LOS MÓDULOS DE INSTRUCCIÓN COMO HERRAMIENTA METODOLÓGICA EN EL CONTEXTO DEL MODELO DE VAN HIELE

Carlos Mario Jaramillo López, Edison Sucerquia Vega, Sandra Milena Zapata
Universidad de Antioquia Colombia
Grupo de Investigación: Educación Matemática e Historia (UDEA-EAFIT) Categoría A, Colciencias
cama@matematicas.udea.edu.co, esucerquia@ayura.udea.edu.co, szapata@ayura.udea.edu.co
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *El propósito del artículo es presentar los avances de una investigación que se está desarrollando en el marco de las Fases de Aprendizaje del Modelo Educativo de van Hiele, las cuales corresponden al aspecto prescriptivo del modelo, para el aprendizaje de conceptos matemáticos, susceptibles de una componente visual geométrica. Específicamente se ha logrado diseñar un módulo de instrucción enmarcado en estas fases, cuyo propósito es que los estudiantes ubicados en un nivel II de razonamiento frente al concepto de convergencia de una serie infinita, alcancen un nivel III de razonamiento.*

El módulo de instrucción, es una propuesta metodológica de aprendizaje e intervención en el aula, que le facilitará al docente por un lado, mejorar su enseñanza y por otro, lograr que el estudiante avance en sus procesos de razonamiento. Además se diseñó una prueba de selección múltiple, la cual se aplicó a una población amplia de estudiantes, con el propósito de validar la efectividad del módulo desarrollado.

Palabras clave: fases de aprendizaje, modelo de van Hiele, módulo de instrucción niveles de razonamiento, visualización

Antecedentes

El modelo de van Hiele, en la última década ha presentado una extensión a conceptos del análisis matemático; el grupo de investigación Educación Matemática e Historia (UdeA – EAFIT), gracias a la realización de tesis de maestría y doctorado ha contribuido en lo referente a dicha extensión.

El modelo educativo de van Hiele aborda dos aspectos fundamentales, uno descriptivo, en el cual se identifica el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes, y otro prescriptivo, que sugiere la creación de experiencias de aprendizaje que favorecen el paso de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

Este trabajo de investigación ha sido desarrollado teniendo en cuenta los resultados que presenta la tesis de maestría de Jurado y Londoño (2005), titulada: "*Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*", la cual es de carácter prescriptivo y uno de sus resultados manifiesta la dificultad que tienen los estudiantes para alcanzar un nivel III de razonamiento. La presente investigación da continuidad a la tesis anteriormente mencionada, aborda el aspecto prescriptivo del modelo, mediante la implementación de una serie de experiencias de aprendizaje enmarcadas en las fases para lograr la promoción en los niveles de razonamiento.

Niveles de razonamiento

La componente descriptiva del modelo tiene que ver con una estratificación del pensamiento humano. Se distinguen cinco niveles de razonamiento, según Llorens y Pérez (1997):

Nivel 0. *Predescriptivo*. Los estudiantes reconocen los elementos básicos de estudio para el concepto tratado, pueden variar entre diferentes conceptos relacionado.

Nivel I. *De reconocimiento visual*. Los estudiantes reconocen las propiedades de los elementos básicos de estudio, aprenden el vocabulario relacionado con el concepto y establecen ciertas relaciones entre dichos elementos.

Nivel II. *De análisis*. Los objetos son proposiciones que relacionan las propiedades. Los estudiantes analizan las estrechas relaciones entre los elementos básicos de estudio.

Nivel III. *De clasificación y relación*. Los objetos son las ordenaciones parciales de las proposiciones. Los estudiantes relacionan los elementos básicos de estudio y analizan sus propiedades llegando a dar definiciones verbales del concepto tratado.

Nivel IV. *De deducción formal*. Los objetos son las propiedades que analizan las ordenaciones. Los estudiantes analizan el concepto en distintas situaciones y pueden llegar a hacer demostraciones formales.

