ACERCAMIENTO SOCIOEPISTEMOLÓGICO A LA HISTORIA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Gabriela Buendía Abalos, Gisela Montiel Espinosa
CICATA-IPN, Legaria. México
gbuendia@ipn.mx, gmontiel@ipn.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: medio y superior

Resumen. *Problematizando al propio saber matemático, en este trabajo de investigación recurrimos a la historia con una mirada socioepistemológica a fin de dar cuenta de aquellos elementos que den cuenta del carácter social de su construcción. Estos elementos conforman una base de significados para la epistemología de prácticas que se propone con la finalidad de incidir en el rediseño del discurso matemático escolar.*
Palabras clave: prácticas sociales, función trigonométrica, historia

Introducción

Bajo una visión socioepistemológica, queremos proporcionar evidencia del papel de la historia en la investigación en matemática educativa, el cual no se limita a un mero aspecto informativo o motivacional, pues si bien la reconocemos como parte de la cultura matemática del individuo, estamos interesados en cómo puede aportar elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. Realizar una búsqueda de carácter histórico implicará reconocer y dar cuenta de las circunstancias que rodean tanto la gestación de un determinado saber, como los procesos de institucionalización a los cuales se vio sometido. Se analiza, entonces, al hombre haciendo y usando matemáticas en un contexto social específico y no sólo a la producción matemática final que logra. El análisis de los *usos* del conocimiento matemático en situaciones socioculturales específicas permite dar cuenta que éste no está conformado por conceptos y estructuraciones conceptuales de forma aisladas, sino que presenta una articulación gestada al seno del desarrollo de ciertas prácticas.

En la formulación de epistemologías de prácticas –llamadas *socioepistemologías* – los aspectos históricos permiten conformar una base de significados para el conocimiento matemático y para su introducción, también significativa y articulada, al sistema didáctico.

Elementos socioepistemológicos de la función trigonométrica

Dentro del modelo que propone Montiel (2005) de la construcción social de la función trigonométrica, ubicamos nuestro análisis de la historia de la *funcionalidad trigonométrica* en el segundo momento, aquél regulado por la práctica social de *predicción*. Este momento abarca el periodo que va desde el surgimiento del álgebra hasta la introducción de *lo trigonométrico* al cuerpo de la familia de funciones, situación que ocurre explícitamente con los trabajos de Euler.

Los conceptos físicos están indisolublemente asociados a uno o varios conceptos matemáticos guardando una relación constituyente más que instrumental (Levy-Leblond, 1999) y en el periodo que estamos caracterizando, la física proveyó de gran variedad de situaciones y planteamientos científicos donde nacen conceptos matemáticos de gran relevancia. En particular, es la matematización del movimiento oscilatorio la práctica de referencia en la construcción de modelos mecánicos que describen movimientos periódicos.

El paso del fenómeno celeste al modelo mecánico, representa la transición de la trigonometría en el plano geométrico al plano funcional, el abandono de las razones para poner atención en las cantidades trascendentes trigonométricas y sus relaciones. Dicho en otros términos, la medida de la semicuerda en función del ángulo central constituye la cantidad que surge del círculo, pero visto éste como una curva (o trayectoria en el plano de la física). De hecho, es la cuadratura de esta curva donde se va a originar la expresión en serie infinita de la función seno: una expresión algebraica de lo trascendente.

Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica

A partir de los trabajos desarrollados por Buendía (2004) y Montiel (2005) y los aspectos metodológicos desarrollados en otras investigaciones del área (Buendía y Cordero, 2005; Cordero, 2006), se propone un esquema metodológico (figura 1) para la investigación en matemática educativa interesada en incorporar los elementos socio-culturales que norman la construcción de conocimiento matemático en escenarios específicos.

Fig. 1. Esquema metodológico para la investigación socioepistemológica

Se parte de identificar una problemática de estudio o un fenómeno didáctico particular lo cual reconoce la necesidad por explicar un hecho escolar desde una perspectiva científica. La problemática planteada en (Montiel, 2005) sostiene que la didáctica de las funciones no puede abordarse desde la generalidad del objeto matemático, sino desde la particularidad de cada tipo de función y las condiciones socio-culturales de su construcción.

