EL INFINITO: VIVO EN EL AULA DE MATEMÁTICA Y FUERA DE ELLA

Patricia Lestón
ISP "Dr. Joaquín V. González" Argentina
patricialeston@yahoo.com.ar
Campo de investigación: estudios socioculturales Nivel: Medio

Resumen. *El tema alrededor del cual se desarrolla este trabajo es el infinito. Diariamente nos encontramos con este término y no sólo dentro de las aulas. Existe un infinito que vive fuera de la matemática, a nivel cotidiano, construido socialmente en función de lo que culturalmente se comparte. Ese infinito cotidiano entra a la escuela en las ideas de los alumnos y se proyecta sobre el infinito matemático que la escuela intenta utilizar como concepto central de muchos contenidos matemáticos. La clase de matemática hace uso del infinito en distintas situaciones. Sin embargo, en ningún momento se define formalmente. Simplemente usamos las ideas que los alumnos traen, pero que en realidad se desconocen. El objetivo de esta investigación es entonces discutir estas cuestiones que aparecen en las aulas y que obstaculizan la construcción del conocimiento matemático.*
Palabras claves: infinito, nociones intuitivas, construcción social de conocimiento, escenarios socioculturales, socioepistemología

Introducción

El infinito se usa habitualmente para referirse a distintas situaciones u objetos fuera de la escuela. Antes de ser presentado y discutido en la escuela, el alumno tiene para el infinito ideas asociadas de su vida no escolar, que nacen del diálogo con sus padres y pares, construidas en comunidad.

Como concepto matemático, el infinito se construye luego en la escuela, en la clase de matemática. El conflicto surge entonces cuando estas dos ideas, la intuitiva y la matemática, diferentes en su construcción y en su naturaleza, tienen que convivir en la mente de los alumnos. Es en el proceso de la construcción que se produce dentro del aula, influenciada por ideas intuitivas y extraescolares, en donde las ideas intuitivas reaparecerán, afectando la idea matemática que los alumnos construyan.

Creemos que esta investigación puede aportar a la matemática educativa algunas propuestas para lograr la modificación que incorpore al infinito al DME.

> *"El corazón de nuestra tarea como profesionales de la matemática educativa, es elaborar lo propio y apropiado al mundo de nuestros estudiantes, mundo complejo y abigarrado que demanda a nuestros entendimientos. Compartimos la afirmación que distingue la matemática misma de la matemática educativa y de la matemática escolar. Añadimos a*

esos saberes, los saberes culturales, los cuales constituyen cuerpos de conocimientos con una naturaleza propia y que ingresan al aula más o menos invisibles para sus protagonistas, favoreciendo u obstaculizando los entendimientos de los saberes matemáticos escolares. ¿Cómo dar visibilidad a estos saberes? ¿Cómo construir relaciones benéficas con aquellos del aula?" (Díaz Moreno, 2003, p. 10)

Lo que existe fuera del aula, los escenarios en que los estudiantes se desarrollan y viven, en donde generan conocimiento, ingresa al aula. Lo cultural es parte de lo que el discurso matemático escolar debe considerar. Creemos que pensar en una escuela que enajena a la persona de sus espacios de desarrollo, crecimiento y formación es ignorar lo que la sociedad requiere de sus ámbitos de educación, que son cada vez más amplios y flexibles, abiertos en la comunidad y compartidos por la realidad globalizada de una sociedad de información, que se comunica por diversos medios y se alimenta de los conocimientos que se construyen dentro y fuera de las instituciones educativas tradicionales.

"[...] la escuela actual debería prestar atención" a los conocimientos que "se construyen fuera de la escuela y que, penetran en ella a pesar de que los docentes de matemática las rechacen. Esa búsqueda fuera de la escuela puede dar claves acerca de los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. De esta manera, la escuela pasaría a ser una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento." (Crespo Crespo, 2007, pp. 277-278)

La socioepistemología como enfoque para este estudio

Como ya se ha planteado, es en los escenarios no escolares en los que los alumnos llegan a su primera aproximación de la idea de infinito, tomada de la noción que sus padres, sus pares, los medios de comunicación y la literatura presentan sobre este término. Lo que se analiza en esta investigación es la existencia de actividades humanas en estos escenarios no escolares que condicionan la construcción de un conocimiento de naturaleza matemática, a pesar de que se use primero fuera de la cultura matemática.

