue una calculadora graficadora CASIO ClassPad 300, aprovechando las posibilidades que ofrece la misma desde el punto de vista geométrico y de programación, que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes. La calculadora se utilizó como un medio de enseñanza o sea como un instrumento o equipo que apoya la actividad de docentes y alumnos en función del cumplimiento del objetivo.

En el curso se calculó una integral definida utilizando la definición para diferentes particiones y se analizó la convergencia de la misma hacia su valor exacto, el mismo proceso se repitió utilizando el cálculo numérico mediante los métodos de Trapecios y Simpson para distintos números de subintervalos, y se compararon los mismos entre sí, analizando ventajas y desventajas.

Acerca de la definición de integral definida

Comencemos con un análisis de la definición de la integral definida, primero con una definición rigurosa.

DEFINICIÓN (Fikhtengol´ts, 1965).

Sea la función *f(x)* definida sobre el intervalo [a,b] . Formemos una partición del intervalo [a,b] subdividiendo arbitrariamente este intervalo al introducir entre a y b los puntos x_0, x_1, x_2, ..., x_n

La mayor de las diferencias

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

será denotada por λ.

Tomemos algún punto arbitrario ξ_i en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

y formemos la suma

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Ahora procedamos a establecer la existencia de un límite finito de esta suma

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

Supongamos que el intervalo [a,b] es dividido sucesivamente en partes, primero de una forma, luego de otra forma y así sucesivamente. Esta sucesión de particiones del intervalo será llamada "fundamental" si la correspondiente de valores $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ tiende a cero.

Entonces el límite $I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$ se entiende en el sentido de que la sucesión de valores de las sumas σ correspondientes a una sucesión fundamental arbitraria de particiones de el intervalo, siempre tiende a un límite I para todos los posibles valores de ξ_i

El límite finito I de la suma σ cuando $\lambda \to 0$ es llamado la integral definida de la función *f(x)* en el intervalo [a,b], y se denota por el símbolo

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

y la función *f(x)* se dice que es integrable sobre el intervalo [a,b].

Por lo general en los textos de Cálculo esta definición se "simplifica" al obtener "el límite" de las sumas de Riemann. Una definición de integral definida en un libro de Cálculo se trata de la siguiente manera:

Una vez obtenida la suma $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, si para cualquier partición del intervalo [a,b], existe $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I$ independientemente de los valores de ξ_i, entonces este límite se denomina integral definida de *f(x)* desde *x = a* hasta *x = b*. En esta definición el límite significa que, para una partición cualquiera del intervalo, si la norma de la partición λ está suficientemente cerca de cero, y siendo arbitrarios los números ξ_i en los subintervalos [x_i , x_{i+1}] de la partición, entonces cualquier suma de Riemann está cerca de *I*.

En esta definición, aunque se trate con rigor la definición de límite de una función, no se aprecia el sentido del "límite de la sucesión fundamental de particiones" y se "diluye" el concepto, se simplifica. La interpretación geométrica, en el mejor de los casos utilizando la tecnología, reafirma el concepto.

Otros métodos utilizados

En este curso se explicó además la utilización en el cálculo de integrales definidas de métodos aproximados: Métodos de los Trapecios y Método de Simpson.

El Método de los Trapecios se basa en dividir el intervalo de integración en n subintervalos de igual amplitud y descomponer la integral en n integrales. Cada integral se obtiene a partir de sustituir el integrando por un polinomio interpolador de primer grado, el cual cuando se integra, el resultado obtenido coincide con la fórmula para el área de un trapecio. Por tanto la suma de todos los resultados nos dará una aproximación del valor de la integral buscado. El Método de Simpson se basa en el mismo análisis anterior, pero el integrando es sustituido por un polinomio de segundo grado.

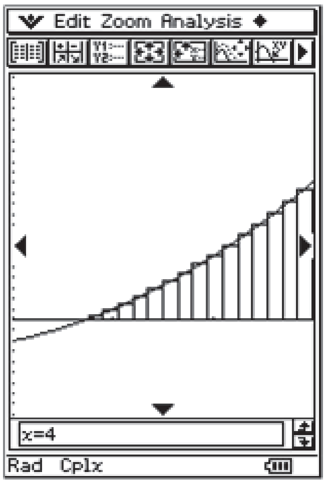
La experiencia metodológica

El presente trabajo muestra una experiencia metodológica en la cual se utiliza la calculadora graficadora. La calculadora no se utiliza como herramienta para hacer cálculos sino como un recurso didáctico, contribuyendo a crear un ambiente adecuado en el aprendizaje (Carlos y Fernández, 2005).

