CREENCIAS SOBRE LA MATEMÁTICA Y SU RELACIÓN CON LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Tulio Amaya de Armas (1), Natalia Sgreccia (2 y 3)
(1) Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo (Colombia). (2) Universidad Nacional de Rosario. (3) Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas . Argentina
tuama1@hotmail.com, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Resumen. - Se comparte la experiencia de diseño e implementación de un taller destinado a educadores matemáticos latinoamericanos que se desempeñan en escuelas secundarias. En dicho taller se propusieron actividades guiadas utilizando el programa Geogebra y se discutió sobre el potencial de los ambientes dinámicos en la búsqueda de patrones en matemáticas. El contenido en tratamiento fue el Teorema de Pitágoras, considerándose como un caso particular del Teorema de Fermat, sobre el que también se discutió. Se conjetura la relación entre tales teoremas a través de la manipulación del teorema de Pitágoras, con figuras del plano, entrando a analizar figuras en el espacio tridimensional para relacionarlo con el teorema de Fermat. Aquí se mencionan las actividades realizadas, así como algunos registros de la interacción con los profesores participantes del taller.

Palabras clave: – patrones, teoremas de Pitágoras y de Fermat, herramientas tecnológicas.

Abstract. - We share an experience of design and implementation of a workshop destined for Latin-American mathematics educators who work in secondary schools. In this workshop we proposed guided tasks using the software Geogebra and we discussed about the potential of the dynamic environments in the searching of patterns in math. The content in treatment was Pythagoras' Theorem, considering as a particular case of Fermat's Theorem about which was also discussed. The relation between such theorems through the manipulation of Pythagoras' theorem is conjectured, with figures of the plane, entering to analyze figures in the three-dimensional space to relate it to Fermat's theorem. Here we mention the realized tasks and some notes of the interaction with the teachers who participated of the workshop.

Key words: - patterns, Pythagoras and Fermat's theorems, technological tools.

Introducción

Las comparaciones internacionales sobre capacidades matemáticas de estudiantes de secundario ubican a Colombia y Argentina (entre otros países latinoamericanos) prácticamente al final de un conjunto considerable de naciones (Ministerio de Educación de España, 2009). Para detectar y contribuir a solucionar dicha problemática, se han venido realizando acciones específicas desde los Ministerios de Educación. Además, teniendo en cuenta las Metas Educativas para el año 2021 en Iberoamérica (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 2010), es necesario incorporar la tecnología a los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que la inclusión social se vincula, cada vez más, con el acceso al conocimiento, por la participación en redes y por el uso de la tecnología. Para acercarnos a la mejora que se proclama, consideramos crucial el fortalecimiento de la formación continua de los docentes, para resignificar formas de enseñar y aprender

Matemática. Una forma de contribuir a tal mejora es mediante propuestas de actividades concretas, como la que aquí se presenta.

Hegedus y Kaput (2004) conciben la tecnología como una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano, afirmando que estas nuevas herramientas conducen a nuevas maneras de pensar o razonar. Para Estrada (2005), un rasgo importante de las representaciones de los objetos matemáticos en un ambiente dinámico es poder operar con ellos y ver al mismo tiempo en una pantalla el efecto de estas acciones sobre dichas representaciones. De acuerdo con Herrera (2010), el debate sobre el papel de las tecnologías electrónicas en la Educación Matemática ya no se centra en si debemos usarlas o no, sino en cómo emplearlas inteligentemente para que nuestros estudiantes aprendan mejor Matemática.

Por otro lado, el Teorema de Pitágoras es considerado un verdadero trampolín para posteriores descubrimientos, tanto en la historia de la Matemática (entre otras cosas, dio origen a los números irracionales) como en la alfabetización matemática de las personas (numerosos problemas de medidas, entre otros, requieren de este conocimiento), lo que le da un considerable nivel de reconocimiento epistemológico a su enseñanza. Sin embargo, su significatividad en las escuelas suele quedar restringida a una fórmula que se utiliza irreflexivamente. Aunque han sido muchas las demostraciones y los enfoques desde los cuales se ha presentado y analizado dicho teorema, también es cierto que son muchas las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas que involucran las representaciones de nociones matemáticas fundamentales, como lo es ésta.

Centrando nuestra atención en la formación de docentes en Matemática que se desempeñan en el nivel secundario, nos preguntamos: ¿qué papel pueden jugar los ambientes dinámicos computacionales para ayudar al estudio comprensivo del Teorema de Pitágoras? y ¿qué tipo de actividades, desde la búsqueda de patrones, pueden facilitar dicho estudio?