Fases de aprendizaje

Para promover un estudiante de un nivel de razonamiento al siguiente dentro de una materia (concepto), los van Hiele propusieron una secuencia de cinco fases de aprendizaje, una prescripción para la organización de la instrucción. Estas fases permiten establecer de manera aproximada la forma como las ideas son generadas, refinadas, extendidas y asimiladas por los estudiantes. Las fases de aprendizaje de van Hiele se centran en el papel de la instrucción con el propósito de ayudarle al estudiante a crear y fortalecer sus redes de relaciones en conceptos matemáticos; por lo tanto, se hace necesario diseñar, elaborar, desarrollar y validar *módulos de instrucción* que le permitan al estudiante alcanzar un avanzado nivel de razonamiento.

Las definiciones presentadas a continuación hacen parte de la construcción teórica que se ha venido haciendo a lo largo de la presente investigación y retoman elementos importantes de trabajos ya realizados en el contexto del modelo educativo, por autores como Vasco y Bedoya (2005), entre otros:

1. *Información*. El profesor interactúa con los estudiantes (en doble vía) conversando acerca de los objetos de estudio, comprende cómo los estudiantes interpretan las palabras y da alguna explicación de los tópicos a ser estudiados. Las preguntas se contestan y se hacen observaciones, usando el vocabulario y objetos de estudio relativos al tópico específico.

2. *Orientación dirigida*. El profesor diseña cuidadosamente secuencias de actividades para la exploración de tópicos por parte de los estudiantes, los cuales comienzan a mirar qué dirección está tomando el estudio y cómo ellos llegan a familiarizarse con las características de las estructuras. Muchas de las actividades en esta fase son tareas paso a paso que producen una respuesta específica.

3. *Explicitación.* Los estudiantes construyen el concepto desde experiencias previas, refinando el uso de su vocabulario y expresando sus opiniones acerca de la estructura interna de estudio. Durante esta fase, los estudiantes comienzan a formar las relaciones del sistema de estudio, es esencial que hagan explícitas las observaciones, más que recibir explicaciones del profesor.

4. *Orientación libre.* Los estudiantes encuentran tareas multipaso, o tareas que pueden ser completadas de diferentes maneras. Ellos ganan experiencia encontrando sus propias maneras de resolverlas, gracias a que muchas de las relaciones entre los objetos de estudio llegan a ser explícitas y coherentes para los ellos.

5. *Integración.* Los estudiantes, ahora realizan los métodos de su ordenación y se forman una idea general (tienen un vistazo general). Los objetos y relaciones son unificados e interiorizados dentro de un nuevo dominio de pensamiento. El profesor ayuda en este proceso, brindando conocimientos previos generales que los estudiantes se supone conocen, siendo cuidadosos de no presentar nuevas o discordantes ideas.

Redes de relaciones

La forma de manifestar una estructura mental de un estudiante se da a partir del establecimiento de una *red de relaciones* (van Hiele, 1986) en la cual los vértices de la red son conceptos o propiedades de la noción estudiada y las líneas de conexión son las relaciones que existen entre dichos elementos. A medida que se vincula un nuevo concepto o propiedad o se establezcan nuevas relaciones, se consolida o se amplía dicha red, la cual manifestará el grado de comprensión del concepto estudiado; la creación de esta nueva red de relaciones favorece el paso hacia el siguiente nivel de razonamiento. Propiciar tal progreso es también función de las fases de aprendizaje, en las cuales la instrucción juega un papel determinante, ésta se puede dar mediante el diseño de actividades correspondientes a cada una de las fases, que contengan acciones concretas que pongan de manifiesto la red de relaciones que el estudiante posee en su mente, por esto se puede afirmar que "el papel de la instrucción en las fases de aprendizaje es ayudar al alumno a crear y fortalecer su red de relaciones abundantes y complejas en conceptos matemáticos y de la geometría" (Jaramillo y Esteban, 2005, p. 116).

