

## CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON CALCULADORAS GRAFICADORAS

Nelson Hernández Reyes, Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Pablo Gómez Fuentes  
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría Cuba  
nelsonh@ind.cujae.edu.cu, e\_hazday@yahoo.com, ecarlos48@yahoo.com, pablog@ind.cujae.edu.cu  
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Superior

**Resumen.** Como parte de la preparación matemática de un grupo seleccionado de estudiantes de nivel medio, se impartió un curso que incluye los tres grandes grupos de problemas de la Geometría: cálculos, demostraciones y construcciones geométricas. Los objetivos propuestos para el tema de construcciones geométricas fueron los siguientes:

- Consolidar los conocimientos de Geometría adquiridos por los estudiantes en el nivel de Secundaria Básica.
- Desarrollar en los estudiantes habilidades en la construcción de figuras geométricas utilizando lugares geométricos conocidos.

Este curso se diseñó con las calculadoras graficadoras y para ello se utilizó la calculadora Casio ClassPad 300.

**Palabras clave:** calculadora graficadora, construcciones geométricas

### Introducción y objetivo

En las etapas iniciales, la enseñanza de la geometría tiene por objeto, además de comunicar a los alumnos los resultados geométricos, darles a conocer el método con la ayuda del cual se obtienen estos resultados. Sabido es que los resultados geométricos son obtenidos por medio de razonamientos lógicos a partir de determinados planteamientos.

Los razonamientos lógicos son parte indispensable de todo el saber, y la geometría se destaca por la claridad y sencillez tanto en el enunciado del resultado como en los planteamientos de partida, de donde se obtendrán los resultados deseados. Es por esto que la geometría nos brinda muchas oportunidades para desarrollar el pensamiento lógico en nuestros educandos.

Al impartir este curso partimos de que la tarea esencial de la enseñanza de la geometría en la escuela consiste en conducir al alumno a razonar lógicamente, argumentar sus afirmaciones y demostrarlas.

En el trabajo con la geometría se presentan tres grandes grupos de problemas:

- Problemas de cálculo.
- Problemas de demostración.
- Problemas de construcción.

Estos últimos son los menos tratados en nuestros programas escolares, sin embargo, las construcciones geométricas contribuyen al desarrollo de la búsqueda de soluciones y al entrenamiento en las demostraciones.

Actualmente, en nuestra enseñanza, estos contenidos son abordados con regla y compás y uno de nuestros propósitos es introducir el uso de la tecnología, en particular el trabajo con calculadoras graficadoras Casio ClassPad 300.

Un aspecto notable en el uso de la tecnología es que permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas (Santos, 2000).

### **La experiencia**

Este trabajo consistió en desarrollar encuentros sobre construcciones geométricas haciendo uso de la tecnología, con estudiantes que aspiran a matricular carreras con amplia base matemática.

En la experiencia se puso en práctica el Principio Didáctico a partir del enfoque Histórico Cultural (Vigostky, 1966), relativo al Carácter Audiovisual de la Enseñanza y la Unidad de lo Concreto y lo Abstracto (Zilberstein, 2003)., que señala aquellas acciones específicas que son necesarias para revelar el contenido del concepto a formar y para representar este contenido primario en forma de modelos conocidos de tipo material, gráfico o verbal y además, proponerse que los estudiantes intervengan activa y conscientemente con los medios de enseñanza que están a su alcance.

En estos encuentros se abordaron dos componentes, uno directamente relacionado con el manejo de tecnología y otro de índole matemático, ambos factores necesarios para el estudio actual de las Matemáticas de la Enseñanza Superior.

El primer componente, de índole tecnológica, se alcanza mediante la utilización de la calculadora graficadora Casio ClassPad 300. La calculadora gráfica como herramienta tecnológica nos ofrece la posibilidad de despertar el interés del estudiante y estimular su comprensión. (Edwards, 2000)

El segundo componente, de índole matemática, es emprendido a través de actividades que apuntan al esfuerzo lógico, analítico y/o crítico, abordando temas básicos de la geometría que son primordiales para el estudiante, a la hora de enfrentar con éxito sus exámenes de ingreso así como el primer semestre de la Universidad.

Estos encuentros forman parte de un curso facultativo para aquellos estudiantes que lo soliciten.

### **¿En qué consisten los problemas de construcción?**

En estos problemas se trata de construir una figura geométrica con instrumentos de dibujo dados, usualmente son la regla y el compás los cuales se sustituyen por la calculadora.

La solución del problema consiste no tanto en la construcción de la figura como en explicar el modo en que se realiza y en efectuar la demostración correspondiente. El problema se considera resuelto si se ha señalado el método de construcción de la figura y se ha demostrado que realizando las construcciones indicadas se obtiene efectivamente la figura con las propiedades pedidas.

