UNA APROXIMACIÓN AL PRIMER MOMENTO DE LO LOGARITMICO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Marcela Ferrari Escolá, Rosa María Farfán Márquez
Universidad Autónoma de Guerrero, México México
Cinvestav-IPN
marcela_fe@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *En este artículo comentamos una experiencia realizada con 15 estudiantes de bachillerato de sexto semestre donde el propósito era generarles un ambiente particular que favoreciera la emergencia de lo logarítmico. Nos centramos en observar y analizar las argumentaciones que generaron los estudiantes, así como la red de modelos y de significados que evidenciaran su acercamiento o distancia a la covariación logarítmica. Nuestro estudio se fundamenta en la socioepistemología, adoptando a la Ingeniería didáctica como metodología.*
Palabras clave: Socioepistemología, logaritmos, facilitar cálculos

Al analizar algunos reportes de investigación interesados en la función logarítmica podemos identificar fundamentalmente dos líneas: aquellos que se enfocan en lo cognitivo (Dubinsky, 1992, Berezovski y Zazkis, 2006) esbozando algunas explicaciones sobre esta problemática y otros que reflexionan sobre la historia de esta noción (Oliver, 2000; Burn, 2001) sin intencionalidades escolares. Sin embargo, otros como Confrey y Smith (1995), Martínez-Sierra (2005) respecto a la función exponencial o Cantoral y Farfán (2004), Ferrari (2001, 2008) respecto a la función logarítmica se preocupan además de las dimensiones cognitiva y epistemológica por reflexionar sobre la didáctica y la sociocultural, en estudios sistémicos que robustecen sus reportes. Efectivamente, abordamos la problemática que genera el aprendizaje de esta función desde la socioepistemología, donde se entremezclan las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

En nuestra indagación epistemológica (Ferrari, 2001) concluimos que se pueden distinguir, bajo esta óptica, tres momentos: los logaritmos como *transformadores*, como *modelizadores* y como *objeto teórico*; etapas en el desarrollo de los logaritmos si tomamos como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier (1619) para su primera definición. Hablamos así, de *facilitar cálculos* y de *modelar*, como prácticas sociales asociadas a la de *predicción*, argumentos robustos para el desarrollo de los logaritmos, donde sus usos, formulaciones e institucionalizaciones a veces se entremezclan, otras, la mayoría, se distancian del discurso matemático escolar (Ferrari, 2008).

En nuestro trabajo buscamos evidenciar que lo numérico, lo gráfico y lo algebraico como red de modelos entremezclados con las prácticas de referencia y sociales nos crean un ámbito de argumentación que posibilite la emergencia de la construcción de un discurso sobre *lo logarítmico*. Para ello, respetando las etapas que propone la ingeniería didáctica como metodología de investigación es que, luego del análisis preliminar, hemos diseñando actividades que propicien en los estudiantes la construcción de su red de modelos, y por ende de su red de significados. Si bien el diseño del curso consta de tres momentos: *transformación numérica - curva logarítmica - cuadratura antesala de la integración* siendo siempre el eje implícito, la covariación logarítmica, sólo reportamos en este artículo el desarrollo del primer momento de los logaritmos, aquel respecto a facilitar cálculos.

Cada sesión, de duración una hora y media, fue videograbada con tres cámaras generando un triángulo con el apoyo de tres grabadores de voz colocado en cada equipo de trabajo seleccionado para analizar. Sin embargo, sólo reportaremos las argumentaciones del Equipo 1 formado por Viri, Fanny y Antonio. En la primera sesión se les entregaron las hojas de trabajo así como las fichas logarítmicas que consisten en cuatro rectángulos de foami (ver Figura 1) con los números escritos siguiendo una progresión geométrica en la parte superior y una progresión aritmética en la inferior.

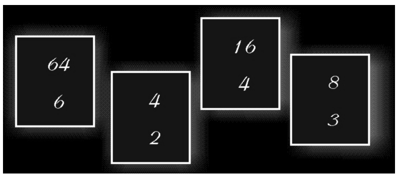

Figura 1: Fichas logarítmicas en base 2

Tres son las actividades que se les proponen a los estudiantes, esperando provocar la evolución de los argumentos iniciales más cercamos a ideas exponenciales que logarítmicas, pero ambas consideradas el centro de la covariación logarítmica. Decidimos iniciar la discusión con la base dos, continuar con la base 10 incorporando la calculadora, y finalizar la discusión con un problema clásico donde se presentaba un modelo exponencial con su expresión algebraica. La actividad matemática de las dos primeras sesiones involucra tres partes, cuyos objetivos particulares son: a) Percibir los patrones de crecimiento y relacionarlos; b) Acercarse a las propiedades logarítmicas y usarlas para facilitar cálculos; c) Abstraer la covariación que rige el juego. En la tercer sesión se les dejó libres para resolver un problema y se les invita, en la última sesión a comentar con sus compañeros lo que habían desarrollado en las clases.