Queda claro entonces que el escenario sociocultural es determinante para el estudio que se plantea. Es la componente social la que da sentido y ámbito de pertenencia a esta investigación. Si bien se espera que finalmente los resultados puedan modificar la realidad escolar del concepto, es en los escenarios no escolares donde deben buscarse las fuentes de las ideas que existen en relación al infinito, y esos escenarios son puramente sociales. Debido a esto es que la aproximación socioepistemológica es la que provee de soporte teórico a esta investigación.

> *"Las investigaciones que hemos desarrollado a fin de "hacer ver" la postura descrita, han seguido una aproximación sistemática que permite tratar con las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento, a saber; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido nombrada como el acercamiento socioepistemológico." (Cantoral, 2001, p. 71)*

En la visión socioepistemológica se considera la importancia de la componente social en la construcción del conocimiento matemático. Esta visión permite entonces que el presente trabajo se apoye en el estudio de las actividades humanas para poder comprender cómo se generan las ideas intuitivas sobre el infinito, fuera de las instituciones escolares y exterior al discurso matemático escolar.

Dado que este trabajo se propone dar cuenta de las situaciones e interacciones por las que pasa un alumno con respecto a este término a lo largo de su vida que le permiten luego crearse un modelo mental de representación del infinito, para entender cómo actúa este modelo en la mente de los estudiantes, frente a qué tipo de situaciones reaparece y qué tipo de obstáculos genera al momento de enfrentarse con la idea matemática del infinito; es que es necesario comprender la importancia de los escenarios sociales y culturales en que han surgido estas "intuiciones". Las particularidades de dichos escenarios serán determinantes al momento de comprender las asociaciones hechas en función del infinito.

Influencias del infinito intuitivo en la construcción escolar del infinito

Es necesario en este apartado, a pesar de que el término ya ha sido utilizado, definir claramente con que intención se habla de idea intuitiva o infinito intuitivo. El conocimiento intuitivo no se basa en evidencia suficiente ni en un razonamiento lógico riguroso, y sin embargo, la persona lo acepta como cierto y evidente.

> *"La intuición se trata de una sensación, de una idea en la que tiene gran influencia la subjetividad. Algo puede ser intuitivamente comprendido por alguien y no por otro. Depende de la experiencia, de los conocimientos previos, pero también de cualidades personales... Podemos discutir razonamientos, pero no intuiciones, compartir resultados, pero no evidencias." (Crespo Crespo, 2008, pp. 726-727)*

Sin embargo, nuestra intención es analizar no sólo el proceso de construcción de estas ideas intuitivas, sino cómo influyen en la comprensión de este término en sentido matemático, provocando la generación de modelos mentales internos asociados a este concepto; más allá de las dificultades propias y de los conocimientos matemáticos previos que hayan adquirido en relación a esta temática.

Debido a la necesidad de enfocar el problema desde las distintas características del concepto que se desean estudiar, es necesario buscar focos a partir de los cuales indagar. Por ello, nuestra pregunta de investigación puede plantearse como:

> ¿***Cuáles son las ideas previas al estudio escolar del infinito que traen los alumnos y cómo influyen en la construcción escolar del infinito matemático***?

Encuestas aplicadas

Todas las encuestas fueron aplicas a alumnos de los últimos años de escuela media de una escuela de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina. Los alumnos aún no habían trabajado con elementos formales de límites, aunque tenían una aproximación a algunas cuestiones de estudios de funciones.

Los diseños completos así como las respuestas que detectamos pueden encontrarse en (Lestón, 2008). A continuación presentamos los resultados más relevantes.