En la experiencia se puso en práctica el Principio Didáctico a partir del enfoque Histórico Cultural (Vigostky, 1966), relativo al Carácter Audiovisual de la Enseñanza y la Unidad de lo Concreto y lo Abstracto (Zilberstein, 2003)., que señala aquellas acciones específicas que son necesarias para revelar el contenido del concepto a formar y para representar este contenido primario en forma de modelos conocidos de tipo material, gráfico o verbal y además, proponerse que los estudiantes intervengan activa y conscientemente con los medios de enseñanza que están a su.

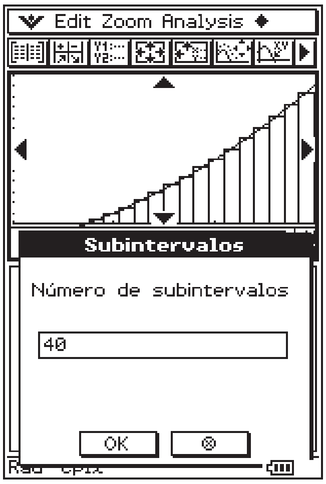
Para este curso se desarrollaron varios programas que permitieron analizar el concepto de integral definida para diferentes particiones, a partir de su interpretación geométrica, además de la convergencia de la misma hacia su valor exacto.

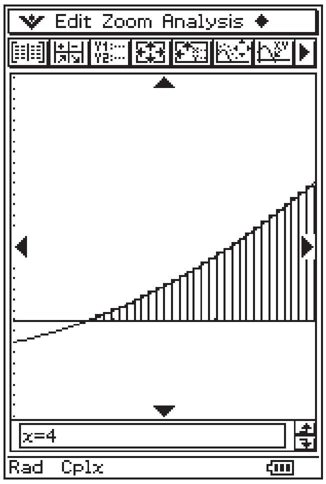
A continuación se muestran algunas pantallas de la calculadora CASIO Classpad 300, tomando como ejemplo la función $f(x) = x2 - 3$ en el intervalo (1;4), en las que se puede apreciar el concepto de integral a partir de diferentes particiones. Primeramente se realizó el cálculo tomando 20 subintervalos.



Como se observa no sólo se logra obtener el resultado de la integral sino que se puede visualizar gráficamente las particiones realizadas para el cálculo de la misma.

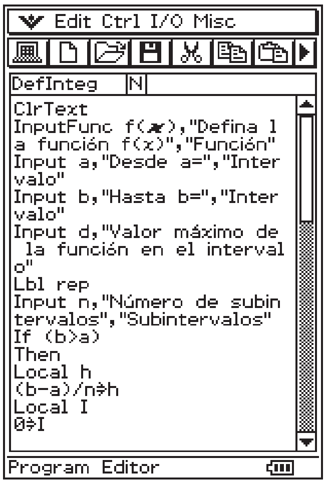
Posteriormente se realizaron los cálculos tomando el doble de los subintervalos. Este análisis se muestra en las siguientes pantallas de la calculadora.

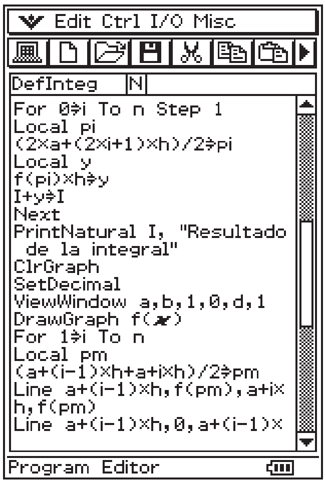


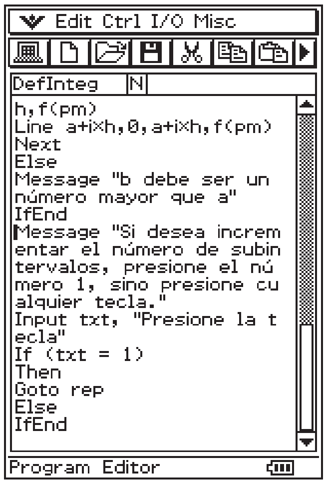


De esta forma el estudiante puede observar y analizar que en la medida que aumenta la cantidad de subintervalos (las particiones tienden a cero) en que se divide el intervalo original, mejor es la aproximación de la integral.

A continuación se muestra el programa utilizado para obtener los resultados mostrados anteriormente.



