CONFLICTOS COGNITIVOS QUE EMERGEN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RELATIVOS AL LÍMITE

Noé Miranda Valle, Catalina Navarro Sandoval y Elika Sugey Maldonado Mejía
Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
citlaltona@hotmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx, elikamm@gmail.com
Campos de investigación: resolución de problemas. Nivel educativo: superior
Palabras clave: conflictos cognitivos, problemas, límite

Resumen
En la presente investigación, se muestran algunos resultados sobre conflictos cognitivos que emergen en la resolución de problemas que involucran la noción de límite. Con la intención de detectar qué conflictos cognitivos emergen en el proceso o intento de resolución de dos problemas en particular; uno de ellos es una paradoja, éste en el sentido de Northrop (2002); y el otro, un problema que involucra el concepto de límite.
La aplicación de los problemas se desarrolló con estudiantes de nivel superior de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Antecedentes

Dentro de los antecedentes se cuenta con la propuesta de Flores (2004) que sugiere emplear paradojas para provocar conflictos cognitivos en profesores de matemáticas en formación, quienes deben compartir una visión epistemológica constructivista de la matemática, y para lo cual se debe romper con la visión unidimensional de la misma a partir del paradigma de la reflexión en la acción. Una investigación fue realizada por Movshovitz y Hadass (1990), quienes consideran que para la formación de los profesores-estudiantes se deben integrar contenidos de matemáticas, psicología y pedagogía, para ello plantearon una paradoja relacionada con la demostración de la irracionalidad del número 2, observando que la actitud predominante fue de desesperación y angustia por detectar o no el error. Otra investigación es la de Ramírez (2004) que da a conocer las distintas reacciones que provocaron algunas paradojas planteadas a profesores de matemáticas y física, sobresaliendo su reacción reflexiva en la que expresaron su deseo de mayor análisis para la resolución, creyendo que estaban mal planteadas o que había algún error en ellas.
La investigación que combina el concepto de límite y paradoja es la de Sacristán (2003), en la que se trabajó procesos infinitos en un ambiente de exploración computacional con el fin de ayudar a los estudiantes a experimentar diversos contextos y construir diversas representaciones externas del concepto e interactuar con ellas. Particularmente, exploró algunas sucesiones y series infinitas mediante figuras geométricas recursivas, específicamente, la Curva de Koch que condujo a los estudiantes a una paradoja: El perímetro infinito está formado por segmentos de longitud cero, al decir: la longitud de cada segmento era dada por la fórmula $\frac{1}{3^n}$, un valor que se aproxima a cero a medida que *n* crece. Otra investigación que se consideró es la de Hitt (2003) que muestra los obstáculos de aprendizaje del límite y continuidad de funciones, que en el caso del límite se menciona que los obstáculos están en la palabra “límite” y “tiende hacia”, destacando que “el límite de la función no es alcanzado”.
Por lo anterior, se plantea como problema de investigación qué conflictos cognitivos emergen en el proceso o intento de resolución de dos problemas relativos al concepto de límite.