Según lo planteado por Jaramillo y Esteban (2005) "La estructura visual de la red de relaciones que un alumno adquiere en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático se puede fortalecer con el empleo de la técnica de los mapas conceptuales". (p. 117). Es así como los éstos son una herramienta que: facilita la explicitación de la red de relaciones que los estudiantes poseen, le permite al docente hacer un seguimiento de los cambios generados en dicha red y sobretodo media el paso a través de las fases para lograr el progreso en el razonamiento de los estudiantes.

Mapas conceptuales

Los mapas conceptuales diseñados por Joseph Novak, podrían definirse como un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones; según Novak y Gowin (1999), el objeto de los mapas conceptuales es "representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones" (p. 33), los mapas conceptuales se emplean como una herramienta para el aprendizaje, que permite indagar por los conocimientos previos de los estudiantes, y que permite también organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento del concepto estudiado, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad;

además, también los reconocen como una herramienta útil en la evaluación formativa en tanto que permite detectar errores conceptuales y de alguna forma dan cuenta de la evolución del lenguaje empleado por los estudiantes, a lo largo del proceso educativo.

Los mapas conceptuales como herramienta educativa, gracias a su estructura, facilitan la visualización de las transformaciones que un estudiante realiza a su red de relaciones, siendo el lenguaje un aspecto fundamental durante el proceso de construcción de un concepto y además un factor común entre el modelo y los mapas conceptuales.

Módulos de instrucción

El módulo de instrucción debe contener experiencias de aprendizaje, diseñadas de manera detallada y pormenorizada, cuyo objeto es ayudar a promover a los estudiantes ubicados en el Nivel II de razonamiento al Nivel III, frente al concepto de convergencia de una serie infinita. Las experiencias de aprendizaje, pueden ser entendidas no sólo como las que se realizan en el aula, sino también como aquellas que promueven aprendizajes significativos, independientes del contexto donde se lleven a cabo. Éstas deben ser enfocadas de tal manera que los estudiantes se involucren en procesos de enseñanza y de aprendizaje más específicos. Así mismo, las experiencias de aprendizaje fuera del aula, serían aquellas que se realicen con propósitos formativos y que permitan al estudiante adquirir habilidades, destrezas y actitudes, además, establecer redes de relaciones válidas entre los conocimientos adquiridos.

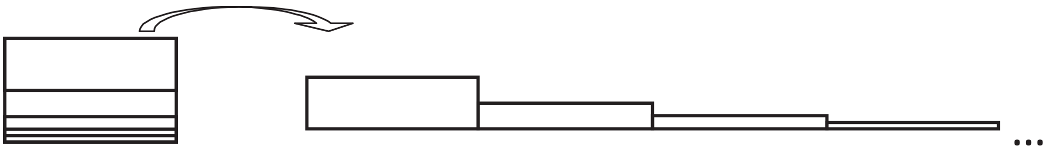
El módulo de instrucción contiene un conjunto de actividades, cada una de ellas enmarcadas en las fases de aprendizaje, las cuales a su vez, hacen énfasis al aspecto visual geométrico de la noción de convergencia de una serie infinita. Dado esto, el diseño de las actividades es una tarea minuciosa y delicada, ya que la pretensión última en el trabajo de investigación, es lograr que un estudiante adquiera un avanzado nivel de razonamiento. Este progreso en el razonamiento es posible, si el estudiante al término de las fases logra, para la noción de convergencia de una serie infinita, la integración entre el concepto imagen y el concepto definición, que según Tall y Vinner (1981), describen el estado de los conocimientos del sujeto en relación con un concepto matemático. Es evidente la relación del modelo de Vinner con el modelo de van Hiele, pues ambos suponen incrementar la *experiencia* al tiempo que se explicitan las imágenes de los conceptos (visuales, manipulativas, etc.) para construir a partir de ellas el pensamiento matemático avanzado.