Con relación a la función trigonométrica la investigación ha reconocido que para el alumno no hay distinción entre las razones y las funciones, o al menos que hay una mezcla de conceptos para resolver problemas relacionados con las funciones, pero, por otro lado, las investigaciones favorecen el método del triángulo rectángulo para la enseñanza de este concepto.

Desde nuestra visión lo que sucede es que dichos trabajos están problematizando el cómo se aprende y cómo se enseña, pero no el qué se enseña, el objeto matemático en sí. Esta es la causa principal por la cual en el nivel medio superior el concepto de función trigonométrica se enseña como una *extensión* de la trigonometría clásica, que encuentra en el círculo trigonométrico una explicación necesaria y suficiente para dejar claro *el dominio de la función en todos los reales*, *el significado de un ángulo negativo*, *la conversión de la unidad de medida: grados ↔ radianes*, *la equivalencia entre radianes y reales*, *la periodicidad* y *el acotamiento de la función*.

Este *fenómeno didáctico de la extensión* permeará en tanto no se haga distinción entre los momentos y circunstancias que dan origen, significado y necesidad de construcción a cada concepto escolar

Así, en el programa general de la Socioepistemología de las Funciones, se plantea *la construcción social de la función trigonométrica* como problemática de estudio y se inicia una revisión, de corte 1289 socioepistemológico, de los aspectos cognitivos y didácticos de la problemática de estudio, orientados por la naturaleza epistemológica del saber en juego y las condiciones sociales que posibilitan su construcción.

Revisión socioepistemológica: hacia la funcionalidad trigonométrica

La introducción de las funciones trigonométricas al cálculo, por primera vez en la obra de Euler (s. XVIII), es un hecho histórico a partir del cual se puede reflexionar sobre las formas de saber y sobre los mecanismos de su producción. Particularmente, nos interesa obtener elementos para construir una primera *base de significados* para los conceptos y procesos matemáticos, buscando incidir con su auxilio en el *discurso matemático escolar*.

Hasta antes de Euler los aspectos geométricos del seno y del coseno eran el objeto de estudio y no sus propiedades analíticas. Katz (1987) señala que las funciones trigonométricas pudieron ser evitadas porque no se veía un *uso razonable* de ellas. Fueron quizá los *nuevos usos* de las cantidades trigonométricas lo que las despojó de su carácter geométrico: pasaron de considerarse líneas en un círculo a cantidades que describían ciertos fenómenos, particularmente movimientos periódicos. Consideramos que dichos usos son por completo de carácter sociocultural pues surgen y se desarrollan dentro de tareas específicas relativas a la *matematización del movimiento oscilatorio*.

Los usos de la función trigonométrica en Euler

En 1739, Euler presenta el trabajo *De novo genere oscillationum* sobre movimientos con propiedades comunes: la oscilación. Entre ellos reconoce a la cuerda vibrante, las ondas de sonido que produce la campana, las ondulaciones del agua y los flujos (o corrientes) marinas. Actualmente lo denominamos movimiento de un oscilador armónico.

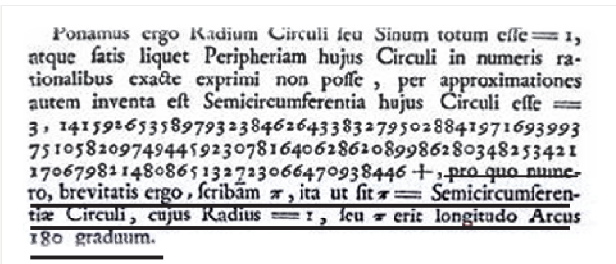
En este estudio empiezan a percibirse cambios importantes como el cambiar el foco de atención del tiempo al movimiento, de lo periódico del tiempo a lo periódico del movimiento, pero siempre referido al comportamiento del objeto en cuestión; así, lo periódico califica un cierto tipo de comportamiento.