Conflictos cognitivos

La historia muestra que las paradojas del infinito promovieron reflexiones profundas en relación a los conceptos matemáticos, que llevaron a conclusiones más satisfactorias, a definiciones más precisas y rigurosas, resolviendo el problema causado por el infinito potencial y el infinito actual. Sin embargo, la matemática escolar sigue enfrentando diferentes dificultades entre la intuición y lo formal, como ejemplo se muestra la siguiente afirmación: "Una función constante $f(x) = k$ no tiene límite". ¿Por qué? Porque "no satisface" la siguiente definición: Sea a un número real contenido en un intervalo abierto y sea f una función definida en todo el intervalo (cerrado), excepto posiblemente en a, y sea L un número real. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L si x se elige suficientemente cercano a a (pero $x \neq a$). Ya que si se aplica la definición se observa que hay "un absurdo" o una imposibilidad para responder la pregunta: ¿a qué valor L puede acercarse una función constante si x se elige lo suficientemente cercano a a? "Contradicciones" como esta inciden en la falta de una explicación satisfactoria e intuitiva, lo cual constituye un conflicto cognitivo, hecho que fue obtenido o corroborado con tres estudiantes en una experiencia de clase. Las respuestas emitidas constituyeron un factor más para proseguir la búsqueda de otros conflictos cognitivos. Entendiendo que un conflicto cognitivo es un estado de desequilibrio que surge cuando una concepción que tiene un individuo entre en conflicto con alguna otra concepción que lleva el mismo individuo, o bien con el ambiente externo, según Aguilar y Oktac (2004); es decir, un conflicto cognitivo es un estado de desequilibrio psíquico de un sujeto, un estado de contradicciones existentes entre las imágenes del concepto propias del estudiante y el concepto en sí (el concepto científico). Un conflicto cognitivo es creado en forma consciente por el docente y no necesariamente es provocado por la cuestión epistemológica del concepto. Para resolver un conflicto cognitivo es necesario tomar consciencia de su existencia, es decir, interiorizar la situación conflictiva, que demanda una modificación de los esquemas mentales y cambio de las imágenes del concepto. Mientras no ocurra esa interiorización o toma de conciencia de la existencia del conflicto no se hará algo por parte del sujeto para superarlo y por tanto, no se produce la equilibración y el aprendizaje. Sin embargo, Duit y Treagust (1998) señalan que los conflictos cognitivos no necesariamente producen cambios conceptuales o desarrollo cognitivo, pues existen ciertos factores o causas que inhiben ese cambio o desarrollo, entre ellos son:

a) Los estudiantes son, frecuentemente, incapaces de comprender la nueva teoría porque sus concepciones previas proporcionan una interpretación esquemática;
b) Las nuevas concepciones no resultan inteligibles y plausibles para los estudiantes;
c) Los estudiantes son incapaces de comprender los nuevos puntos de vista porque no poseen suficientes 'conocimientos previos';
d) Sin una cierta cantidad de conocimientos previos, los argumentos a favor de las nuevas concepciones no pueden ser comprendidas;
e) Los estudiantes comprenden una nueva teoría, pero no creen en ella.

Finalmente, los conflictos cognitivos se clasifican (por Duit y Treagust) en tres clases primarias:

1) Conflictos entre predicciones de los estudiantes y el resultado del experimento;
2) Conflictos entre las ideas de los estudiantes y las de los profesores;
3) conflictos entre las ideas de los estudiantes.

Descripción de los problemas

Previo al desarrollo de la investigación se realizó un estudio del concepto de límite, para tener mayor conocimiento sobre el tema, en tres aspectos: epistemológico, didáctico y cognitivo.
En el aspecto epistemológico se encontró, entre otros, que Zenón de Elea (495-435 a. C.) con sus paradojas evocó el concepto de límite; D'Alembert (1717-1783) llamaba a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable, si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin dejar nunca a coincidir con ella) (Boyer, 2001). Weierstrass (1815-1897), fue quien formalizó el concepto mediante la definición conocida actualmente como épsilon-delta, $\varepsilon - \delta$. Dentro de este aspecto Cornú (1991) señala los obstáculos epistemológicos siguientes: El fracaso de la unión entre geometría y aritmética, tal como ocurre en el caso del cálculo del área del círculo; la noción de lo infinitamente grande e infinitamente pequeño; el aspecto metafísico de la noción de límite; y ¿el límite es alcanzado o no?
Dentro del aspecto didáctico se encontró que el concepto, presenta dificultades u obstáculos debido a su naturaleza, al currículo y a los métodos de enseñanza del profesor (D' Amore, 2005). En la revisión de planes y programas de estudio del nivel medio superior de esta universidad, se encontró que para las preparatorias se tiene el libro de texto: Matemáticas V (Calculo Diferencial), donde se expone una de las paradojas de Zenón (Fernández, 2005; Hitt, 2003); mientras que en la licenciatura no se expone ninguna para formar el concepto de límite y su definición, sino solamente en el tratamiento de las series infinitas de dos textos bibliográficos.
En el aspecto cognitivo Sierpinska (1985, citado en Cantoral, et al, 2000) presenta obstáculos de aprendizaje, tales como: la persona rehúsa admitir que el paso al límite es una operación matemática, la dificultad de eliminar el problema del infinito al tomar tantos términos como sean necesarios, se fija más la atención en funciones monótonas, y se usa más el lenguaje natural que símbolos usuales en el paso al límite.
Como resultado del anterior análisis se eligieron dos problemas con características geométricas que involucran el concepto de límite mediante procesos infinitos y la situación límite. Los estudiantes que participaron en esta investigación son de nivel superior de esta Unidad Académica, mismos que ya habían cursado Cálculo Diferencial e Integral I y Geometría Euclidiana. Los problemas fueron planteados a manera de proposición con sus respectivas de figuras geométricas y son los siguientes:

1. No existe ningún polígono regular inscrito en un círculo, o circunscrito al mismo, de $n \geq 3$, $n \in \mathrm{N}$, lados cuya área sea igual al del círculo, i.e., πr^2.
2. Las semicircunferencias, cuyos diámetros son los $n \geq 3$ lados del polígono regular inscrito tienen como límite a la circunferencia que circunscribe a ese polígono, o sea, $2 \pi r$.

El primer problema es una afirmación verdadera, pues no se indica que *n* "tiende al infinito" y cuando se indica esa operación entonces se dice que el área del círculo es el límite del área de polígonos regulares inscritos y circunscritos.
El segundo es una afirmación falsa, ya que es una paradoja en el sentido de Northrop (2002), donde tanto la observación (mirada) como la intuición fallan. Los diámetros de las semicircunferencias son polígonos regulares inscritos, P_n, en la circunferencia cuyo límite es

ella misma; mientras que la longitud de las n-semicircunferencias es $C_n = \dfrac{\pi\, P_n}{2}$, y al pasar al límite se tiene, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi\ P_n}{2} = \dfrac{\pi\,(\,2\pi\, r\,)}{2} = \pi^{\,2} r$.

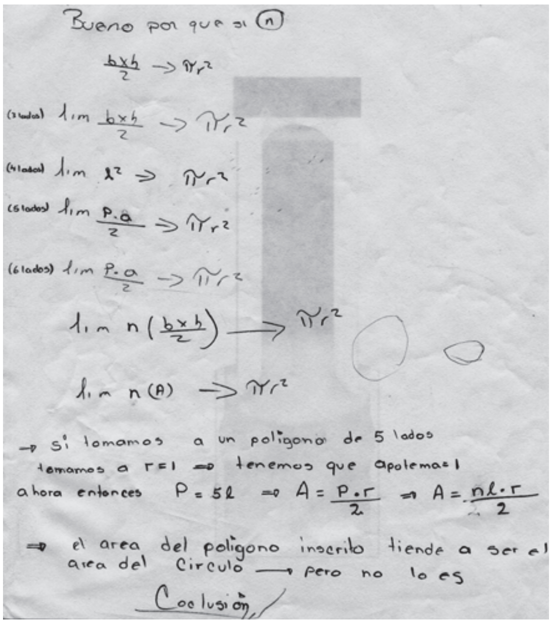
La solución de los dos problemas exige el dominio de conceptos de geometría y trigonometría, tales como: el ángulo central de un círculo; razones trigonométricas; fórmula del área de un triángulo, la fórmula de la circunferencia $C = 2\pi\,\mathrm{r}$ como límite del perímetro de un polígono regular inscrito de n lados, P_n, <u>cuando n tiende al infinito</u>, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 2\pi\, r$; y la razón de la circunferencia con respecto a su radio es la misma cualquiera que sea el tamaño de la circunferencia, i. e. , $\dfrac{c}{2r} = \pi$.