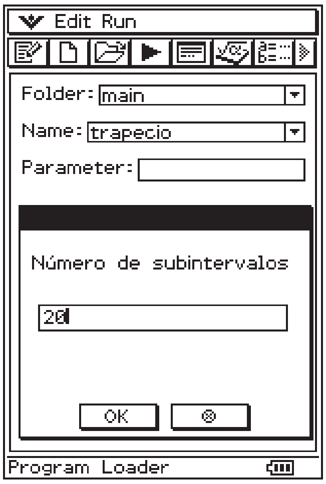


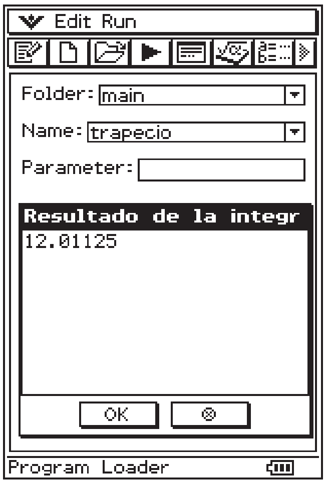


De igual forma, se realizó un programa que calculara las sumas inferiores, las superiores y la diferencia de ellas así como el gráfico de ambas. Permite a su vez, volver a realizar los cálculos disminuyendo la cantidad de subintervalos, demostrándose que en la medida que la diferencia entre las sumas superiores e inferiores tienda a cero la aproximación al valor real de la integral es mayor.

Para mostrar los resultados por el Método de los Trapecios y el Método de Simpson se utilizó la programación.

En el caso del Método de los Trapecios se muestra no sólo el resultado de la integral sino el gráfico correspondiente. Veamos algunas pantallas del mismo.





Para el Método de Simpson se incluyó la obtención del error por el método de doble cálculo. Este error no es más que el cálculo aproximado del mismo a partir del resultado de la integral con diferentes valores de la amplitud de los subintervalos, es decir, utilizando la fórmula $R_h \approx \dfrac{I_h - I_{2h}}{2^p - 1}$.

Uno de los recursos que se utilizó para el estudio de los algoritmos fue el esquema de cálculo, con el cual se podía mostrar al estudiante, mediante la realización de varios pasos, la convergencia de un método (Carlos y Ansola, 2003).

Conclusiones

Los resultados de experiencias anteriores con el uso de esta tecnología muestran que los estudiantes consideran que la calculadora es una herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente y les permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa (Ansola y Carlos, 2006). En la experiencia presentada en este trabajo se reafirmó este criterio.

El uso de la tecnología no sólo permitió visualizar resultados que sin su uso hubiera sido muy engorroso mostrar en el pizarrón, sino que permitió hacer análisis comparativos de la convergencia de la definición al valor de la integral con distintas particiones, así como comparar resultados obtenidos con distintos métodos aproximados, todo lo cual redunda en el mejoramiento del aprendizaje del concepto. La calculadora se utilizó como un medio de enseñanza o sea como un instrumento o equipo que apoya la actividad de docentes y alumnos en función del cumplimiento del objetivo.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M, Guerra, A. y Lau, R. (2004). *Matemática Numérica*. La Habana. Cuba. Editorial Félix Varela.

Ansola, E., Carlos, E. (2006) "Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de Matemática Numérica". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 19. pp. 930-935

Carlos, E., Ansola, E. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática Numérica. Experiencias didácticas. Resúmenes de la Séptima Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Chilpancingo, Guerrero, México. Diciembre de 2003.

Carlos, E., Fernández, L. (2005). La calculadora gráfica como recurso didáctico en el aprendizaje del cálculo de integrales dobles. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 18. pp.799-805

ClassPad 300 Guía del Usuario. (s. f.). Recuperado de http://world.casio.com/edu_e/

Fikhtengol´ts, G. M. (1965). *The Fundamentals of Mathematical Analysis.* Volume 1. USA: Pergamon Press.

Martín, A. (2000). *CÁLCULO 2000. Matemática con calculadora gráfica.* Barcelona, España. División Didáctica Calculadoras Científicas CASIO.

Preiss, R, Arancibia, S, Riera, G., Moscoso, E. (2003). Optimización de la programación con calculadoras y su aplicación en la Matemática. En Preiss, R. (Eds.). *Programación en calculadoras y su optimización.* (pp. 1-47). Santiago, Chile. Edición Unidad Diego Portales.

Stewart J. (2002). *Cálculo. Trascendentes Tempranas. Cuarta Edición.* México: Thomson Learning.

Vigostky, L. S. (1966). *Pensamiento y Lenguaj*e. La Habana, Cuba: Edición Revolucionaria.

Zilberstein, J. (2003). Principios Didácticos en un Proceso de Enseñanza- Aprendizaje que Instruya y Eduque. En Preparación Pedagógica Integral para Profesores Universitarios (pp. 19 - 31). La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.