De manera coherente con este tratamiento, al proponer su solución al problema de la cuerda vibrante, afirma que la propiedad de periodicidad que se le pedía a la forma inicial de la cuerda es restrictiva y que no toma en cuenta funciones algebraicas y algunas otras curvas trascendentes. Su propuesta es *hacer* funciones periódicas a partir de extender, por ejemplo, una función $f(x) = hx(a - x)$: explota pues el carácter repetitivo que da pie a la propiedad periódica.

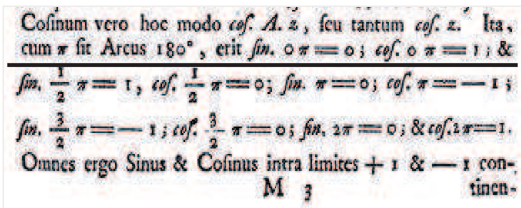
Algunos años después, en *Introductio in analysin infinitorum* (1748) Euler presenta un estudio de las funciones para el análisis, donde ya reconoce a las cantidades trigonométricas como relaciones funcionales trascendentes, junto con el logaritmo y la exponencial. En ese momento, se hacía necesario un análisis sistemático del conocimiento generado hasta entonces sobre la función, y entonces, la función trigonométrica entra formalmente al análisis.

Su trabajo, como el de sus contemporáneos está influenciado por el paradigma dominante del siglo XVIII: la matematización del movimiento. Es después de esta obra que el análisis ya no trata solo sobre las propiedades de las curvas, sino sobre las propiedades de las funciones (Dunham, 2001). En este momento de formalización, propiedades como lo periódico quedan asociadas a la función trigonométrica.

Así pues, reconocer el carácter social de la matemática implica distinguir desde los momentos del uso del concepto hasta aquellos momentos donde se hacía necesaria una presentación sistemática y ordenada de las herramientas, nociones y conceptos; *Introductio in analysin infinitorum* pareciera una obra con tales fines. Por ello es que en dicha obra coexiste, por ejemplo, la presentación de la medida de un ángulo en grados y radianes (fig 2).



Ponamus ergo Radium Circuli seu Sinum totum esse = 1, atque satis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non posse, per approximationes autem inventa est Semicircumferentia hujus Circuli esse = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46 +, pro quo numero, brevitatis ergo, scribam π, ita ut sit π = Semicircumferentiae Circuli, cujus Radius = 1, seu π erit longitudo Arcus 180 graduum.



Cosinum vero hoc modo *cos. A. z*, seu tantum *cos. z*. Ita, cum π sit Arcus 180°, erit *sin.* $0\pi = 0$; *cos.* $0\pi = 1$; & *sin.* $\frac{1}{2}\pi = 1$, *cos.* $\frac{1}{2}\pi = 0$; *sin.* $\pi = 0$; *cos.* $\pi = -1$; *sin.* $\frac{3}{2}\pi = -1$; *cos.* $\frac{3}{2}\pi = 0$; *sin.* $2\pi = 0$; & *cos.* $2\pi = 1$. Omnes ergo Sinus & Cosinus intra limites $+1$ & -1 continen-
M 3

Figura 2. Pag 23 del Tomo I Cap VIII: *Des quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis* 1291

La literatura actual señala con mucho énfasis los conflictos que desencadena el manejo ambiguo de la unidad de medida para la variable de la función trigonométrica, en contraste observamos que Euler maneja y transita entre ambas unidades (grados y radianes) sin complejidad, en tanto su método para calcular la cantidad trascendente no se limita al triángulo rectángulo. Esto es, para el alumno el origen de la cantidad trigonométrica está en el triángulo rectángulo, solo en este contexto geométrico-estático le es posible operar para obtener los valores de *x* y *sen x*, ubicar la coordenada (*x*, *sen x*) en un plano y trazar la gráfica... ¿no resulta natural que el eje *x* lo gradúe en grados?

Lo acotado de la función (fig. 3) se extrae también a partir del *círculo* donde nace la cantidad trascendente trigonométrica, cuando Euler considera los valores característicos y concluye que todos los senos y cosenos están contenidos entre los límites +1 y –1.