Primera sesión: Jugando con fichas logarítmicas

Antonio, Viri y Fanny abstraen rápidamente los patrones de variación de las fichas. El primer argumento que explicitan es que las fichas siguen los números naturales por abajo en tanto que arriba es el doble del anterior. Para determinar la regla de multiplicar que se les solicita, no falta en este equipo un intento de multiplicar cruzado, como la mayoría de sus compañeros habían propuesto, pero en este caso aparece en la extensión de las fichas, no así en la búsqueda de la regla de multiplicación ya que Fanny descubre, por simple inspección, que con dos fichas puestas una al lado de la otra se puede sumar los valores de abajo y ver que la ficha que le corresponde a ese número tiene que ver con la multiplicación de los números de arriba.

Al construir las fichas, Antonio propone agregar la ficha 2//1 en tanto que Viri hace lo propio con la 1//0. En esta primera parte de la actividad, los estudiantes perciben dos elementos importantes que no se encontró en los otros equipos, aceptar el 1//0 como parte del juego sin mayor discusión y, fundamentalmente describir los patrones de crecimiento desde las operaciones básicas involucradas: "aumenta al doble" que algebraicamente escriben como $y = 2x$ y "aumenta en una unidad" denotándola como $y = x + 1$ dos saltos importantes hacia el acercamiento a la covariación, reconocer una convención e intentar denotar algebraicamente las dos variaciones. Descubren también la regla detrás de la división (dividir implica restar), aceptando rápidamente la presencia de negativos y decimales; donde Antonio expresa que: *Porque la multiplicación y la* *división… la haces más fácil si sumas o restas acá para verificar aquello… por ejemplo sumas acá y ya está…*

Pese a que durante todo el desarrollo de la actividad el equipo va descubriendo sin gran problema la esencia del diseño que los va acercando a ideas logarítmicas, desde el trabajo con progresiones, no logran abstraer una relación algebraica más general pero dejan evidencias claras de su razonamiento covariacional. Al solicitarles que argumenten sus respuestas, Antonio inicia un proceso de concentrarse en su hoja de trabajo y olvidarse de su entorno, luego de comentarle a Fanny: *Nos pide que expliquemos… a ver… éste va al doble y éste va al doble… y éste al doble… y éste al doble… pero… esto sería encontrar una relación entre lo de abajo y lo de arriba… por ejemplo entre menos dos y punto veinticinco… para así sacar la general*. Produce entonces una tabla vertical con los valores de las fichas etiquetando con *x* a la progresión aritmética y con *y* a la progresión geométrica evocando quizás los cánones escolares, donde el 1, 2, 3 etc… se reserva para las variables independientes. Sin embargo para Antonio, quién es quién no es importante, son sólo nombres que les permite manipularlos.

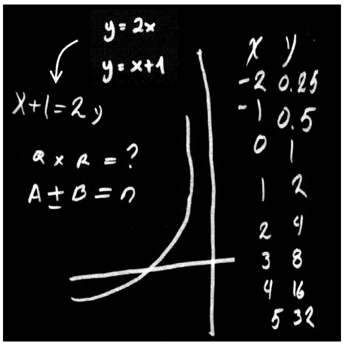

Figura 2: Esbozo de una red de modelos espontánea

En la síntesis de Antonio, encontramos cierto acercamiento a ideas covariacionales, así como la búsqueda de una expresión algebraica que vincule a ambos patrones de crecimiento. La construcción de esta idea, la íntima relación entre los valores involucrados en cada ficha, se evidencia en el esbozo de una curva que etiqueta como una hipérbola. Comenta además, que hay una relación entre *x* e *y*, para lo cual utiliza letras diferentes para denotar la relación entre sumar y multiplicar, lo que informa sobre su interés de descubrir lo que hay detrás de estas fichas, aunque no logra abstraer la expresión algebraica que las vincula.

Segunda sesión: Explicitando los logaritmos

Los integrantes del Equipo 1, no tuvieron problemas para aceptar al 10 como elemento integrador de los incisos aunque, al igual que todos los equipos, la primera explicación de cómo se construyen las fichas y cómo se puede escribir la ficha general, se haya argumentado desde el número de ceros que marca el número inferior de la ficha permitiéndonos observar que inicialmente no estaban considerando a ese 10 como una base en el sentido de potencias y/o logaritmos. Ante la primer pregunta, donde se esperaba que reconocieran la base diez que estaba en juego, así como la extensión del uso de la regla de multiplicar que habían construido la sesión anterior, se observa un interesante entramado de ideas, aquellas como las que anuncia Viridiana respecto a "seis ceros" que se convierte, en el informe de Estefanía, en: "*…tenemos la teoria que el numero inferior indica la cantidad de ceros, despues del numero 1, deben de ir para llegar al resultado"* (se respeta la ortografía de los estudiantes). Sin embargo, Antonio modifica esta primer respuesta y la presenta apoyándose en la idea de variaciones cosa que mantendrá en todas sus intervenciones. Al igual que en la primera sesión, Antonio construye desde el principio dos fichas clave para este tipo de juegos, la 1//0 convención que nos asegura la posibilidad de facilitar cálculos, y la 10//1 que nos anuncia la base que está en juego.