Los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permiten transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de

hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones. (Arcavi y Hadas, 2000)

Las ventajas antes señaladas se pusieron de manifiesto en los problemas resueltos, pues con el uso de la tecnología podemos conservar la construcción ya realizada, realizar reflexión, traslación, rotación, dilatación y transformación general, de forma tal que los alumnos pueden en algunas ocasiones comprobar que su intuición del problema a resolver era correcta. También pueden comprobar si las soluciones que se obtienen son únicas así como encontrar vías para realizar las demostraciones, sobre todo aquellas que se efectúan por movimientos, las cuales, nuestra experiencia como docentes nos ha mostrado, que muy pocos estudiantes acuden a ellas.

De igual manera el ambiente dinámico les permite descubrir que hay problemas que tienen soluciones sujetas a determinadas condiciones. Por lo que no nos cabe duda que las posibilidades de éxito ante un problema de un estudiante que haya sido preparado con el uso de la tecnología son mayores, aun no disponiendo en ese momento de la calculadora o computadora, ya que lo importante no es el uso de la tecnología para resolver el problema, sino todos los análisis, reflexiones que nos permite hacer la tecnología para reforzar las estrategia a la hora de resolverlo.

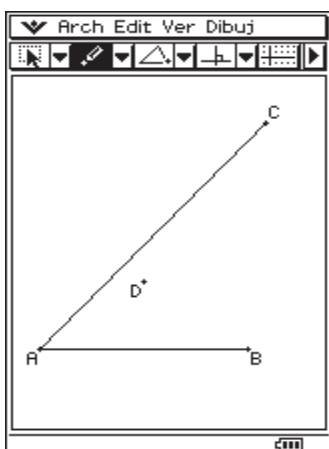
Veamos lo anterior a partir de un ejemplo.

Se da un punto  $D$  dentro de un ángulo  $CAB$ . Se requiere trazar una recta  $l$  por el punto  $M$  de tal manera que forme con dicho ángulo un triángulo de área mínima.

Para resolver el problema debemos plantarnos dos casos.

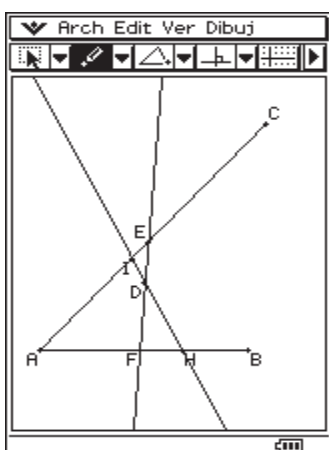
- El ángulo dado es agudo
- El ángulo dado es obtuso

Ocupémonos del primer caso cuando el ángulo dado es agudo.

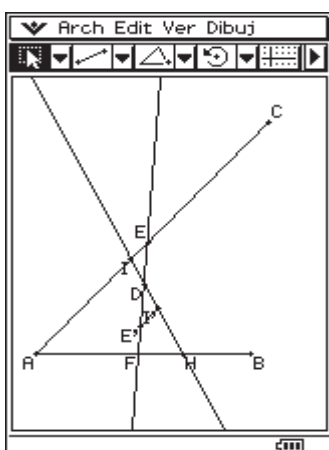


Observemos que en el punto D se pueden trazar infinitas rectas que determinen un triángulo con el ángulo dado, se trata de encontrar aquella que determine el triángulo de área mínima.

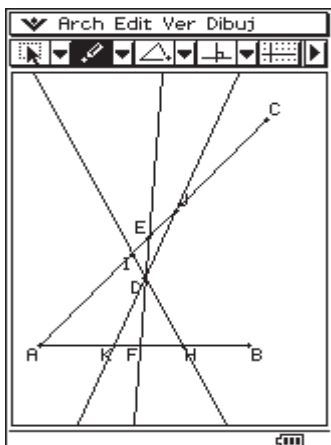
Tracemos una recta cualquiera y analicemos si es posible disminuirle el área al triángulo formado.



Al trazar la recta IH obtenemos el triángulo AIH y al trazar la recta EF se tiene el triángulo AEF el cual tiene un área menor que el primero luego la recta IH no puede ser la recta deseada

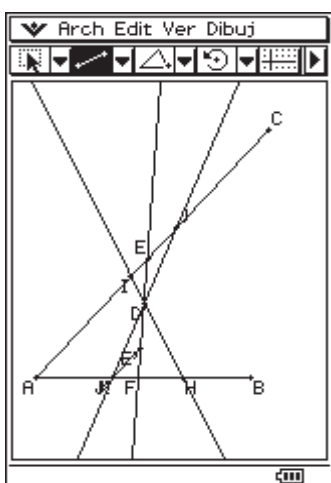


Observemos que si realizamos una rotación de centro en D y ángulo de  $180^\circ$  sobre los puntos E e I se obtienen las imágenes E' e I' y por tanto los triángulos IED y DE'I' son iguales lo que nos muestra que el área del triángulo AEF es menor que la del AIH.



