

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA, UN ACERCAMIENTO VISUAL CON GEOGEBRA

Armando López Zamudio

C.B.T.i.s. No.94

larmandozam@hotmail.com

Campo de investigación: Tecnología Avanzada y Visualización

México

Nivel: Medio

Resumen. *En un artículo escrito por la historiadora Grabiner (1983) destaca que la derivada fue primero utilizada, después descubierta, luego desarrollada y finalmente definida. Este análisis nos ayuda a entender las dificultades del concepto y los tropiezos que se dieron en su desarrollo histórico, dándonos pauta para su enseñanza. La primera etapa en que la derivada fue utilizada de manera inconsciente, Grabiner se refiere al método de máximo y mínimos de Fermat, y esta propuesta retoma dicho método como un primer acercamiento plausible al concepto de derivada, utilizando el software GeoGebra de Hohenwarter M. (2007) y sus bondades visuales, como un recurso didáctico que permite a los estudiantes de bachillerato apropiarse del concepto en cuestión.*

Palabras clave: visualización, derivada, GeoGebra

Introducción y objetivo

Una de las tareas esenciales del docente es el diseño de estrategias de aprendizaje que incluya diferentes ambientes o espacios educativos, estas estrategias en matemáticas deben incluir métodos basados en la resolución de problemas, la simulación, el trabajo en equipo y el uso de las tecnologías. El software de geometría dinámica como lo es GeoGebra es un excelente recurso que nos permite modelar y simular diferentes problemas matemáticos de tópicos de las materias de Álgebra, Geometría y trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo. En este ambiente los estudiantes pueden inspeccionar un rango muy amplio de ejemplos geométricos, de esta manera ellos extienden sus habilidades para formular y explorar conjeturas, así como para juzgar, construir y comunicar argumentos matemáticos apropiadamente. Para Wolfgang (1997) el uso de software de matemáticas apoya al estudiante en el proceso de aprender a visualizar. Las figuras geométricas se conceptualizan como resultados de construcciones, cuyas propiedades son definidas por las relaciones establecidas entre sus partes. Esta

1166

visión es más difícil de transmitir por medio de construcciones hechas con lápiz y papel, entonces la observación de las propiedades que se mantienen invariables al modificar la forma y el tamaño de las figuras, motiva la explicación por parte del estudiante en un ambiente de la geometría dinámica.

En este tenor proponemos el uso del software de geometría dinámica GEOGEBRA como un espacio educativo que facilita los procesos de aprendizaje, en particular del concepto de derivada del cual tradicionalmente privilegiaba los procesos algorítmicos y no el conceptual. Esta propuesta pretende revertir esta situación. La Reforma Curricular dada a conocer por el COSNET (2004) nos sugiere el uso secuencias didácticas: “Es un conjunto de actividades, organizadas en tres bloques: apertura, desarrollo y cierre” (SEIT, 2004, p. 12) Es apremiante la elaboración de estas secuencias didácticas, que rescaten la experiencia del profesor pero que cuenten con un respaldo científico.

Objetivo

Elaborar una propuesta didáctica a través de una secuencia didáctica que involucre el software GeoGebra para el tratamiento del Cálculo Diferencial en el bachillerato, que posibilite a los estudiantes comprender los conceptos fundamentales, particularmente el concepto de DERIVADA que es imprescindible para la modelación de fenómenos y su aplicación en el curso de Matemática Aplicada.

Antecedentes

La enseñanza del Cálculo Diferencial (CD) en el Nivel Medio Superior, en muchos países, se enfrenta a un problema generalizado: los estudiantes escasamente comprenden sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con la derivada. Las evidencias mostradas en congresos especializados y la experiencia misma de los profesores de esta asignatura son coincidentes: al terminar sus cursos de CD cantidades significativas de estudiantes

logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, pero difícilmente comprenden el significado de esos procedimientos. Incluso, difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre la rapidez de la variación a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto. Hay un gran trabajo por desarrollar, para crear secuencias didácticas, en particular en el curso de cálculo diferencial y matemática aplicada, Para Arcavi & Hadas "...la herramienta tecnológica en sí misma es de poco valor si no es acompañada por situaciones problema que le dan significado"(Arcavi & Hadas, 2000, p. 26). Vinner (1992) presenta un estudio acerca del uso de las consideraciones visuales en los cursos de cálculo. Muestra con dos preguntas: una sobre un teorema relacionado con el valor medio del cálculo integral y otra sobre el teorema del valor medio del cálculo diferencial, los cuales son susceptibles de verificarse geoméricamente, -resaltando precisamente que a esta verificación debiera considerarse como una demostración matemática en la enseñanza a estudiantes-, la preferencia de los estudiantes por el aspecto algebraico de las demostraciones y su evitación de las consideraciones visuales. Sugiere el autor de este artículo –basado en los resultados obtenidos en este experimento llevado a cabo con estudiantes de primer año universitario- que debiera enfatizarse el acercamiento visual en las demostraciones y resolución de problemas y que debiera considerarse a tales interpretaciones geométricas, como demostraciones matemáticas. Y siempre que sea posible, enseñar las interpretaciones visuales de nociones algebraicas. Vinner, (1992) intentan ser bastante específicos acerca de por qué muchos estudiantes que han llevado un curso universitario de cálculo adquieren un conocimiento conceptual deficiente del curso. Sobre un estudio amplio con ciento treinta estudiantes, a quienes se les aplicó un cuestionario con once preguntas, presentan una muestra detallada del tipo de análisis cualitativo que realizan. Observaron que aunque hay elementos que indican una buena comprensión sobre cálculo diferencial por parte del estudiante, en cuestiones algorítmicas rutinarias,

encontraron otros elementos en la resolución de problemas conceptuales no rutinarios, que muestran serias conceptualizaciones erróneas. Existen obstáculos para la comprensión del concepto de derivada, con la palabra “tangente” entendida como el nombre de una línea recta que toca en un punto a una curva, en contraste con su significado como función trigonométrica usada para definir la pendiente de una línea recta. Así como el concepto de derivada puntual. Para Arcos (2006) el enfoque del Cálculo infinitesimal, en su versión más próxima a la presentación de Leibniz debería de considerarse en la enseñanza sobre todo en las escuelas de ingeniería, y considera el enfoque formal para las escuelas de ciencias. Vinner (1992) muestra la preferencia de los estudiantes por el aspecto algebraico de las demostraciones fracasando en ellas, y su evitación de las consideraciones visuales en donde los problemas a resolver podían verificarse geoméricamente. En un artículo escrito por la historiadora Grabiner (1983) destaca que la derivada fue primero utilizada, después descubierta, luego desarrollada y finalmente definida. Este análisis nos ayuda a entender las dificultades del concepto y los tropiezos que se dieron en su desarrollo histórico, dándonos pauta para su enseñanza.

La primera etapa en que la derivada fue utilizada de manera inconsciente, Grabiner se refiere al método de máximo y mínimos de Fermat, y esta propuesta retoma dicho método como un primer acercamiento plausible al concepto de derivada, utilizando el software GeoGebra y sus bondades visuales, como un recurso didáctico que permite a los estudiantes de bachillerato apropiarse del concepto en cuestión.

La propuesta

La secuencia se lleva a cabo en un aula, que cuenta con una computadora y un proyector, donde se utilizara como un pizarrón electrónico para interactuar con los alumnos, el docente y la secuencia didáctica. A grandes rasgos las etapas de la secuencia son las siguientes:

Etapa de apertura (Tiempo 4 horas) Aquí se plantean una problema que involucre la necesidad de encontrar un máximo, es decir encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva con pendiente cero, para luego usando GeoGebra visualizar las diferentes maneras en que se construyo históricamente la recta tangente a una curva desde los griegos hasta el método de Descartes.

Etapa de Desarrollo: (Tiempo 8 horas) Aquí se da a conocer el método de Fermat para encontrar tangentes a curvas, se ejemplifican uno o dos casos de funciones, algebraicas y trascendentes, usando acercamientos visuales con GeoGebra de una recta secante a una curva hasta que sea una recta tangente a la curva en cuestión en un punto fijo.

Etapa de Cierre: (4 horas) Se plantean casos visuales en que se da la grafica de la función derivada y se pide un bosquejo de la función primitiva, se resuelve por este método el problema que dio origen al estudio de las tangentes de pendiente cero.