En ambos casos, en un primer momento se les indicó emitir un juicio, en forma individual e intuitiva, diciendo si la afirmación era falsa o verdadera. En un segundo momento se organizó a los estudiantes en equipos de tres integrantes para que discutieran sus respuestas anteriores y posteriormente mostraran las respuestas a la que llegarían en equipo.

Resultados

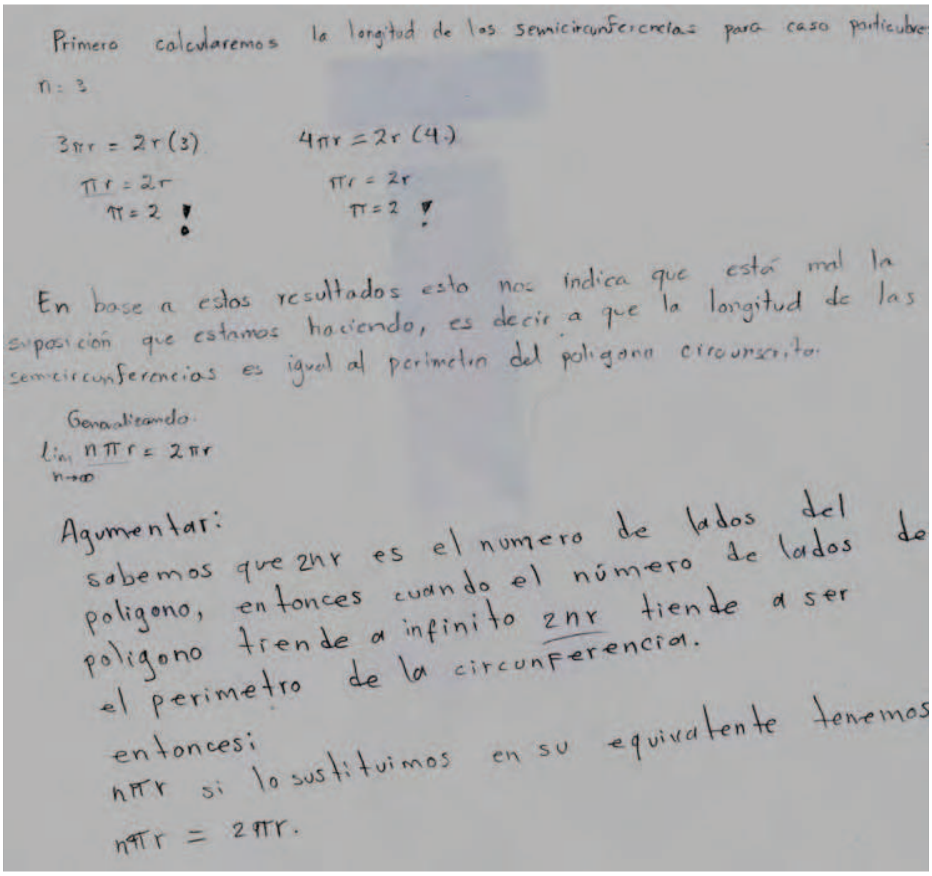
En la resolución del primer problema participaron trece estudiantes, de los cuales siete respondieron que la afirmación era verdadera, es decir, n no puede tender a $+\infty$, pues n es un número natural; seis respondieron que era falsa, interpretando el área del círculo como límite de áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, ignorando que el número de lados de dichos polígonos es $n \geq 3$, donde $n \in \mathrm{N}$, o sea, dieron el paso al límite: n tiende a $+\infty$, por lo que, las respuestas fueron intuitivas en el sentido de Fischbein (1978, 1987).

En el segundo momento, discutieron sus respuestas individuales, de donde surgió una propuesta de solución, de todos y cada uno de los equipos, entre las cuales se muestra la siguiente:



Donde se observa que la frase “tiende a” lo manejan como aproximación, el límite no se alcanza, tal como lo definió D’Alembert, y efectivamente, no operan adecuadamente con el límite. Su idea entra en conflicto con la idea matemática que consiste en mostrar claramente que su respuesta es correcta. Además, al calcular el límite del “área” $A = \frac{nlr}{2}$ cuando $n \to +\infty$ el “área es infinita”. Otros, insistieron en que el límite es πr^2 sin poder mostrarlo, y sólo el equipo cuatro pudo mostrar este resultado.