Propuesta de actividad

Para el estudio del Teorema de Pitágoras se propuso, en el marco de un taller, una serie de actividades utilizando el programa Geogebra. A través de la búsqueda de patrones, se pretendió que los participantes pudieran visionar de una manera más completa dicho teorema, al relacionar las representaciones icónicas, gráficas y algebraicas.

En este contexto dinámico, se partió considerando que el Teorema de Pitágoras establece que si se tiene un triángulo rectángulo, el área de cualquier polígono regular (de *n* lados) que se forme con la hipotenusa como lado, es igual a la suma de las áreas de los otros dos polígonos regulares (de *n* lados cada uno) que se forman con los catetos como lado. La prueba más conocida y/o difundida es la que considera $n = 4$, pero esto es válido para todo n natural mayor o igual que tres.

Según los niveles de escolaridad, los conocimientos previos y los objetivos de aprendizaje, se van matizando los grados de rigurosidad requeridos en cuanto a la validación de la propiedad anterior -en un principio en forma de conjetura-, como por ejemplo:

- Ubicados en los primeros años de escuela secundaria (donde la mayoría de los participantes del taller se desempeñan), se pueden solicitar más ejemplos (otros valores de n) para ir reforzando la conjetura. Aquí el uso del software dinamiza la construcción y visualización de los diferentes polígonos regulares.
- Ubicados en la formación de profesores, en la validación ya debería solicitarse una demostración formal, donde también se requiere una visualización adecuada de regularidades matemáticas.

Consideramos sumamente beneficioso que en momentos específicos de la formación inicial o en instancias de formación continua, los profesores reflexionen (mediante actividades concretas) sobre cómo creen que la enseñanza de esta propiedad puede concretarse en la escuela secundaria y, por otro lado, que en un nivel más avanzado puedan visionar el Teorema de Pitágoras como un caso particular del Teorema de Fermat.

Una de las contribuciones que se pretende con esta propuesta es la formación de los participantes del taller en la habilidad de descubrir patrones. Esta habilidad se considera una actividad fundamental en el accionar matemático, ya que -más allá de un punto de vista bastante común y generalizado acerca del carácter estático de fórmulas- la Matemática continúa creciendo, en nuevos campos y aplicaciones, y no justamente por cálculos o fórmulas, sino por la búsqueda abierta de patrones (Steen, 2008). Por ello, para crecer matemáticamente, creemos propicio brindarles la posibilidad a los alumnos de interactuar con una variedad considerable de patrones en diversas actividades, ejemplificándose en este caso con el Teorema de Pitágoras.

Además, y de acuerdo con Herrera (2010), un buen uso de la tecnología puede favorecer el estudio de casos y la experimentación, ya que a partir de datos y gráficos obtenidos mediante herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden: formular conjeturas y validarlas (reforzarlas o desecharlas), descubrir patrones, explorar y sintetizar resultados. Una buena conjetura facilita la resolución de problemas y permite mostrar la necesidad de demostrar matemáticamente los teoremas, incluso sugiriendo vías para sus demostraciones.

Metodología empleada

Durante los días 5 y 6 de Julio de 2010 se llevó a cabo el trabajo en la modalidad de taller con los docentes. Participaron 25 educadores matemáticos latinoamericanos, de los países Guatemala, México, Honduras, Costa Rica, Panamá, Colombia, Venezuela, Perú, Brasil, Uruguay, Argentina, Cuba y República Dominicana. Ubicados en una sala de computación con una computadora por participante -contando con el programa Geogebra-, se les propuso realizar una serie de actividades consistente en cuatro tareas secuenciadas por etapas:

1. realizar las construcciones;
2. construir tres sistemas de representación de la situación;
3. buscar un patrón de regularidad en el análisis de las diferentes representaciones;
4. buscar alguna relación entre los teoremas de Pitágoras y de Fermat.

En las construcciones se utilizaron polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados, donde debían:

- Construir un segmento *AB* de longitud *k*. Colocar al punto *D* sobre este segmento. Hacer *AD* = *c* y *BD* = *k-c*.
- Construir un triángulo rectángulo con catetos de longitud *c* y *k-c*, respectivamente.
- Sobre cada uno de los lados del triángulo, construir un polígono regular (de igual número de lados sobre cada cateto como base).
- Calcular las áreas de los polígonos sobre los catetos A_1 y A_2 y la suma de éstas.
- Mover el punto *D*, para analizar la relación entre las áreas del polígono construido sobre la hipotenusa y el área de la suma $A_1 + A_2$ de los polígonos construidos sobre los catetos.
- Transferir la longitud de *c* sobre el eje *x* y la suma $A_1 + A_2$ al eje *y*.
- Construir una recta vertical que pase por el transferido de *c* y otra horizontal que pase por el transferido de $A_1 + A_2$; estas rectas se deben interceptar en un punto que llamamos *P*.
- Al activar la traza del punto *P* y mover *D*, se puede ver un lugar geométrico que permite analizar gráficamente la relación entre las áreas de los polígonos.
- A partir de la gráfica encontrar, con ayuda del programa, la ecuación del lugar geométrico.
- Por simplicidad, se fija el segmento *k* -base de la construcción- en un número entero, para analizar la relación entre la longitud de éste y los coeficientes de la expresión matemática del

