CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DINÁMICA Y MODELO DE VAN HIELE. UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Gabriela Molina, Alejandro Rosas, Apolo Castañeda
Instituto Politécnico Nacional . México
jmolinaz@ipn.mx, alerosas2000@gmail.com, apcastane@gmail.com

Resumen. - En este trabajo presentamos una experiencia de formación de profesores en el área de Geometría Euclidiana. La propuesta integró dos elementos principales: La geometría dinámica y El modelo de razonamiento de Van Hiele. La primera, permite que los estudiantes exploren la geometría y tengan la posibilidad de estudiar objetos y propiedades geométricas para redescubrir teoremas por ellos mismos, de generar ideas matemáticas, sus propias estrategias y formas de resolución de un problema. Por su parte, el Modelo de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren la calidad de su razonamiento. La metodología consistió en hacer partícipes a los profesores y no sólo receptores. Como resultados por una parte se tuvo la profundización de los profesores en sus conocimientos matemáticos y por otra, la aceptación y motivación hacia poner en práctica la propuesta.

Palabras clave: - geometría dinámica, construcción, modelo de aprendizaje.

Abstract. - In this work we present an experience of teacher training in the area of Euclidean Geometry, the proposal integrated two main elements: The dynamic geometry and the model of Van Hiele reasoning. The first, make it possible the students explore the geometry and they have the possibility to study objects and geometry properties to rediscover theorems for themself, to generate mathematical ideas, their own strategies and ways of solving a problem. Meanwhile, the Van Hiele model explain, how to produce the evolution of students' geometry reasoning and, how can a professor to help to his students to improve the quality of their reasoning. The methodology consisted on engaging teachers and not just recipients. As a result of one part it had the depth of the professors in their mathematical knowledge and the other, the acceptance and motivation to implement the proposal.

Key words: - dynamic geometry, construction, learning model.

Introducción

El conocimiento geométrico es un componente matemático que ocupa un lugar privilegiado en los currículos escolares por su aporte a la formación del individuo. Los objetivos clásicos de la enseñanza de la geometría son fundamentalmente: conocer y analizar las características y propiedades de los objetos geométricos, e introducir y desarrollar el pensamiento lógico y el razonamiento deductivo (NCTM, 2000; Hansen, 1998; citados en Castiblanco, 2004). Para el logro de ambos objetivos, se tienen que tomar en cuenta que las diversas dimensiones del pensamiento geométrico se apoyan en dos procesos cognitivos: *la visualización* y los procesos de *razonamiento discursivo*.

Por lo anterior expuesto, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico, para poder diseñar ambientes de aprendizaje; pero, para que los docentes puedan desarrollar este tipo de actividades, consideramos que es necesario que ellos se vean inmersos en las mismas.

En la Facultad de Matemáticas (FMAT) de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) se cuenta con el Diplomado en Educación Matemática (DEM), dirigido a profesores de matemáticas de nivel medio superior y tiene como objetivos, que los profesores participantes profundicen en los conocimientos matemáticos, se capaciten en la didáctica de la matemática y desarrollen la habilidad para organizar, analizar y diseñar nuevas formas de aprendizajes. Particularmente, en este trabajo presentamos una experiencia de aula que incluye parte de lo que se trabaja en el módulo 2 del DEM correspondiente a Geometría Euclidiana, titulado: Perspectivas del pensamiento Geométrico.

En el módulo 2, centramos la atención principalmente en el diseño y rediseño de actividades con *Geometría dinámica*; consideramos que usando geometría dinámica, es posible que los discentes exploren la geometría euclidiana y tengan la posibilidad de estudiar objetos y propiedades geométricas para redescubrir teoremas por ellos mismos. La Geometría dinámica ofrece la posibilidad de una aproximación al estudio de la geometría que permite la manipulación de los objetos geométricos, abriendo así, posibilidades que antes no estaban disponibles para los estudiantes (Larios, 2006).

A través de estas actividades con geometría dinámica los docentes se ven inmersos en una nueva geometría, teniendo que pasar por los procesos de *visualización, conjeturación, experimentación y validación*; de modo que puedan no sólo desarrollar su pensamiento geométrico, sino que reconozcan los beneficios de desarrollar actividades que propicien que los estudiantes pasen por estos procesos.