En la resolución del segundo participaron doce estudiantes, de los cuales once respondieron que la afirmación era verdadera, pues es fija la idea: la respuesta intuitiva debe coincidir siempre con la respuesta formal o matemática. Tomaron la idea de solución del equipo cuatro que mostró la respuesta matemática en el problema anterior. A continuación mostramos una realización:



Primero calcularemos la longitud de las semicircunferencias para caso particular
n: 3
3πr = 2r(3)   4πr = 2r(4.)
πr = 2r   πr = 2r
π = 2 !   π = 2 !
En base a estos resultados esto nos indica que está mal la suposición que estamos haciendo, es decir a que la longitud de las semicircunferencias es igual al perimetro del poligono circunscrito.
Generalizando.
$\lim_{n\to\infty} n\pi r = 2\pi r$
Agumentar:
sabemos que 2nr es el numero de lados del poligono, entonces cuando el número de lados de poligono tiende a infinito 2nr tiende a ser el perimetro de la circunferencia.
entonces:
nπr si lo sustituimos en su equivalente tenemos
nπr = 2πr.

Como se observa, se obtuvo la contradicción de $2 = \pi$ y creen que hay un error en la suposición, y pese a ello se generalizó y se obtuvo $n = 2$. Pero la mayoría, simplemente dio una respuesta puramente intuitiva, que en este caso no coincide con la matemática. Este es otro conflicto encontrado, por no tener en cuenta que $\frac{c}{2r} = \pi$ siempre es la misma cualquiera que sea el tamaño de la circunferencia.

Conclusiones

Las conclusiones son resultado de todo el trabajo realizado, entre ellas, son: la enseñanza tradicional procede a introducir el concepto de límite mediante funciones y sucesiones monótonas, generalmente; no introduce el concepto de límite mediante problemas de carácter geométrico; tampoco emplea paradojas relativas al concepto, por considerarlas como exclusivas de la comunidad matemática; si un estudiante no logra resolver el problema planteado, sea paradoja o no, tiene dos opciones en su proceder posterior, por lo menos:

a) ser más consciente de sus disposiciones de los conocimientos matemáticos y de sus limitaciones, por lo que para eliminarlas necesitará investigar y estudiar con detenimiento ciertos aspectos.

b) bloquearse y fortalecer la idea de que la matemática es difícil, por lo que hay que renunciar a ella o resignarse a aceptar su existencia como teoría.

Sin más ánimo de profundización o de investigación. Por lo que se sugiere incorporar las paradojas en el sistema de enseñanza, pues son un medio de construcción o reconstrucción del conocimiento, según muestra la historia.

Referencias bibliográficas

Aguilar, P. y Oktaç A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Relime* 7(2), 117-143.

Boyer, C. (2001). *Historia de la matemática.* Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento matemático.* México: Trillas.

D' Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales* de la Didáctica de la Matemática. México: Clame-Reverté.

Fernández, J. et al. (2005). *Matemáticas V. Cálculo Diferencial.* Libro de texto de bachillerato. Guerrero: UAG-Gobierno del Estado.

Fischbein, E. (1978). '*Intuition in Mathematics Education', Osnabrücker Schriftenzür Mathematik 1, 148-176*.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An educational approach*. Netherlands: Klumer Academic Publishers.

Flores, P. (2004). Paradojas matemáticas para la formación de profesores (Mathematical paradoxes for teachers education). *Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, SUMA No. 31. P. 27.*

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-FCE.

Northrop, E. (2002). *Paradojas matemáticas.* México: Limusa.

Ramírez, J. (2004). Los profesores ante problemas paradójicos: una invitación a la reflexión. En *Resúmenes de la 18ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. 2004.

Sacristán, A. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp.262-279). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-FCE.