

## UNA PROPUESTA CURRICULAR PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE UN TALLER DE APLICACIONES MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA

Alejandro Muñoz Diosdado, Juan Ortiz Juárez, Alejandro Hernández Madrigal, Jaime Martínez Capistrán  
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología del Instituto

México

Politécnico Nacional  
amunoz@avantel.net

Campo de investigación: Modelos matemáticos

Nivel: Superior

**Resumen.** Dentro del marco teórico de la enseñanza por proyectos (La Cueva, 2001; Malaspina, 2007), se presenta una asignatura curricular llamada taller de aplicaciones matemáticas en la cual se realizan aplicaciones generales de tipo básico, aplicaciones relacionadas con la ingeniería en general y aplicaciones específicas a cada tipo de ingeniería de las impartidas en la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología (UPIBI). Los alumnos hacen uso de sus antecedentes matemáticos y resuelven problemas de aplicación en un ambiente cooperativo, construyen por si mismos los modelos de los problemas a resolver. Se trabaja y evalúa por medio de proyectos en los cuales se fomenta el aprendizaje cooperativo, el compromiso de los estudiantes y la creatividad. La evaluación es continua, las tareas son proyectos cortos y no hay exámenes. Los alumnos preparan por equipo un proyecto más extenso que prepara en una o dos semanas y cuyos resultados presentan en una sesión pública donde son evaluados a partir de la presentación, de la entrega detallada de un reporte escrito con sus resultados y de su desempeño en la sesión de preguntas. Además de la propuesta se presentan resultados preliminares porque ya se implementado la asignatura.

**Palabras clave:** enseñanza por proyectos, aprendizaje cooperativo

### Introducción

Es frecuente afirmar que en los cursos de matemáticas en las escuelas de Ingeniería no se realizan aplicaciones relacionadas con la carrera o con el contexto de los alumnos (Zúñiga, 2007; Muñoz-Diosdado y Arce-Viveros, 2003). En este trabajo se presenta una propuesta dentro del marco teórico de la enseñanza por proyectos (La Cueva, 2001; Malaspina, 2007), de una asignatura curricular llamada taller de aplicaciones matemáticas en la cual se resuelven problemas de aplicación haciendo uso de los conocimientos que tienen los alumnos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales. Se resuelven problemas del contexto de los alumnos, primero aplicaciones de tipo general, después aplicaciones relacionadas con la ingeniería básica y por último aplicaciones específicas a cada tipo de ingeniería de las que se imparten en la UPIBI del Instituto Politécnico Nacional. El objetivo del taller es que los alumnos construyan su propio conocimiento a partir de sus antecedentes matemáticos y

resuelvan problemas de aplicación en un ambiente cooperativo, citando a Díaz y Hernández (1999, p. 19) “*al realizar actividades académicas cooperativas, los individuos establecen metas que son benéficas para si mismos y para los demás miembros del grupo, buscando así maximizar tanto su aprendizaje como el de los otros. El equipo trabaja junto hasta lograr que todos los miembros del grupo han estudiado y completado la actividad con éxito.*” La primera parte del curso revisa el proceso de modelado el cual se usará de forma extensiva para que los alumnos identifiquen en un problema las variables que lo describen y después puedan buscar las relaciones entre esas variables (Basmadjan, 2003; Bequette, 1998; Galagovski y Adúriz, 2001; Mochón, 2000). Toda la actividad se realiza trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes y se evalúa por medio de proyectos de aplicación que se resuelven de forma cooperativa, de tal forma que los estudiantes realmente se comprometan con los demás integrantes del equipo, con el trabajo a realizar y con su propio aprendizaje, además se enfatiza y se motiva la creatividad de los alumnos. Parte del sustento teórico del trabajo se tomó de las propuestas de Johnson, Johnson y Holubec (1999) y de Ascheri y Pizarro (2008).