lugar geométrico que describe el punto *P* al mover *D*, y asignar sentido a cada representación de la situación, al asociarla con elementos de otra representación.

- A partir del análisis de las tres representaciones, y al comparar con la longitud *k* del segmento, se pueden encontrar algunos patrones, objeto de estudio aquí.

Resultados de la implementación

Se comienza con $n = 4$ y $k = 4$, es decir, construyendo cuadrados y el segmento *AB* fijo en *4*. Se obtiene una representación algebraica donde los coeficientes son *2*, $8 = 4x2$ y $16 = 4^2$, como puede apreciarse en la Fig. 1. Se discute con los participantes la explicación matemática de esto, basados en la relación entre las áreas de los polígonos que se construyen sobre cada lado del triángulo rectángulo de referencia.

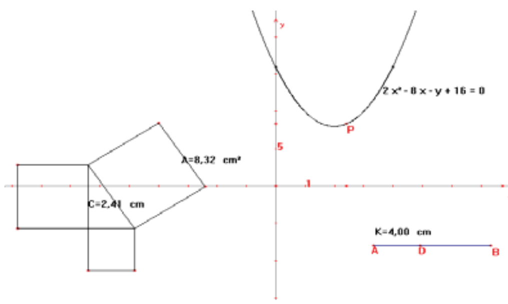

Figura 1

El área *Ac* del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa es: $Ac = c^2 + (k-c)^2$ que al desarrollar se tiene $Ac = 2c^2 - 2kc + k^2$ o si $c = x$, $Ac(x) = 2x^2 - 2kx + k^2$.

Seguidamente se hace el análisis cuando los polígonos son triángulos. El área de un triangulo es $At = \frac{B \times h}{2}$ y las alturas de cada uno de los dos triángulos que tienen como lado cada cateto son $h_1 = \sqrt{3}\frac{c}{2}$ y $h_2 = \sqrt{3}\frac{k-c}{2}$, respectivamente, así que el área del triángulo equilátero que tiene como lado la hipotenusa del triángulo rectángulo es:

$$At = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(k-c)^2, \text{ así}$$

$$At = \frac{\sqrt{3}\left(2c^2 - 2kc + k^2\right)}{4}$$

y teniendo en cuenta que *c* es la variable con que se está trabajando en la construcción, si hacemos $c = x$ y $At = A(x)$, se tiene la función $A(x) = \frac{\sqrt{3}\left(2x^2 - 2kx + k^2\right)}{4}$, que es la que muestra el programa, sólo que expandida.

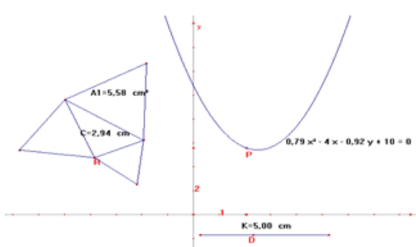

Figura 2

Lo podemos verificar en la Fig. 2.

Si ahora el polígono es un pentágono regular, y se utilizan los mismos parámetros, ese pentágono se puede descomponer en cinco triángulos isósceles congruentes.