El uso de la calculadora los introdujo en un ambiente numérico diferente ya que la idea de multiplicar por 10 tiende a desaparecer, al intercalar otros números entre los pertenecientes a la progresión geométrica generada por 10^n. La covariación existente cambia de aspecto, algo sobre lo que los muchachos no reflexionaron. El inciso 5, propone construir las fichas utilizando la ficha general a//log(a), donde la progresión geométrica es reemplazada por una progresión aritmética restringida, la de los números naturales. Lo que no cambia, y se mantiene en la actividad, es la regla de multiplicar y dividir, es decir, las propiedades de los logaritmos, ideas sobre las que se les hizo trabajar a los muchachos. Para llegar a estas conclusiones, los alumnos construyen las fichas en foami tarea que los demás equipos esquivan, convirtiéndose su manipulación en un apoyo fundamental para reforzar los argumentos que ya habían consensuado, permitiéndoles incluso abstraer con mayor profundidad y seguridad. Para ellos, el uso de las reglas de multiplicar y dividir emergen espontáneamente, tanto en la construcción de otras fichas (inciso 6) como en el cálculo del pH (inciso 7), por tanto, en el uso de las propiedades de los logaritmos. Los otros equipos, fuerzan su uso ya que la calculadora es su fuente de seguridad y argumentación.

En la búsqueda de una respuesta a ¿qué es un logaritmo? Antonio y sus compañeras extienden ordenadamente en su mesa de trabajo las fichas de los dos juegos que habían manipulado. El desafío lo propone la maestra al observar que ya habían terminado su trabajo con antelación a los otros equipos y que Viri varias veces había solicitado las "fichas verdes", para solucionar algunas de las preguntas de la actividad, cosa que había sido inhibida por Antonio. Sin embargo, él es el único que responde a este desafío, quien se dedica varios minutos a observar los arreglos de las fichas, preguntar en voz alta varias cosas pero que no logra incorporar a sus compañeras en sus reflexiones. Se refugia esta vez en el ámbito numérico, utilizando la calculadora, y en el algebraico intentando interpretar la relación entre la notación exponencial y la logarítmica, red de modelos que no logra armar. Se le escucha decir: *mmm… es que aquí el logaritmo es de diez… pero acá no* (indicando las fichas de la primera sesión en base 2)… *mmmm… entonces ¿qué tiene que pasar para que sea un logaritmo?*... idea con la que termina la sesión.

Tercera sesión: Usando los logaritmos

Se observa a medida que se desarrolla el curso que los estudiantes se sienten desafiados por las actividades, y como en las sesiones se va hablando de logaritmos, exponentes, bases, patrones de crecimientos, entre otros elementos, van intentando utilizar este lenguaje en sus discusiones. En esta sesión, se les proponte calcular la cantidad de mosquitos que habría en un cierto tiempo así como el tiempo en el que se tendrían 10,000 mosquitos, lo cual genera un ambiente de discusión y debate. Es Antonio quien propone que cada uno trabaje en su hoja, división de trabajo que provoca que cada estudiante produzca diferentes maneras de abordar el problema propuesto. En el inicio, Fanny convoca la expresión analítica para estudiar el problema en tanto que Viri y Antonio generan una tabla con los datos que poseen en el enunciado y extienden los cálculos hasta exceder los 10,000 mosquitos.