Cosinum vero hoc modo *cos. A. z*, seu tantum *cos. z*. Ita, cum π sit Arcus 180°, erit $\text{sin.}\ 0\pi = 0$; $\text{cos.}\ 0\pi = 1$; & $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\pi = 1$, $\text{cos.}\ \frac{1}{2}\pi = 0$; $\text{sin.}\ \pi = 0$; $\text{cos.}\ \pi = -1$; $\text{sin.}\ \frac{3}{2}\pi = -1$; $\text{cos.}\ \frac{3}{2}\pi = 0$; $\text{sin.}\ 2\pi = 0$; & $\text{cos.}\ 2\pi = 1$. Omnes ergo Sinus & Cosinus intra limites $+1$ & -1 continen-
M 3 tinen-

Figura 3. Pag. 93 Tomo I Cap VIII: Des quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis

Hinc loco *y* substituendo Arcus $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$, &c., erit

$\text{sin.}(\frac{1}{2}\pi+z)=+\text{cos.}\,z$	$\text{sin.}(\frac{1}{2}\pi-z)=+\text{cos.}\,z$
$\text{cos.}(\frac{1}{2}\pi+z)=-\text{sin.}\,z$	$\text{cos.}(\frac{1}{2}\pi-z)=+\text{sin.}\,z$
$\text{sin.}(\pi+z)=-\text{sin.}\,z$	$\text{sin.}(\pi-z)=+\text{sin.}\,z$
$\text{cos.}(\pi+z)=-\text{cos.}\,z$	$\text{cos.}(\pi-z)=-\text{cos.}\,z$
$\text{sin.}(\frac{3}{2}\pi+z)=-\text{cos.}\,z$	$\text{sin.}(\frac{3}{2}\pi-z)=-\text{cos.}\,z$
$\text{cos.}(\frac{3}{2}\pi+z)=+\text{sin.}\,z$	$\text{cos.}(\frac{3}{2}\pi-z)=-\text{sin.}\,z$
$\text{sin.}(2\pi+z)=+\text{sin.}\,z$	$\text{sin.}(2\pi-z)=-\text{sin.}\,z$
$\text{cos.}(2\pi+z)=+\text{cos.}\,z$	$\text{cos.}(2\pi-z)=+\text{cos.}\,z$

Figura 4. Pag. 94 Tomo I Cap VIII: *Des quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis*

Posteriormente, usa esta propiedad en las últimas fórmulas de la tabla (fig 4) para después generalizarlas en expresiones del tipo:

$$\text{sin.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=+\text{cos.}\,z$$
$$\text{cos.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=-\text{sin.}\,z$$

Fig. 4. Generalización

Donde la expresión $4n/2= 2n$ representa el periodo de repetición del ciclo. Finalmente, en el Tomo II, *Capítulo XXII: On Trascendental Curves* Euler construye una curva de $\frac{y}{a} = arc\ sen \frac{x}{c}$ (fig. 5) señalando el número infinito de arcos de un círculo cuyo seno es $\frac{x}{c}$, y donde la ordenada *y* es una función multivaluada.

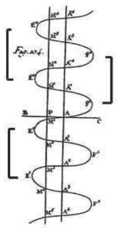


Figura 5. El comportamiento periódico del arco seno

El eje *y* y cualquier otra línea vertical paralela, intersecta a la curva en un número infinito de puntos.

Caracteriza el periodo de la curva arco seno señalando aquellos trozos que son iguales. Señala que los intervalos $E^1 E^2$, $E^2 E^3$, $E^1 E^{-1}$, $E^{-1}E^{-2}$; así como $F^1 F^2$, $F^1 F^{-1}$, $F^{-1}F^2$ son todos iguales a $2a\pi$

Es un argumento que, haciendo uso del comportamiento de la gráfica, caracteriza la propiedad periódica de la función seno.

Funcionalidad trigonométrica

La revisión socioepistemológica señalada en nuestro esquema metodológico propone que para que la cantidad trascendente adquiriera un carácter funcional, fue necesario un nuevo escenario, uno donde se desarrollará una concepción matematizable del movimiento. En este escenario es donde se desarrollan significativamente elementos como lo acotado y lo periódico de las funciones trigonométricas. Ello resulta coherente con la socioepistemología de la periodicidad (Buendía 2004; Buendía y Cordero, 2006) que propone que esta propiedad puede constituir un lenguaje (sin definiciones) aún antes de que aparezca la institucionalización de la periodicidad a través de la definición.