Por otra parte, tenemos que considerar que al ir avanzando en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben ir perfeccionando el lenguaje geométrico, ir introduciendo encadenamientos lógicos, accediendo a la estructura deductiva de la geometría. Por lo tanto, la transformación del discurso debe llevar al discente de una *argumentación informal* que se apoya fuertemente en la *visualización*, y por lo tanto es de carácter *descriptivo*, a una *organización discursiva* formal que encadena proposiciones usando reglas lógicas. En un discurso de carácter descriptivo se ligan proposiciones o enunciados a partir de la visualización de una figura y sus configuraciones, por asociaciones evidentes y espontáneas tal como argumentamos al conversar, mientras que en el caso de los discursos formales, el razonamiento no se centra en una descripción basada en la visualización de una figura, sino que la organización del discurso requiere hacer uso de proposiciones que de antemano tienen un estatus teórico específico (axiomas, definiciones, teoremas).

En la geometría como ciencia del espacio y la forma, lo que vemos en una figura puede ser tomado como garantía de certeza; mientras que en la geometría deductiva, cualquier afirmación debe ser deducida de otras dadas (Ver Figura 1).

Figura 1

Por otra parte, las actividades didácticas tuvieron como sustento teórico el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, el cual es una teoría de aprendizaje que describe las formas de razonamiento de los estudiantes de Geometría. Sus autores son Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, educadores y matemáticos holandeses, quienes elaboraron un modelo que explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y por otra parte, cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren la calidad de su razonamiento.

La idea básica de partida del Modelo de Van Hiele es que el aprendizaje es un proceso que el estudiante va alcanzando conforme va estructurando su conocimiento y que en la Geometría dicho aprendizaje se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento; éstos niveles no van asociados a la edad y sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente. La descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos puedan acceder al nivel del razonamiento superior al que tienen actualmente, las denominaron *fases de aprendizaje*. Por lo anterior expuesto, se dice que el Modelo de Van Hiele a diferencia de otras teorías del aprendizaje tiene no sólo un carácter descriptivo sino también instructivo, como lo podemos ver en la siguiente figura:

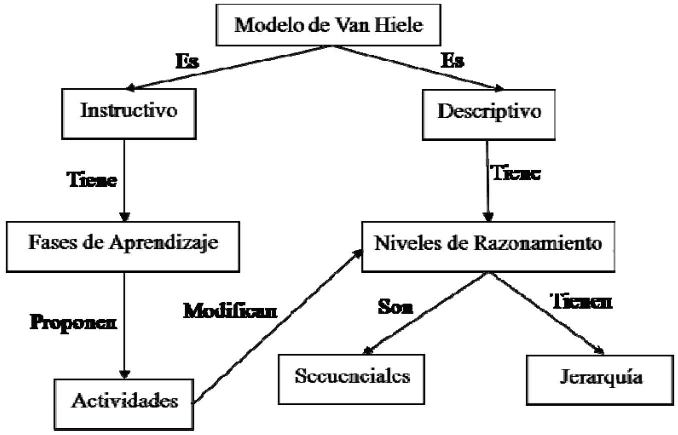

Figura 2

En su modelo Van Hiele distingue cinco niveles de aprendizaje o niveles de razonamiento, y afirma que es necesario dominar un nivel antes de pasar al siguiente, estos niveles son:1) Visualización, 2) Análisis, 3) Ordenación, 4) Deducción formal, 5) Rigor (Rodríguez, 2005).

En el nivel 1 el estudiante identifica, nombra, compara y opera sobre figuras geométricas de acuerdo con su apariencia global.

Este nivel tiene tres características principales: Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes, se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una puerta, etc.); no hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto; no reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo.

En el nivel 2, el estudiante analiza las figuras geométricas en términos de sus componentes y relaciones entre componentes, y descubre empíricamente propiedades y reglas de una clase de figuras. Empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes. Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación. De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades no pueden elaborar definiciones. Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades, sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

Se dice que los alumnos han alcanzado el Nivel 3 cuando: describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren. Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que en su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

En el nivel 4 los alumnos ya realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas; se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas, y se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado. Adquirido este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, se tiene una visión globalizadora de las Matemáticas. Aquí el estudiante demuestra teoremas deductivamente, de una manera formal (usando axiomas y teoremas antes demostrados), y establece relaciones entre redes de teoremas.

En el nivel 5 se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías; se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático; el estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analiza y compara estos sistemas.