1. Primera experiencia: El infinito intuitivo

En esta experiencia se buscó caracterizar las ideas intuitivas que los estudiantes tienen en relación al infinito. En esta actividad, aplicada a modo de encuesta, se apelaba a la memoria (ideas que se tenían en la niñez) y a las relaciones que se establecen en la vida diaria con el concepto de infinito.

Del análisis de las respuestas surge que lo infinito se relaciona con aquello de lo cual no se puede asegurar dónde termina ni donde comienza, lo que no se puede medir ni contar; aún cuando se sepa que el final existe. Por otro lado, el infinito se relaciona con el amor, los sentimientos, la fe. Es un infinito sentimental y poético, muy distinto del matemático, muy parecido al histórico que se discute más adelante en este trabajo.

2. Segunda experiencia: El infinito en la literatura

En esta experiencia, se busca a través de distintos textos despertar (al ver reflejadas), distintas ideas que los estudiantes tienen en relación al infinito. El trabajo que se realiza busca alejar al concepto de la matemática, y en especial, de la clase de matemática, para poder encontrar evidencias de intuiciones lo más naturales posible.

Los resultados obtenidos muestran que frente a la lectura, las ideas que surgen son críticas al tratamiento que se hace del infinito, por inexacto, poco científico, poco profundo o demasiado fantástico. Lo que saben del infinito, lo que piensan, los lleva a desacreditar lo que los autores intentan transmitir. Como científico, el tratamiento no alcanza, como literario y poético, es aceptado. Pero los dos infinitos, son distintos.

3. Tercera Experiencia: Las contradicciones detrás del infinito

Esta experiencia busca enfrentar a los estudiantes con una situación que provoque un quiebre dentro del modelo mental asociado al infinito. Se busca en función de una serie de preguntas sencillas que elaboren una teoría respecto al tamaño de dos conjuntos infinitos, uno subconjunto propio de otro, para luego mostrarles a través de la biyección, una forma de equiparar ambos conjuntos, probando que “hay tantos elementos en uno como en el otro”.

En las respuestas se encuentra lo esperado, el “nuevo” método de comparación se comprende, se ve en el resultado de su aplicación que se contradice lo que se pensaba desde la extrapolación de propiedades de conjuntos finitos, pero sin embargo, “no convence”. Los estudiantes lo aceptan, lo comprenden, pero lo ven como un “artilugio”, no tiene la fuerza suficiente para hacer tambalear lo que creen, lo que se construyó a lo largo de toda la vida. Puede evocarse, a pequeña escala, lo que provocó Cantor en sus colegas: no puede una teoría desacreditar años de cultura matemática respecto al infinito. Al menos, no de inmediato...

4. Cuarta Experiencia: Conjuntos numéricos y el infinito

Esta actividad se presenta a estudiantes que ya hayan estudiado los distintos conjuntos numéricos, en los cuales el infinito aparece como “propiedad”: hay infinitos naturales, infinito a izquierda y a derecha, infinitos elementos entre dos dados... Se apela a esos conocimientos y se intenta que los alumnos relacionen estas ideas con otras que aparecen en algunos textos, en este caso, dos textos de Jorge Luis Borges.

De las respuestas obtenidas, se observa que lo teórico está, los alumnos comprenden los distintos conjuntos numéricos y las diferencias entre los “distintos” infinitos que tienen cada uno. Sin embargo, esas ideas no resurgen todo el tiempo. Se contradicen, no son parte del modelo mental de lo que es el infinito. El otro infinito, el natural, el filosófico; ese es el que esta siempre presente. El matemático está sólo cuando se lo referencia de manera directa: ese no es natural, contradice la intuición, provoca incomodidad... pero esos conflictos se callan, para no provocar ira, por respeto a lo que los docentes han enseñado.