Ahora bien, con fundamento en esta socioepistemología de prácticas, éstas deberán reinterpretarse en una situación a fin de imprimirles cierta intencionalidad didáctica. Transponer las actividades (como calcular) en el contexto de las prácticas de referencia (como matematizar el movimiento) reguladas por prácticas sociales (como predecir) requiere de una investigación científica en todos los sentidos.

Esta situación será entendida como el conjunto de actividades o preguntas que propicie una problematización, será el instrumento que permita el desarrollo de acciones en el sistema didáctico (Suárez, 2008). En ella, la práctica de predicción funciona como un argumento: aquello que motiva la resignificación del saber matemático.

Lo periódico –aquello en un sentido histórico, social y cultural que tiene que ver con la periodicidad- se asume ahora como lo que el estudiante construye cuando ante situaciones específicas (movimientos repetitivos, periódicos o cuasi-periódicos) desarrolla herramientas como la identificación y uso de una unidad de análisis o como una visión dual local-global al tratar con esos movimientos.

Los diseños hasta ahora propuestos (Buendía, 2004; Cantú, Canul, Chi, Flores, López-Flores, y Pastor, 2007) han favorecido la integración de dichos elementos socioepistemológicos al fundamentarse en la interacción del estudiante con una gráfica-fenómeno a través de la presentación de una *situación de movimiento* en la que se pide desarrollar –intencionalmente- una práctica de predicción.

La práctica de predicción es lo que permite entonces resignificar propiedades como la periodicidad y lo acotado de la función pues éstas adquieren significados en el ejercicio de dicha práctica y no como aplicación de sus respectivas formas analíticas.

Comentarios finales

La socioepistemología favorece el reconocimiento del carácter social de la matemática donde éste es entendido como las circunstancias que generan conocimiento matemático. Esta aproximación teórica puede entenderse en dos sentidos: el primero referente al planteamiento de epistemologías de prácticas y el segundo, en su aspecto metodológico, para desarrollar intencionalmente dichas prácticas al seno de los sistemas didácticos. En ambos aspectos la investigación es necesaria

Dado el hecho que una revisión de corte socioepistemológico puede referirse a diferentes aspectos del saber –como el histórico, presentado en este escrito- en la medida que dicha revisión se amplíe, las epistemologías propuestas se enriquecen. Por otra parte, las situaciones si bien pueden dar cuenta de la viabilidad de dichas epistemologías subyacentes en sus diseños, resulta necesario desarrollar diseños explícitos para el aula. En dicho desarrollo deberán tomarse en cuenta fenómenos como el de reproducibilidad y otras variables –internas y externas- que no pueden minimizarse a fin de incidir, efectivamente, en el rediseño de la obra matemática.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practices Framework. Educational Studies in Mathematics. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. 58 (3), 299–333

Cantú,C., Canul, E., Chi, A.,Flores, F.,López-Flores, I.,Pastor, G. (2007) Resignificación de lo periódico en un ambiente tecnológico. En Buendía, G. y Montiel G. (eds) Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp. 57-77) México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R. Covián, O., Farfán, R., Lezama, J., Romo, A. (eds) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte latinoamericano. (pp. 265-286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y Díaz de Santos.

Dunham, W. (2001). Euler. El maestro de todos los matemáticos. Madrid, España: Nivola Libros y Ediciones.

Katz, V. (1987). The Calculus of the Trigonometric Functions. Historia Mathematica. 14, 311-324

Levy-Leblond, J. (1999). Física y Matemáticas. En F. Guénard y G. Lelíèvre (Eds.), Pensar la matemática, (pp. 75-92). España: Tusquets Editores.

Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Suárez, L. (2008) Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN

Nota. Este trabajo de investigación se lleva a cabo bajo el apoyo del proyecto SIP de investigación *2008-2650* Didáctica de la razón trigonométrica: su incorporación al discurso matemático escolar.