El modelo de Van Hiele propone además a los profesores una secuencia cíclica de cinco fases de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a progresar desde un nivel de pensamiento al siguiente. En la figura 3 se presenta un esquema en el que se exponen cada una de las fases del aprendizaje.

Particularmente en este trabajo nos centramos en el tema c*onstrucciones geométricas*, las cuales pretenden asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción y lograr una generalización; a través del proceso de construcción, van poniéndose en evidencia propiedades geométricas y las relaciones entre ellas, constituyéndose en la semilla de la argumentación. La dificultad de la utilización de la construcción como campo de reflexión, radica en la dificultad motriz que conlleva a la utilización idónea de los instrumentos técnicos, sin embargo, el software de geometría dinámica puede liberar la atención de los alumnos para concentrarla en la reflexión teórica sobre los mismos ya que asegura la precisión de los trazados, es así que, la construcción geométrica dinámica puede constituirse un campo de exploración y reflexión, de donde la deducción puede surgir y organizarse.

La construcción también es un mecanismo para validar afirmaciones dentro de un contexto, a partir de la formulación de inferencias de carácter deductivo, da pie a la demostración, con lo cual las proposiciones geométricas cobran importancia por el papel que desempeñan en el sistema axiomático deductivo.

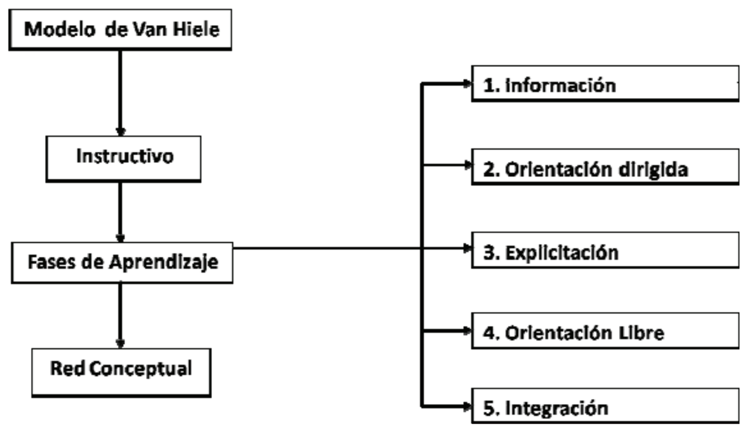

Figura 3

Metodología

Como antes se mencionó, este trabajo es producto de un curso titulado Perspectivas del pensamiento geométrico, correspondiente al Módulo 2 del DEM, pese a que el Programa está dirigido a profesores de nivel medio superior, tuvimos la oportunidad de impartirlo a un grupo de 12 profesores, con formación inicial en ingeniería y que laboraban en una Institución de Educación Tecnológica de nivel Superior. El curso tuvo una duración de 48 horas, 40 presenciales y 8 a distancia, las 40 horas presenciales fueron repartidas en las cuatro unidades de las que constó el curso, en la primera se estudió el desarrollo histórico conceptual de la geometría, en la unidad dos se presentó el Modelo de Van Hiele como un modelo de aprendizaje para la enseñanza de la geometría, en la unidad tres las características, propiedades y uso de la geometría dinámica, y por último la unidad cuatro nombrada Resolución de problemas. Los profesores trabajaron con el software de geometría dinámica Cabri Geómètre II y desarrollaron las actividades pasando por cada una de las fases del aprendizaje propuestas por Van Hiele, es decir, por la fase de información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración, éstas se presentaban parte por escrito y parte verbalmente. En las ocho horas a distancia los profesores trabajaron en la elaboración una propuesta para su implementación en el aula.

A continuación mostramos algunos ejemplos de actividades que los profesores trabajaron en el aula; cabe aclarar que por espacio no presentamos las actividades completas, sino una parte de éstas, aquí les llamamos actividades 1 y 2.

Actividad 1

a) *Para la fase de orientación dirigida:*

Tema. Suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo

1. Construya un triángulo denotando sus vértices con A, B y C. Mida los ángulos interiores del triángulo ABC
2. Calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo ABC.
3. ¿Qué valor obtuvo?
4. Mueva los vértices A, B o C para generar otros triángulos.
5. ¿Cuál es ahora el valor de la suma de los ángulos interiores del estos triángulos?
6. ¿Qué puedes decir de la suma de los ángulos interiores de los triángulos encontrados?
7. Mueva los vértices A, B o C para generar otros triángulos diferentes, ¿se sigue cumpliendo lo que afirmaste en el paso 6?
8. Da una explicación que justifique la verdad de tu conjetura anterior.

b) Para la *fase de orientación libre*

¿Cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero ABCD?