Concepto objeto de estudio

En la investigación se abordan series de términos positivos que representan áreas de figuras planas, de manera particular se trabaja con rectángulos, dispuestos como escaleras; se retoman las definiciones de Jurado y Londoño (2005), quienes denominan escalera a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, que tienen igual base y uno esté contiguo al otro en forma horizontal. Si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior se denominará escalera creciente, si se compone de infinitos rectángulos, escalera infinita creciente. Si por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, se denominará escalera decreciente, si se compone de infinitos rectángulos, escalera infinita decreciente. Así mismo, se llamará área de una escalera a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman y la razón de una escalera será el cociente entre las áreas de un rectángulo y el inmediatamente anterior.

Uno de los resultados de la investigación es lograr que los estudiantes rompan con la concepción errónea de que una suma infinita de términos no tiene resultado, para ello se usó el mecanismo de la división sucesiva de un rectángulo a la mitad, lo cual permitió a su vez construir una escalera decreciente infinita de razón 1/2, dicho mecanismo conduce al estudiante de procesos de razonamiento finitos a infinitos y viceversa. Cabe resaltar que el razonamiento avanzado se refleja en comprender que no toda escalera decreciente infinita (en nuestro caso la denominamos escalera armónica) tiene resultado finito y en deducir las condiciones para las cuales una escalera infinita decreciente tiene área.

Debido a que el presente trabajo retoma el problema propuesto por Oresme (Stein y Barcellos, 1996), se muestra cómo la visualización favorece la determinación de las condiciones para la convergencia de una serie infinita. Para un rectángulo de área 1 unidad cuadrada, dividido a la mitad de manera sucesiva, se tiene que la suma de las infinitas áreas se puede representar mediante la expresión: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, de manera particular dicho rectángulo tiene razón 1/2 y es posible disponerlo como una escalera infinita decreciente de razón 1/2, como lo indica la figura:



Es claro que si ambas figuras son iguales entonces el área de la escalera infinita decreciente también será igual a 1. Este tipo de representaciones fueron importantes para el trabajo de investigación, ya que las escaleras de razón 1/2, son el mecanismo que ayudó a Oresme a demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

En el trabajo de investigación se describe a través de un módulo de instrucción, la manera en la que a partir de la visualización de áreas de figuras planas, guiamos a los estudiantes desde procesos de razonamiento finito hasta procesos de razonamiento infinito, de tal modo que puedan progresar a un nivel III de razonamiento, con respecto al concepto de convergencia de una serie infinita.

Conclusiones

La implementación de los mapas conceptuales como herramienta para manifestar la red de relaciones, permite evidenciar el progreso de los estudiantes en cuanto a su razonamiento y su lenguaje, ya que al explicitar la red de relaciones, los estudiantes se hacen concientes de las relaciones que hay entre las propiedades y elementos de un concepto.

Partir del concepto imagen, permite gracias a la visualización, la apropiación inicial del concepto y el establecimiento de relaciones entre sus propiedades y sus manifestaciones, para lograr así el concepto definición del mismo. Esta investigación, constituye un punto de partida para nuevos estudios relacionados con el modelo educativo y el concepto en cuestión, siempre y cuando estén orientadas a un nivel de formalización, dentro del modelo educativo de van Hiele, sobre el concepto de convergencia de series infinitas.

Referencias bibliográficas

Jaramillo, C. (2003). *La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele*. Tesis Doctoral publicada. Universidad Politécnica de Valencia. España.

Jaramillo, C. & Esteban, P. (2005). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele, *Revista Educación y Pedagogía*, *18* (45), 111–118.

Jurado, F. & Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Colombia.

Llorens, J. & Pérez, P. (1997). An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation. *International Journal* of *Mathematical Education in* Science *and Technology, 28* (5), 713-726.

Novak, J. & Gowin, B. (1999). *Aprendiendo a Aprender*. España: Martínez Roca.

Stein, S. & Barcellos, A. (1996). *Cálculo y Geometría analítica* (5ª. Ed.). México: McGraw-Hill.

van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.

van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Real de Utrecht. Holanda.

Vasco, E. & Bedoya, J. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van hiele.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Colombia.

Tall D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics. 12* (2), 151 – 169.