Al trazar JK se obtiene el triángulo AJK cuya área es menor que la del triángulo AEF por tanto EF no era la recta deseada. Pues rotando los puntos E y J con centro en D podemos comprobar lo antes planteado.

La pregunta sería ¿hasta cuando se podrá seguir minimizando el área del triángulo?, el alumno podrá seguir trazando rectas hasta que logre conjeturar que esto sucederá cuando D sea el punto medio del segmento que determina la recta al cortar los lados del ángulo.



Ahora nos queda formalizar nuestro problema, en primer lugar construir la recta y posteriormente realizar la demostración del triángulo de área mínima.

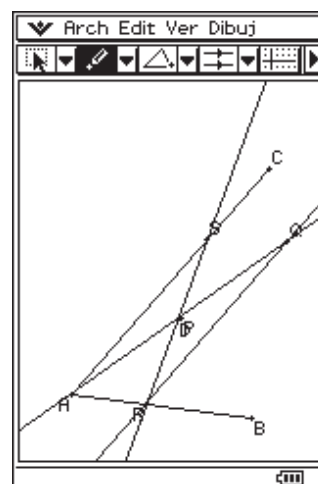
### Construcción

Tracemos la recta AD.

Marquemos en ella el segmento  $AD = DQ$ .

Por el punto Q tracemos una recta paralela a uno de los lados del ángulo (AC) hasta que corte al otro lado en el punto R.

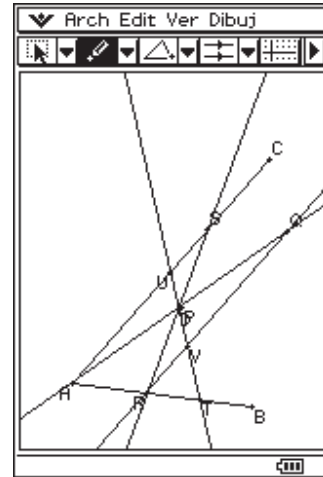
La recta buscada pasa por los puntos RD



### Demostración

Para realizar la demostración realicemos los razonamientos que nos llevaron a encontrar la recta deseada. Sea  $l$  una recta arbitraria que pasa por el punto  $D$  y corta a los lados en los puntos  $U$  y  $T$ .

Como el triángulo  $UDS$  es igual al triángulo  $DRV$  por (ala) Entonces el triángulo  $ASR$  y el cuadrilátero  $AUVR$  tienen igual área cuya área es menor que la del triángulo  $AUT$



*Si el ángulo es obtuso, la construcción se efectúa de modo análogo (el lector puede hacerla)*

De manera general, el software funciona como una herramienta útil para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y eventualmente proponer argumentos que las soporten. Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de software (Santos, 2001).

## Conclusiones

La experiencia obtenida en este trabajo demostró que el uso de la tecnología favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, lo cual se manifestó en la motivación de los estudiantes al abordar los problemas, conjeturar resultados y demostrar los mismos.

Además se corroboró que a partir de la realización de los problemas propuestos los estudiantes aumentaron sus habilidades en la utilización de la calculadora incluso para resolver otros problemas matemáticos, lo cual sirvió para proponer la realización de diferentes cursos abordando otras temáticas.

Se comprobó que los estudiantes que asistieron a este curso obtuvieron mejores resultados en las evaluaciones realizadas en su curso académico. Esta herramienta, puede apoyar funciones cognitivas como la visualización o entendimiento a partir de las representaciones geométricas que proporciona.

## Referencias bibliográficas

Arcavi, A., Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, pp.25-45.

*ClassPad 300 Guía del Usuario*. (s. f.). Disponible en : [http://world.casio.com/edu\\_e/](http://world.casio.com/edu_e/)

Edwards, B. (2000). Motivando temas de matemáticas con la calculadora gráfica. *Revista de didáctica de las matemáticas*. Volumen 41, pp. 45–48.

Lidski, V. (1986). *Problemas de matemática elemental*. Moscú: Editorial Mir.

Muñoz, F., Campistrous, L. (1981). *Problemas de matemática elemental*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Pogorelov, A.V. (1974). *Geometría Elemental*. Moscú: Editorial Mir.



Santos, L. M. (2001). El Uso de Software Dinámico en el Desarrollo de Significados y Conexiones en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Memorias Conferencia Internacional Sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

Santos, M. (2000). Students' approaches to the use of technology in mathematical problem solving. Paper presented at the working group *Representation and Mathematics Visualization*. PMENA, Tucson, Arizona.

Tsipkin, A.G. (1979). *Manual de Matemática para la Enseñanza media*. Moscú: Editorial Mir.

Vigostky, L. S. (1966). *Pensamiento y Lenguaje*. La Habana: Edición Revolucionaria

Zilberstein, J. (2003). Principios Didácticos en un Proceso de Enseñanza- Aprendizaje que Instruya y Eduque. En *Preparación Pedagógica Integral para Profesores Universitarios* (pp. 19 - 31). La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.