No se evalúa con exámenes tradicionales, ni escritos ni orales, los equipos obtienen evaluaciones en cada una de las clases y en cada una de las tareas y también en los proyectos, de tal forma que continuamente el alumno es evaluado. Pero la evaluación no tiene como fin único ni principal calificar al alumno, es más bien una forma de ir observando los progresos y es un indicativo tanto para los alumnos como para el maestro de que es lo que deben trabajar o reforzar más, que actitudes deben de cambiar, que métodos deben de aplicar y de alguna manera esta evaluación se vuelve un proceso integral en donde incluso se hace énfasis en la enseñanza de valores. Los alumnos preparan y presentan proyectos más extensos en periodos de una a dos semanas, tiempo en el cual pueden consultar las fuentes que deseen, y los resultados se presentan en una sesión pública como es usual en algún congreso de investigación; ahí son evaluados a partir de la presentación, de la calidad de los resultados que se plasman en un reporte detallado por escrito y de su desempeño en la sesión de preguntas.

## Descripción de la propuesta

998

Ubicación. La asignatura se ubica en el tercer nivel de las carreras de la UPIBI, los alumnos la cursan en el tercer o cuarto semestre dependiendo de la carrera que estén cursando, los alumnos

de Ingeniería Biomédica, Ambiental, Farmacéutica y Alimentos en tercer semestre y los de Ingeniería Biotecnológica en el cuarto semestre. El alumno ha cursado Cálculo Diferencial e Integral en una y varias variables, Ecuaciones Diferenciales, Algebra Lineal y Programación. Sería recomendable que hubiera tomado también los cursos de esta Probabilidad y Estadística y Métodos Numéricos. El alumno trabajará en equipo y recibirá atención prácticamente personalizada, por lo cual en cada curso participarán varios profesores (1 profesor por cada 10 alumnos).

**Objetivos.** El objetivo general de la asignatura es que el alumno realice aplicaciones matemáticas haciendo énfasis en la construcción, análisis, resolución y simulación de modelos que representen sistemas o procesos en ingeniería.

Los objetivos específicos establecen que el alumno tiene que describir primero los conceptos asociados a la construcción de modelos y los aplicará a la construcción, solución y análisis de modelos de sistemas simples de ingeniería. Después debe realizar aplicaciones matemáticas que involucren el cálculo y las ecuaciones diferenciales a problemas de interés general en ingeniería. También realizará aplicaciones matemáticas a problemas específicos de ingeniería ambiental, de alimentos, biotecnológica, biomédica y farmacéutica.

**El encuadre y la evaluación.** Al principio del curso se realiza un examen diagnóstico el cual persigue varias metas, la primera y más obvia es conocer los antecedentes de los alumnos en cuanto a conocimientos matemáticos, pero se desea conocer también las actitudes de los alumnos y la forma en como se organizan para resolver un problema, la forma en que trabajan en equipo y sus habilidades para elaborar un producto escrito de las actividades realizadas. Es por estas razones que tal examen se resuelve en equipo, los maestros están al pendiente para observar las conductas y las actitudes de los alumnos, la forma de organización de las actividades y como interaccionan, sobre todo motivan a que participen todos, de modo que ninguno quede excluido o bien que algunos acaparen todas las actividades, es decir desde el primer día se motivará un ambiente cooperativo en el trabajo de los equipos.

Aunque en el programa de la asignatura se establece que se realizarán tres evaluaciones departamentales, estas evaluaciones no son exámenes. En la primera y segunda, la participación continua y la entrega de tareas es el 50% de la evaluación, el otro 50% es la elaboración de proyectos. En la tercera evaluación, la participación continua y la entrega de tareas es el 25% de la

evaluación, el otro 75% es la elaboración de un proyecto final que abarque una aplicación matemática específica a un problema de una de las ingenierías que se imparten en la Unidad. Se hará un examen extraordinario en caso de tener reprobados exámenes parciales, el cual tendrá la misma dinámica que las evaluaciones parciales, es decir, se evaluará a través de la realización de un proyecto que será diferente dependiendo de la ingeniería que curse el alumno.