Metodología

La metodología que se lleva a cabo en esta investigación es de tipo cuantitativa, hemos considerado la necesidad del estudio a partir de datos obtenidos por análisis curricular del curso de Cálculo y Matemáticas Aplicadas que se imparte en la educación media superior tecnológica. El estudio se sitúa en el Centro de Bachillerato Tecnológico y de Servicios número 94 (CBTIS N° 94) de Pátzcuaro, Michoacán. Los pasos a desarrollar en este estudio son los siguientes.

- Selección de una muestra.
- Aplicación del mismo examen a un grupo de expertos.
- Diseño e implementación de la secuencia didáctica.
- Aplicación de una evaluación al grupo de estudio.
- Análisis de resultados.

- Conclusiones.

De la muestra: Grupo piloto

La muestra es pseudo aleatoria, y fue seleccionada de un total de 10 grupos, alumnos del CBTIS No. 94, consta de 190 alumnos pertenecientes a 5 grupos (38,34,47,42 y 29 alumnos) del sexto semestre del nivel medio superior con edades entre 17-18 años. Estos alumnos habían cursado álgebra, geometría plana euclidiana, trigonometría y geometría analítica, un curso de cálculo en el que abordaron el concepto de derivada hasta algunas de sus aplicaciones como es obtener máximos y mínimos de una función. Dos grupos son del bachillerato físico matemáticas cursando paralelamente la especialidad de computación, y tres de químico biológicas cursando paralelamente la especialidad de puericultura. La secuencia se aplicara dentro de los contenidos de la segunda unidad del curso Matemática Aplicada que corresponde a Aplicaciones del cálculo diferencial.

Grupo Control

Este grupo de expertos consta de 17 profesores de matemáticas de diferentes niveles, 2 nivel medio, 10 nivel medio superior, 5 nivel superior. Todos ellos inscritos en un programa de maestría en matemática educativa, donde como parte del curso Software Educativos que incluye el programa se le aplico el mismo examen diagnóstico que al grupo de estudio.

Examen Diagnostico

El examen consta de cuatro preguntas, la primer pregunta fue tomada del examen Education Testing Service (1997) mejor conocidos como exámenes GRE (pregunta no. 5) que demanda del dominio profundo del concepto de la derivada. La segunda pregunta investiga si el estudiante conoce el concepto de recta tangente a una función, y el

1171

dominio del concepto de pendiente. La tercera pregunta investiga si se sabe relacionar la pendiente cero de una línea recta tangente como posibles máximos y mínimos. Y la cuarta pregunta es muy explícita *¿Cuál es su interpretación de la derivada de $f(x)$ geoméricamente en el punto $(x_1, f(x_1))$?*

Resultados

La siguiente tabla muestra los resultados del examen diagnóstico, donde podemos observar que el reactivo 4 tuvo solamente 2 aciertos y el reactivo 3 fue el que más aciertos tubo 23, sin embargo la calificación promedio de toda la muestra fue de 7/100 es decir 0.07 una calificación que deja mucho que desear ya que debemos considerar que estos alumnos ya cursaron una materia de calculo diferencial. Podemos también observar que el grupo B tuvo un mejor desempeño que los otros grupos sin embargo su calificación promedio es de 1.6 que de ningún modo es alentador.

Grupo	Reactivo 1	Reactivo 2	Reactivo 3	Reactivo 4	Promedio
B	3	9	13	0	16/100
C	3	4	6	0	9/100
E	0	3	3	1	4/100
F	2	0	0	1	2/100
G	2	0	1	0	2/100
TOTAL	10	16	23	2	

Tabla 1. Examen diagnóstico aplicado a grupo experimenta

Para validar el examen y comparar los aprovechamientos del grupo experimental se aplico el examen a un grupo de expertos el cual ya se describió al inicio de la metodología, los resultados aparecen a continuación en la Tabla 2.

Reactivo 1	Reactivo 1	Reactivo 1	Reactivo 1
7	16	14	8

Tabla 2: Examen diagnóstico aplicado a expertos

El promedio del grupo de expertos es de 65/100 es decir 6.5 en la escala de uno a diez.

Por lo que podemos considerar valido el examen.