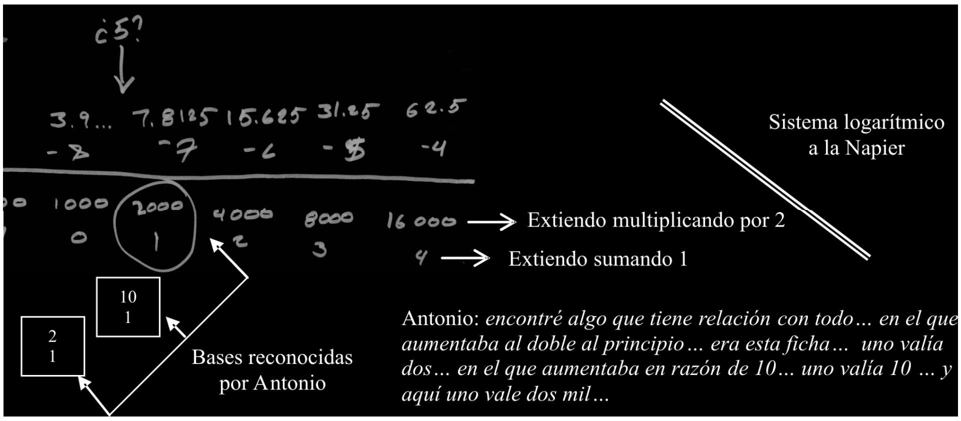

Figura 3: Intentando extender el uso de las fichas

Sin conciencia de ello, Antonio se topa con la misma problemática que hallara Briggs en el siglo XVII ante las ideas de Napier, respecto a que toda covariación de una progresión geométrica y otra aritmética constituye un sistema logarítmico, pero para que se logre utilizar la idea de “facilitar cálculos” requiere que el punto (1, 0) esté presente. Vemos así que Antonio genera una vinculación interesante entre tiempo y cantidad de mosquitos, generando una tabla regida por la covariación logarítmica ya que va dividiendo por dos arriba al ir moviéndose hacia la izquierda y restando una unidad en la sucesión de abajo (ver Figura 3). Lo que busca es un número en la parte superior que le permita multiplicar al 2000 para llegar al 10,000. Sin embargo, abandona esta búsqueda ya que al atrapar el 5 entre dos números decimales y no determinarlo directamente, se desanima y se concentra en la fórmula dada desde la cual logran determinar, luego de batallar con manipulaciones algebraicas, las respuestas solicitadas.

Conclusiones: Argumentando sobre ¿Qué entiendo por logaritmos?

Luego de las tres sesiones donde se les invitó a explorar las propiedades de los logaritmos así como las reglas que los rigen, enfocándonos en observar las argumentaciones que producían los diseños desde un juego de fichas, inicialmente, en base dos y luego en base 10 introduciendo también el uso de la calculadora, para terminar con el problema de los mosquitos, fenómeno exponencial que requería utilizar los logaritmos para hallar el tiempo, se los desafía a presentar sus exploraciones así como sus indagaciones sobre: ¿qué entienden por logaritmos? Cambia así la dinámica de la clase, se trata ahora de sintetizar y organizar la información que deseen compartir con sus compañeros por lo que la argumentación perdería la frescura que se observan en instancias de exploración, dando lugar a un discurso más pulido, dirigido por una exposición en diapositivas.

Todos explicaron con mayor o menor detalle su visión de las actividades, centrándose en las dos primeras, en aquellas donde trabajaron con fichas, sin incorporar la tercera actividad donde se trabajara desde una expresión algebraica. Sólo el Equipo 1 se esfuerza por integrar las ideas, ya que presenta las dos actividades de manera conjunta con el fin de evidenciar las analogías que existían, la importancia de reconocer la base así como la ficha 1//0, elementos ausentes en la argumentación de los otros equipos, y que consideramos importantes en el acercamiento a ideas covariacionales logarítmicas. Sin embargo, Antonio cierra su participación diciendo: *¿qué es un logaritmo?... Básicamente es una función que números pequeños… se vuelvan más grandes y números muy grandes se vuelvan números más pequeños… Bueno... según una definición de matemáticas… es el número de veces que se tiene que multiplicar un número por sí mismo para igualar a otro…* respaldando sus argumentos con aquellos ya establecidos, práctica presente en nuestro quehacer.

Observamos así que logran acercarse a ideas importantes sobre lo logarítmico, desde las discusiones que establecen en sus interacciones y que se reportan en extensión en Ferrari (2008).

Referencias bibliográficas

Berezovski, T. & Zazkis, R. (2006). Logarithms: Snapshots from Two Tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková. *Proceedings of 30th International Conference for Psychology of Mathematics Education.* Vol. 2. (pp. 145-152). Praga, Czech República checa. Obtenida en octubre de 2007 en http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/29/8c/0d.pdf

Burn, R. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logaritmos. *Historia Mathematica 28*, 1-17. Disponible en: *http://www.idealibrary.com.* Consultada en octubre de 2005

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2004). La sensibilité á la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24*(2-3), 137-168.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(1), 66-86.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva.* Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Martínez-Sierra, G. (2005) Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa 8*(2) ,195-218.

Napier, J. (1619). *A description of the admirable table of logarithms.* London: Nicholas Okes (1616). Editie vertaald uit het Latijn door Edward Wright. Disponible en: http://www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/napier1.html. Consultada en abril de 2003.

Oliver, J. (2000, Noviembre). The Birth of logarithms. *Mathematics in school,* 9–13.