Contenidos. El programa tiene tres unidades: I. Modelación matemática, II. Aplicaciones matemáticas a problemas de interés general en ingeniería y III. Aplicaciones matemáticas a procesos específicos de cada ingeniería. A pesar de que en el programa se sugieren cierto tipo de aplicaciones, no importa el tipo exacto de aplicación, sino que se examinan todas las posibles consecuencias en cualquier aplicación, es decir, el alumno primero plantea un problema, identifica las variables del problema y las relaciones que existen entre esas variables y propone ya sea algún modelo o estrategias de solución. Resuelve en equipo y obtiene resultados, pero no basta con obtener resultados, debe desarrollar al menos un mecanismo para verificar que sus resultados sean correctos, debe desarrollar métodos gráficos o de otro estilo para mostrar sus resultados, debe discutir sobre el alcance del modelo, es decir para que casos puede aplicarse y cuando no, de tal forma que debe poder proponer y hacer posibles modificaciones del modelo para adaptarlo a nuevas situaciones. Es muy importante que el profesor sea guía y apoyo constante, pero él no debe resolver los problemas, los alumnos deben construir su propio conocimiento, por eso la exposición oral debe reducirse al mínimo.

### Resultados cualitativos

En esencia, el taller propone actividades en las que los estudiantes descubren y validan conceptos matemáticos en un ambiente cooperativo. Se ponen en práctica las habilidades intelectuales de alto nivel que dan pie a la discusión permanente durante las etapas del desarrollo del proyecto. Los alumnos progresan gradualmente en su conocimiento mediante la construcción del modelo matemático. Este progreso se manifiesta de muchas maneras; en primera instancia el estudiante se va adaptando a las situaciones de trabajo que exige el desarrollo del proyecto, lo que trae consigo ciertos acuerdos establecidos explícita o implícitamente entre los integrantes del equipo con el objetivo de comparar las diferentes ideas, tomar decisiones o incluso cambiar de estrategia cuando sus cálculos son insuficientes o están incorrectos. En definitiva, para que el

1000

alumno pueda explicitar su modelo empírico y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda utilizar dicha formulación para obtener él mismo un resultado que sea razonablemente correcto según las condiciones del desarrollo del modelo, de tal manera que la comunicación entre los integrantes del equipo resulta crucial a fin de intercambiar puntos de vista en tanto las ideas se van ordenando e incluso son expresadas en lenguaje matemático según las posibilidades de cada uno. El resultado de esta dialéctica permite crear un modelo explícito que puede ser descrito formalmente.

Se observa que en este ambiente de aprendizaje cooperativo los alumnos articulan eficazmente sus conocimientos previos con los problemas aplicados relativos a su especialidad. Llevan a cabo diversas acciones encaminadas a resolver los problemas que surgen al desarrollar sus proyectos tal como: búsqueda de relaciones cuantitativas entre las cantidades, identificación de variables y análisis de variaciones. Es importante hacer notar como los estudiantes transitan de un registro de representación a otro de forma natural según sus necesidades y la conexión entre dichos registros es útil para sus propósitos.

Se establece en cada sesión un diálogo enriquecedor en fondo y forma entre los profesores y los diferentes equipos de trabajo. El taller en un momento dado funciona como “laboratorio” en el cuál se establecen hipótesis y en base a la “experimentación” se aceptan o rechazan. Pero sobre todo, el taller permite al estudiante trabajar con libertad en tanto desarrolla sus ideas de manera clara y espontánea.

La manipulación de los objetos matemáticos trae consigo la validación de sus cálculos con lápiz y papel o incluso mediante la utilización de las herramientas tecnológicas. Las presentaciones de sus avances dan realce a las sesiones y permiten una mejora sustancial hacia la construcción del modelo final. Al ir avanzando en la realización de los proyectos va surgiendo un ambiente de competencia entre los diversos equipos de trabajo; no obstante las diferencias personales internas que se presentan, lo que finalmente trae consigo una superación individual y colectiva.