Formule una conjetura y justifique la veracidad de su conjetura.

Los docentes al enfrentarse a realizar construcciones geométricas dinámicas tuvieron la oportunidad de profundizar en sus conocimientos geométricos, y a su vez reconstruir teoremas y propiedades por ellos mismos, y de esta forma valorar su importancia.

Además, para llevar a cabo las construcciones, los profesores pasaban por cuatro etapas: Exploración, Conjeturación, Experimentación y Validación. Por ejemplo, en la Actividad 2, en la *fase de orientación libre* se le plantea lo siguiente:

Sean A, B y C tres puntos fijos. ¿Qué condiciones debe satisfacer el punto D, para que las mediatrices de los lados del cuadrilátero ABCD se encuentren en un solo punto? Justifica tu respuesta.

El profesor construye con ayuda del software lo que se le indica en el enunciado, en este caso los puntos A, B, C e inicialmente construyen un punto D arbitrario y lo mueven de modo que cumpla la condición solicitada, de modo que va explorando a través del movimiento y la visualización del objeto en busca de una solución al problema planteado, después de ello establece una conjetura, es decir, establece las condiciones que debe cumplir el punto D para que siempre se cumpla que ABCD sea un cuadrilátero tal que las mediatrices de sus lados se encuentren en un solo punto. Una vez establecida la conjetura experimenta moviendo el objeto (punto D) de modo que pueda asegurarse que efectivamente su conjetura es válida, en caso de serlo, debe validarlo dando una construcción geométrica que asegure la veracidad de su conjetura y posteriormente planteando una demostración de la misma.

Resultados

Pese a ser profesores de nivel superior y con experiencia docente en el área de matemáticas, mostraron siempre disposición al aprendizaje, fueron participativos y abiertos a nuevas propuestas, con una actitud proactiva.

Durante el curso fuimos tomando notas de los comentarios y discusiones de los profesores, de donde rescatamos algunas que presentamos a continuación de los profesores que llamamos A, B, C y D.

> *(A) Esto es como crear geometría, mueves y mueves, planteas algo, para convencerte pruebas con más casos y finalmente hay que convencer al profesor; con esta propuesta los estudiantes pudieran prestar más interés que si sólo le pides demuestra algo que alguien ya demostró...)*
>
> *(B) Sí porque él ve la necesidad de convencer a los demás, pero primero el ya se convenció porque él lo encontró…*
>
> *(C) Ah entonces esto es lo que le llaman explorar, conjeturar,…mmm,…*

Podemos observar que identifican las etapas: explorar, conjeturar, posteriormente experimenta con otros casos, y cuando está convencido debe validar sus resultados.

En otro momento comentan lo siguiente:

> *(A) Ahí es donde interviene la construcción, es la que te asegura que lo que afirmas es correcto*
>
> *(B) Sí, pero también la demostración de que esa construcción es correcta es lo que sería validar, ¿verdad profesora?*

Entre los resultados que tuvimos es la aceptación y motivación de los profesores hacia la propuesta, señalan aspectos como los siguientes:

(A) Es motivante, pero no se trata de facilitarle las cosas, el piensa, razona, explora, es él el que saca sus conclusiones.

(D) Me gustaría implementarlo con mis alumnos, ahora entiendo qué significa que la enseñanza esté centrada en el estudiante, es él el que debe hacerlo, pero no es dejarlo sólo, nuestro trabajo es previo.

(F) Al fin entendí las construcciones geométricas, y el usar cabri no significó que yo no pensara, al contrario,…

Este trabajo nos permite observar que es importante que los profesores se vean inmersos en programas de formación y actualización no sólo informativos, sino donde puedan desarrollar o potencializar su pensamiento matemático y puedan convencerse de que la práctica de aula debe centrarse en la construcción del conocimiento por parte del estudiante y no en la exposición magistral del profesor.

Referencias bibliográficas

Castiblanco, A. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia*. Recuperado el 3 de julio de 2009 de

http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en una ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa* 9(3), 361-382.

Rodríguez, R. (2005). La geometría y los niveles de aprendizaje. En J. Alanís, R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, A. Garza, R. Rodríguez (Eds), *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp.151-168), México: Editorial Trillas.