El infinito a través de la historia

Para nosotros en esta investigación, la búsqueda en la historia del infinito no tiene relación sólo con el devenir del concepto, sino con las preguntas que al ser planteadas, se respondieron a partir del infinito. Esas preguntas, en su mayoría de índole filosófica, son las que se repiten en la actualidad y las que se deben hacer si se desea evocar en los estudiantes, los orígenes del infinito para ellos.

Desde la matemática, los jainas empiezan a discutir el infinito, surge la idea de imposible de contar, innumerable, el número imposible de concebir, los incontables años. Y aquí es necesario hacer una distinción: la imposibilidad de contar, ¿tiene que ver con la finitud humana? ¿El infinito es infinito porque el ser humano es finito o es infinito en sí mismo?

Los griegos hacen a través de la filosofía un tratamiento más científico de este concepto, buscan el origen y composición de la materia, su característica propia: ¿se puede dividir infinitamente antes de que deje de ser materia? Los atomistas intentan una explicación de infinitos indivisibles, pero la realidad es que el infinito en sí, el infinito actual, no se acepta. Las rectas pueden ser infinitas porque se pueden extender infinitamente, pero no son infinitas en sí mismas.

La razón impide a la humanidad resolver los conflictos que el infinito arrastra. Se busca entonces, salir a través de lo que la razón no logra explicar: la fe. La religión explica lo único que como infinito no se discute: Dios es infinito, lo es todo. Si hay algo infinito, entonces eso es Dios, su poder. La ciencia no puede explicar antes de Bolzano, antes de Cantor, el infinito. Sin embargo, la religión en general y el catolicismo en particular, se ocupan de él. Y el infinito que se plantea en el poder de Dios, es un infinito "controlador, persecutor": Dios todo lo ve, todo lo sabe, nada se escapa a su poder. Se debe temer el infinito poder de Dios.

Con los orígenes del cálculo, es necesario volver a discutir este concepto desde la ciencia. Surgen los infinitesimales y con ellos las posturas de algunos de los matemáticos más importantes de la historia de la humanidad. El infinito se rechaza: contradice a la razón, el infinitesimal provoca incertidumbre, duda, sospecha de inconsistencia, provoca silencios para no despertar ira en otros pensadores. Esto mismo es lo que se puede observar en las aulas: ¿cuántos alumnos rechazan al infinito matemático?, ¿cuántos descreen los infinitesimales?, ¿a cuántos les parece sospechoso que lo que a veces es importante y no se puede olvidar, a veces es despreciable? La realidad de nuestros alumnos es como la de Berkeley, Leibniz y otros: pre-Cantoriana. Los estudiantes no conocen a Cantor, los docentes sí, pero en la medida que no se les transmita, lo esperable es que opinen como los matemáticos anteriores a Cantor. E inclusive Cantor rechaza alguna de las cuestiones que encuentra, el infinito lo sorprende, lo desencaja y lo lleva alo que el hombre busca cuando la realidad lo supera: Dios. Cantor pone en la misma categoría de infinito absoluto al conjunto de todos los conjuntos, al último número transfinito (omega) y Dios. El infinito sigue siendo para el gran teórico del infinito una cuestión de fe.

Conclusiones

Como se ha observado, las ideas surgen cuando quieren y en situaciones en que no son buscadas, el docente debe estar atento a los “errores” de los estudiantes, a lo que dicen al pasar en una clase o en un diálogo, a lo que opinan cuando la situación de clase rompe con la situación tradicional que se asocia al contrato didáctico y que impide la libertad requerida para expresar ideas que se suponen “no matemáticas”.