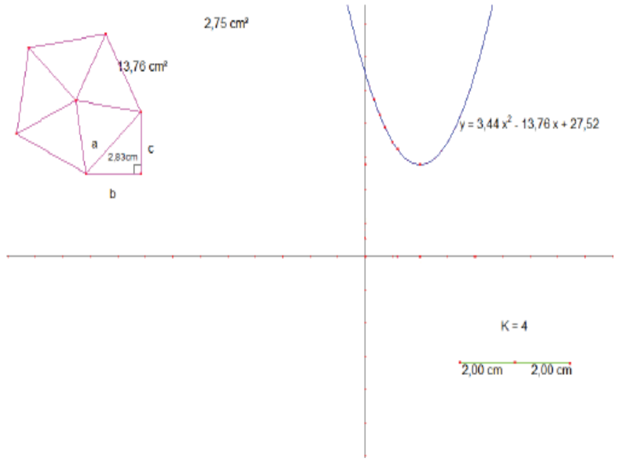

Figura 3

Los ángulos congruentes de cada triángulo isósceles miden 54°, ya que al dividir 360° entre los cinco triángulos da 72° y al trazar la altura de cada triángulo, este ángulo se biseca, así los tres ángulos de cada uno de lo diez triángulos generados por las apotemas son 36°, 54° y 90°. Las longitudes de los lados congruentes y de la apotema de cada uno de los cinco triángulos son: $d=\dfrac{c}{2\cos 54°}$ y $a=\dfrac{c\cdot\tan 54°}{2}$. Así que el área del pentágonos *Ap* que tiene como lado la hipotenusa del triángulo rectángulo base de la construcción, es $Ap(x)=\dfrac{5\tan 54°\left(2x^2-2kx+k^2\right)}{4}$, lo que puede verificarse en la Fig. 3.

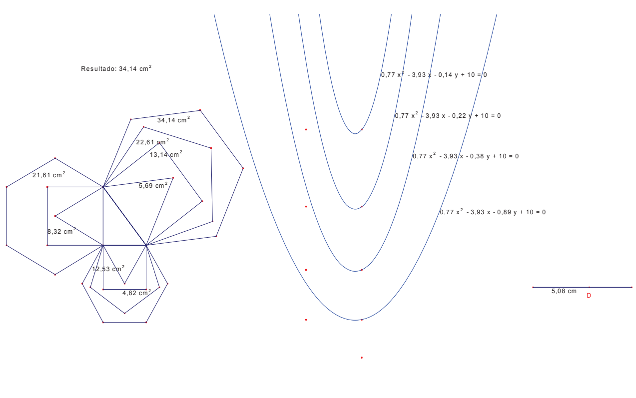

Figura 4

Analizando las expresiones algebraicas de los tres lugares geométricos medianamente estudiados hasta ahora, podemos ver que hay un factor común, $x^2-2kx+k^2$ y para la secuencia de polígonos con 3, 4, 5,..., n lados, se podría obtener la sucesión $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{4},1,\dfrac{5\tan 54°}{4},\ldots,\dfrac{n\tan\alpha}{4}\right\}$.

Se conjetura que el patrón de la constante, que siempre acompaña al factor $c^2 - 2kc + k^2$, es $\frac{n\tan\alpha}{4}$, donde $\alpha = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n}\right) = 90° - \frac{180°}{n}$, siendo *n* la cantidad de lados del polígono regular que se forma en los lados del triángulo rectángulo dado.

Verifiquémoslo para los primeros valores de *n*, sobre los cuales exploramos anteriormente.

$$n = 3 \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{n\tan\alpha}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$n = 4 \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \frac{n\tan\alpha}{4} = 1$$
$$n = 5 \Rightarrow \alpha = 54° \Rightarrow \tan\alpha = \tan 54° \Rightarrow \frac{n\tan\alpha}{4} = \frac{5\tan 54°}{4}\ldots$$

En relación con la realización de las construcciones, el principal inconveniente fue el poco manejo de la computadora por parte de los docentes asistentes, pero por la facilidad de uso del programa, esto fue superado rápidamente.

Se les guió en la construcción del cuadrado a los que se les dificultó, pero en general no hubo mayor dificultad con esta construcción ni con la del triángulo equilátero. La construcción del pentágono regular (dado uno de sus lados, como en todas las construcciones), no fue realizada en forma autónoma por ninguno de los asistentes, por lo que fue necesario utilizar el video beam para compartir los pasos a seguir. A la construcción del hexágono regular la lograron por casualidad, en sus intentos por hacer la construcción del pentágono regular.

Muchos de los participantes valoraron el abordaje de tan importante temática y la facilidad con que se pueden relacionar los diferentes sistemas de representación con el uso del computador, especialmente porque no fue necesario el uso de algoritmos diferentes al propio teorema de Pitágoras.

Al respecto, Jiménez (2006) asegura que todo contenido del currículo que tenga relación con los procesos de cálculo, será necesariamente influenciado por los aportes de la tecnología informática actual y futura, lo cual llevará a una necesaria redefinición de los énfasis en la enseñanza de algoritmos y conceptos. Aquí aparece como crucial la distinción y reflexión sobre intencionalidad de uso de los materiales y recursos didácticos disponibles (Flores, 2006), entre ellos los software educativos matemáticos.

En cuanto a la construcción de los sistemas de representación gráfico y algebraico, el principal inconveniente estuvo relacionado con la distinción entre el lugar geométrico generado por la traza, lugar geométrico (denominado así en el programa) y la gráfica de la cónica como tal; los docentes participantes pretendían que el programa generara la representación algebraica a partir de la traza o del lugar geométrico sin generar la cónica correspondiente.