Los resultados que se obtuvieron después de que el grupo fue sometido a la secuencia didáctica, (cabe señalar que el examen aplicado fue similar al diagnostico, sin embargo no fueron los mismos reactivos) se muestran en la Tabla 3.

GRUPO	Reactivo 1	Reactivo 2	Reactivo 3	Reactivo 4	Promedio
B	23	29	29	31	74/100
C	8	17	17	23	48/100
E	10	19	20	47	51/100
F	7	13	30	28	46/100
G	4	5	14	38	39/100
TOTAL	52	83	110	167	

Tabla 3. Examen aplicado al grupo experimental después de la secuencia didáctica

El promedio general de la muestra fue 54 de 100 es decir un 5.4 que es mucho mayor del 0.07 que se obtuvo antes de la experimentación en consideración con el grupo de expertos podemos considerar que la secuencia fue un éxito.

Conclusiones

Se elaboro una propuesta didáctica a través de una secuencia didáctica que recurrió a las ideas de Fermat y al uso el software de geometría dinámica GeoGebra para el tratamiento del concepto de derivada como un acercamiento bastante plausible sobre todo si hablamos de estudiantes de bachillerato, particularmente el concepto de DERIVADA que es imprescindible para la modelación de fenómenos y su aplicación en el curso de Matemática Aplicada. Podemos también señalar que la hipótesis de se acepta pues la mayoría 86% de los estudiantes interiorizaron el concepto de derivada, así como de otros conceptos subyacentes como es el de pendiente, línea recta, tangente, secante. Los alumnos pudieron interpretar geométricamente el concepto de derivada así como su

aplicación en la resolución de problemas de optimización. En los resultados pudimos observar que 164 alumnos de 190 pudieron contestar la pregunta 4 que directamente cuestiona el concepto de la derivada, lo que antes de la secuencia didáctica sólo 2 alumnos contestaron correctamente. Por otra parte podemos observar que los alumnos del grupo B que en el inicio mostraron tener mayores conocimientos en el tema, después de la experimentación superaron en la calificación promedio a los expertos, ya que debemos recordar que el promedio de los expertos fue de 6.5 mientras que los alumnos del grupo B fue de 7.4, unas de las explicaciones a esta diferencia es que este grupo tiene conocimientos de computación y su bachillerato es de físico matemáticas, en cambio los otros grupos son de la especialidad de Puericultura y el bachillerato es químico biológicas. Este acercamiento sin duda será de gran ayuda para el desempeño de los alumnos y alumnas en su estudio de la integral. El promedio general fue de 5.4 que no es deseable pero supera en mucho a lo obtenido en el examen diagnóstico. ¿Que nos queda en el horizonte? Mejorar las secuencias didácticas, y experimentar con alumnos usando una metodología donde los estudiantes puedan contar con una computadora para que puedan interactuar más con el software, por lo que es importante diseñar actividades en ese sentido.

Referencias bibliográficas

Arcavi A., Hadas N. (2000) Computer mediated learning: An example of an approach; *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5 25-45.

Arcos Quezada J. I. (2006) El cálculo infinitesimal y la enseñanza del cálculo en el siglo XXI. En Sepúlveda, L. A., García, P. R., Guerrero, M. L. (Eds.). *Memorias. XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas*, 51-57 Morelia: UMSNH.

Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (COSNET) (2004) *Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica*, Ed. Editores e impresores FOC S. A. De C. V. México.

Wolfgang, F. (1997) Triángulos y Cuadriláteros Inscritos en un Círculo, Una aplicación del software educativo “Cabri Géometre” *Educación Matemática* 9(2) 116-136.

Grabiner, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: The derivate from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56(4) 195-206.

Education Testing Service (1997) *Graduate Record Examinations Mathematics Test*, Author. Princeton N. J. 08541.

Hohenwarter M. (2007) GeoGebra (Versión 3.0) [Software de cómputo] Salzburgo, Austria.

Subsecretaria de Educación e Investigación Tecnológicas (SEIT) SEP (2004) *Reforma Curricular del Bachillerato Tecnológico Programa de Estudios*. México.

Vinner, S. (1992) *The Avoidance of Visual Considerations in Calculus students Focus on Learning Problemas in Mathematics*,11 (1989) 149-156.