### Algunas de las aplicaciones y proyectos desarrollados

En los proyectos se desarrollaron aplicaciones muy interesantes. Algunas de ellas son: Problemas de optimización abordados de formas novedosas, problemas de fuerzas en fluidos, la ecuación de

1001

Bernoulli y la ecuación de continuidad, la ecuación de transferencia de calor, conducción de calor en diferentes geometrías, la ecuación de difusión, la difusión de un medicamento en el torrente sanguíneo, la liberación de un contaminante a un río, la evaporación de contaminantes, equivalencia de sistemas mecánicos y circuitos eléctricos, oscilaciones amortiguadas y forzadas, modelación de la dinámica del virus de inmunodeficiencia humana (VIH), etc. etc. A continuación se describe un extracto de un trabajo desarrollado por los alumnos.

### Ejemplo de un proyecto de aplicación

Evaporación de un contaminante a la atmósfera. En este problema los alumnos obtuvieron las ecuaciones de un modelo para predecir la tasa de evaporación, eran alumnos de ingeniería ambiental por lo que les interesaba cómo es que los contaminantes son transportados a través de la atmósfera. Cuando un contaminante entra en un cuerpo de agua (por ejemplo por un derrame accidental o por contaminación intermitente de la entrada de un flujo), parte de este puede ser liberado a la atmósfera por evaporación, mientras que otras proporciones del mismo pueden ser adsorbidas o reaccionar con los sedimentos del fondo, o someterse a la biodegradación, a través de la acción bacteriana. Los alumnos trataron únicamente con la liberación a la atmósfera y trataron de determinar hasta qué punto la concentración de contaminantes en el agua es reducida por evaporación.

La determinación de la concentración de contaminantes con el tiempo es un objetivo lógico, pero el experimento requiere de datos sobre velocidad de evaporación, que pueden ser dependientes de temperaturas locales y condiciones de viento. Vieron si podían evitar el uso de datos de evaporación mediante su eliminación del modelo. Se dieron cuenta que una buena estrategia en estos casos es empezar modelando el proceso y examinar los primeros resultados para ver si vale la pena de que el objetivo se pueda alcanzar. Las herramientas que se tienen a disposición son diversos balances de masa, y se empieza por escribir dos de ellos, utilizando fracciones molares como las unidades de concentración. Esto es necesario porque las leyes físicas que participan aquí (ej. ley de los gases ideales, relaciones fase-equilibrio) son basadas en velocidades molares en lugar de masa. Se elige un balance molar total y un balance molar del contaminante (que también se pudo haber elegido un balance de masa de agua, pero en última instancia, resulta ser menos conveniente). El cuerpo de agua se supone que es una mezcla y con la concentración uniforme sin

1002

flujo o salida. Escribieron las ecuaciones de balance molar total y del contaminante y obtuvieron dos ecuaciones en las cuales se relacionan el total de moles evaporándose por unidad de tiempo, las moles de agua y del contaminante en el cuerpo de agua y la concentración del contaminante en el vapor y la fase acuosa respectivamente.

Por lo tanto, concluyeron que necesitaban dos ecuaciones más. Una relación puede ser obtenida por el supuesto de que el vapor dejando el líquido está a nivel local en equilibrio con el líquido. Y la cuarta variable, la velocidad de evaporación  $D$ , se eliminó del modelo haciendo un poco de álgebra. Investigando, encontraron una relación que establece que  $P$ , o el contenido del contaminante en el vapor, aumenta con la concentración de  $x$  de la fase líquida y con la presión de vapor del contaminante puro. Usando leyes conocidas como la ley del Gas ideal y la ley de Dalton sobre la adición de las presiones parciales y realizando algunos cálculos más con la ayuda de referencias bibliográficas y el apoyo constante de los maestros, los alumnos pudieron obtener por fin una ecuación que integraron para poder obtener lo que deseaban, es decir, cuando un contaminante está disuelto en el agua y esta se evapora, cual es la fracción del mismo que se evapora junto con el agua y que por lo tanto puede viajar a otras regiones. En particular estaban interesados en contaminantes como los aceites pesados, mercurio, pesticidas, bifenilos policlorados (PCBs), etc.