En la búsqueda de un patrón de regularidad en el análisis de las diferentes representaciones, fue donde los asistentes mostraron mayores dificultades, las cuales estuvieron relacionadas con:

1. obtener un factor en cada una de las expresiones correspondientes a un número de lados dado;
2. aceptar la equivalencia entre las expresiones algebraicas expandidas y factorizadas, para convencerse debieron acudir a la calculadora manual;
3. establecer la relación entre los coeficientes de cada ecuación con la longitud del segmento *AB*.

Cuando se les pidió relacionar los Teoremas de Pitágoras y de Fermat no hubo inconvenientes, sólo en la manipulación de la construcción en Cabri 3D.

Reflexiones finales

Para finalizar, señalamos que una de las contribuciones que creemos que tiene esta propuesta es la formación en el descubrimiento de patrones (descubrimiento al que se debe llegar por medio de la conjetura inicial y en el que el software actúa de andamio).

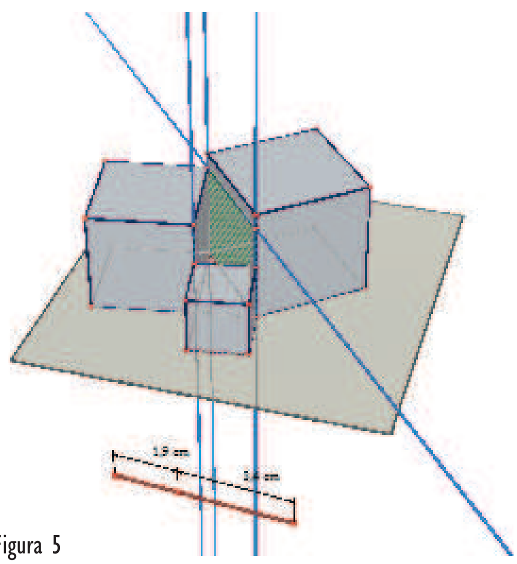

Figura 5

A los asistentes se les preguntó: ¿Qué pueden decir sobre la relación $a^n + b^n = c^n$ para distintos valores de *n*? Hubo consenso entre ellos en que tal igualdad no es posible para $n > 2$. Luego se les mostró y se les hizo manipular una construcción en Cabri 3D, a partir de la cual pudieron cambiar de opinión, al utilizar un *n* irracional. El asombro fue muy grande, pero vuelto a revisar el Teorema de Fermat, cayeron en la cuenta de que lo anterior no está en contravía con tal teorema, ya que este último es para valores enteros.

Para finalizar, creemos que actividades de este tipo, que involucran tecnología, trascienden la mera acción técnica del uso de una herramienta, ya que contemplan el desarrollo de habilidades matemáticas. En este sentido acordamos con Herrera (2010), quien le otorga valor a las herramientas tecnológicas para fomentar la observación, la discusión y el pensamiento crítico en los estudiantes. Estas habilidades adquieren relevancia en el escenario actual, donde la cantidad y variedad de información aumenta y se transforma continuamente.

Referencias bibliográficas

Estrada, J. (2005). *Diseño de situaciones dinámicas en un ambiente computacional como un escenario para el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo*. Recuperado el día 11 de marzo de 2010 del sitio web: http://polya.dme.umich.mx/eventos/MemoriaXIII.pdf.

Flores, P. (2006). Los materiales y recursos didácticos en la formación de profesores de matemáticas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, 12(41), 77-97.

Hegedus, S. y Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. In M. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129-136). Bergen, Norway: Bergen University College.

Herrera, M. (2010). Introducción al Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1149-1151), Vol. 23. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Jiménez, L. (2006). *Enseñanza de la matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual.* Recuperado el día 6 de marzo de 2010 del sitio web: http://www.uned.ac.cr/memencmate/Ponencias/procesoensenanza/Enseñanza%20de%20la%20Matemática%20-%20Lilliana%20Jiménez%20Montero.pdf.

Ministerio de Educación de España (2009). Pisa 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. OCDE. Informe español. Recuperado el día 25 de febrero de 2011 del sitio web: http://www.educacion.gob.es/cesces/actualidad/pisa-2009-informe-espanol.pdf.

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2010). 2021. Metas educativas. La educación que queremos para la generación de los Bicentenarios. Recuperado el día 25 de febrero de 2011 del sitio web: http://www.oei.es/metas2021/todo.pdf

Steen, L. (2008). Patrones. En L. Steen (comp.). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* (pp. 7-16). México DF: Limusa.