Cabe preguntarnos, entonces, ¿cuál es el conflicto que se encuentra cuando impedimos que las ideas intuitivas entren a la escuela? Como dice Barbero cuando caracteriza a la escuela actual, *“una escuela que sigue exigiendo a los alumnos dejar afuera su cuerpo y su alma, sus sensibilidades, sus experiencias y sus culturas, sean éstas orales, gestuales, sonoras, visuales, musicales, narrativas o escriturales”* (Barbero, 2008, p. 68)

Lo que hemos observado en nuestra investigación es existen situaciones, circunstancias, que determinan la necesidad de un concepto como el infinito a nivel social. Se pueden considerar como algunas de las actividades que generan al infinito las siguientes:

- La enumeración
- La medida
- La temporalidad
- La clasificación numérica
- La clasificación cualitativa

Éstas son las cuestiones que surgen de lo que se lee en la historia, lo que se observa en las experiencias de esta trabajo, pero principalmente, de la vida. Cuando los niños preguntan, insisten, cuestionan, surge para los padres el infinito como un “comodín”: no es claro lo que representa, no es claro lo que quiere decir, y sin embargo los niños lo adoptan.

Como se plantea en el inicio, el infinito es uno de los conceptos matemáticos que tiene previa a su existencia en el aula de la matemática, un campo de ideas asociadas a él. Culturalmente se generan ideas que rodean al infinito. Surge el término como adjetivo para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como “mucho”, “muy grande”.

En la historia se ha visto como el infinito ha sido conectado con todo, con la religión, con la inmortalidad, con el tiempo, con el espacio, con el universo, y por supuesto, con los números. Y ha sido rechazado y negado, desacreditado como elemento matemático durante muchos siglos de matemática. Lo mismo se ve en las experiencias hechas con estudiantes: *"el infinito se mete en muchos aspectos de la vida, inclusive en la clase de matemática. Y sin embargo, hay un divorcio evidente entre lo que se cree (desde la intuición) y lo que se sabe (desde la matemática). Y es ese divorcio el que dificulta la construcción matemática del infinito"* (Lestón, 2008, p.114).

El objetivo de esta investigación es presentar esas ideas intuitivas: dónde aparecen, cómo y por qué. Pero la tarea no es sencilla. La escuela está inmersa en un escenario social que hace de ella un lugar en el cual la intuición no tiene espacio. El alumnado sabe que lo que cree o siente no acredita conocimiento, solo el saber, el saber de los libros o el transmitido por los docentes permite la promoción de las materias. Y la escuela media es un medio para lograr un primer escalón en el avance de la educación. Y la manera de concluirlo es acreditar el conocimiento que la sociedad ha aceptado como importante y necesario en su sistema de valores. *"La escuela no puede seguir mirando a la cultura popular como algo sin valor. Las ideas intuitivas, lo que se construye en la vida no escolar es parte de lo que los estudiantes saben, y debe aceptarse como elemento, ya sea para colaborar o para mostrar las contradicciones que con el conocimiento erudito presenta."* (Lestón, 2008, p.115)

El aula es el lugar natural en el cual deben incluirse las investigaciones que son producto de la matemática educativa. Ésta en particular, enmarcada dentro de la socioepistemología, intenta establecer el contacto directo entre el medio social en que se desarrollan los estudiantes y en el que está incluida la escuela. La necesidad de un marco teórico que establezca el escenario social como una de las componentes de la construcción del conocimiento es evidente: lo que se busca, lo que se encuentra, lo que se intenta establecer, es resultado de interacción social entre las personas y su medio, y especialmente, entre personas entre sí. El infinito surge y ha surgido, no desde la matemática, sino desde la contemplación de lo que rodea al ser humano. Es un concepto que se construye socialmente antes que matemáticamente, y es por esa naturaleza que debe incluirse en la escuela el medio social y las ideas construidas en ese medio dentro de la escuela.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En Tenti Fanfani, E. (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp. 65-99). Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos. En Beitía G. (Editor) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14 (pp.70-81). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Crespo, C. (2001). Acerca de la comprensión del concepto de continuidad. En *Boletín de SOAREM* nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15 (I), pp.529-534. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología* . Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo, C.(2008). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21 (pp. 717-727). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Díaz, L. (2003). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa* 16 (I), (pp. 10-20). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal And Ordinal Infinities: An Epistemological And Didactic View. *Educational Studies in Mathematics.* 48, 175-197

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN.

Lezama, J. (2005). Una Mirada Socioepistemológica al Fenómeno de la Reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 3* (8), 339-362.