Se obtuvieron resultados que son sorprendentes porque una buena parte de los contaminantes disueltos en el aula se volatilizan también, en el caso del mercurio alrededor del 13%, estos contaminantes viajan largas distancias, llevados por el viento y otras corrientes de aire. Debido a esto es por lo que las regiones árticas están contaminadas por este tipo de contaminantes.

Los alumnos se mostraron altamente motivados no solamente por los resultados obtenidos, sino porque fueron construyendo modelos que describen un fenómeno, estos alumnos tenían actitudes contrarias al aprendizaje de la matemática, las cuales cambiaron totalmente cuando finalizaron y presentaron su proyecto.

## Conclusiones

La asignatura Taller de Aplicaciones Matemáticas se ha aplicado durante dos semestres a 8 grupos de aproximadamente 35 alumnos cada uno. El método de proyectos como estrategia didáctica

fortaleció el trabajo en equipo y la discusión, se realizó el aspecto formativo de la matemática, y estimuló en los alumnos el interés por el descubrimiento. Se hizo énfasis especial en la construcción de modelos y se probaron diversos modelos a partir de las diferentes hipótesis de los alumnos. Se evaluó de forma continua; con la realización de proyectos cortos de aplicación y proyectos más extensos que se desarrollaron en varios días y cuyos resultados se presentaron ante los compañeros y profesores. Los alumnos asimilaron conceptos que no habían asimilado en cursos anteriores y mejoraron su capacidad para modelar un fenómeno o un proceso. Tomaron de forma parcial la responsabilidad de su propio aprendizaje, valoraron su trabajo al explicar y defender sus resultados ante los demás y se hizo que se involucraran en el trabajo estudiantes que usualmente no participan. Al fortalecer el trabajo cooperativo en pequeños grupos y fomentar la interacción, se logró el razonamiento de cada participante y el discernimiento de los problemas propuestos. El taller se convirtió en un medio ideal para usar y aprender tecnología de cómputo y herramientas de cálculo y graficación que antes no habían aplicado y se expandieron las capacidades de los estudiantes para presentar y manipular la información. En general, el trabajo permitió al alumno desarrollar habilidades de trabajo productivo, de aprendizaje autónomo y de mejora continua.

### Referencias bibliográficas

- Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. (2008). Experiencia de cátedra usando herramientas informáticas y el aprendizaje cooperativo. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 993-1003. México:Clame AC
- Basmadjian, D. (2003). *Mathematical modeling of physical systems: an introduction*. USA: Oxford University Press.
- Bequette, B. W. (1998). *Process dynamics: modeling, analysis and simulation*. USA: Prentice Hall.
- Díaz, F., Hernández, G (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Un enfoque constructivista*. México: Mc Graw Hill.
- Galagovski, L. y Adúriz, A. (2001). Modelos y analogías en la enseñanza de las ciencias naturales. El concepto de modelo didáctico analógico. *Enseñanza de las Ciencias* 19(2), 231-242. 1004

La Cueva, A. (2001). La enseñanza por proyectos: ¿mito o reto? *Revista Iberoamericana de Educación*, 16, OEI, Madrid.

Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Holubec, E. J. (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula. Buenos Aires: Paidós

Malaspina, M. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(3), 365-369.

Mochón, S. (2000). *Modelos matemáticos para todos los niveles*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz-Diosdado, A. y Arce-Viveros, A. (2003). La enseñanza de estrategias para la resolución de problemas matemáticos en una escuela de ingeniería. En J.R. Delgado Rubí (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 524-529, México: Clame AD

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de Ingeniería: Un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 145-175.