¿COMO SE PERCIBEN LAS NOCIONES DE COMPARACIÓN, CONSERVACIÓN Y CUANTIFICACIÓN DEL AREA POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS? UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LOS ARGUMENTOS

Guadalupe Cabañas Sánchez, Omar Mejía-Mozo
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero — México
gcabanas.sanchez@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología — Nivel: Superior

Resumen. *Esta contribución se interesa por mostrar cómo se percibe por estudiantes universitarios a la comparación, conservación y cuantificación del área. El estudio se apoya en el análisis de las estructuras argumentativas, reconstruidas desde los argumentos producidos por los estudiantes para justificar una conjetura en el contexto de la noción de área. Para la consecución del objetivo se analizan desde las estructuras argumentativas, los procedimientos, definiciones, propiedades y relaciones en que se apoyan para garantizar que el área de una región plana se conserva. Este trabajo se fundamenta en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa (Cantoral y Farfán, 2003) y en el modelo argumentativo de Toulmin. Los resultados muestran cómo los estudiantes perciben que el área se compara, se conserva o se cuantifica, al apoyarse en las relaciones de paralelismo; el uso de algoritmos, y; en la simulación de movimientos al trasladar un punto sobre una recta.*
Palabras clave: argumentos, aproximación socioepistemológica, transformaciones geométricas, nociones de conservación, comparación y cuantificación del área

Introducción

En este artículo interesa por revelar cómo se percibe por estudiantes de matemáticas a la comparación, conservación y cuantificación del área. Estudio que se fundamenta en el análisis de las estructuras argumentativas, reconstruidas desde los argumentos producidos por los estudiantes al justificar una conjetura. Los argumentos son producto de las reflexiones y razonamientos que realizan en el proceso de transformación de polígonos convexos y no convexos. Un resultado de estas transformaciones es que el área de estos polígonos se conserva y lo que cambian son tanto su *forma* como su *posición*. El cambio en la forma y posición en dichos polígonos es consecuencia de los procedimientos que se realizan en el proceso de transformación. En las transformaciones objeto de análisis en este trabajo (transformaciones geométricas), identificamos procedimientos vinculados con: a) las relaciones de paralelismo, y con; b) la simulación las acciones cortar y pegar. La comparación es intrínseca a cualquiera de estas transformaciones. Se evidencia al momento en que se analizan, las propiedades invariantes de los polígonos así como aquellas que no varían después de una transformación. Respecto de la cuantificación, en la actividad objeto de discusión y análisis en este reporte, está implícita en el uso de fórmulas para calcular áreas de polígonos. Particularmente cuando se alude a la que se usa para calcular el área de un triángulo. Aun cuando el uso de una fórmula está vinculado a un número, en esta actividad es utilizada por los estudiantes como un *soporte*. Especialmente al momento en que identifican que tanto la base como la altura se mantienen constantes posterior a la transformación. Las preguntas que orientaron nuestro estudio fueron:

1. *¿En qué procedimientos se apoyan los estudiantes para realizar las transformaciones?*
2. *¿Cuáles son las propiedades, relaciones, conceptos y algoritmos que contribuyen en la percepción por los estudiantes de la comparación, conservación y cuantificación del área?*

Marco teórico y conceptual

a) La aproximación socioepistemológica en el estudio de argumentos

Al seno de la aproximación socioepistemológica se ha evidenciado la importancia por estudiar los argumentos producidos por estudiantes durante las clases de matemáticas, desde contextos y propósitos distintos (Crespo y Farfán, 2005; Cabañas y Cantoral, 2006a, 2006b; Cabañas y Cantoral, 2008a). En el estudio de argumentos desde esta aproximación teórica, se precisa la incorporación de aspectos como la comunicación, el análisis de las formas de razonamiento, búsqueda de consensos, la negociación de significados y el diseño de situaciones. El diseño de situaciones toma como base la epistemología de prácticas, de usos, contextos y procedimientos previo al estudio de los objetos. Los diferentes usos y contextos en que se presenta la noción de área se retoman del estudio reportado en Cabañas 2006, Cabañas y Cantoral (2008a, 2008b), resultado de un estudio epistemológico sobre la nociones de área e integral. Las actividades de este trabajo se situaron en un *contexto* estático y se centraron en el *uso* de las nociones de comparación, conservación y cuantificación del área a diferentes niveles.

Al estudiar a la *percepción* por los estudiantes de las nociones de comparación, conservación y cuantificación del área desde esta perspectiva teórica, esta investigación toma como unidad de análisis a la práctica discursiva. Especialmente nos centramos en analizar desde las estructuras argumentativas, los procedimientos, algoritmos y conceptos matemáticos en se apoyan los estudiantes para justificar una conjetura en el contexto de algunos de los *usos* del área: la comparación, conservación y cuantificación.

b) Estudio de la percepción

Para analizar el papel de la percepción desde las explicaciones y justificaciones de los estudiantes al realizar las transformaciones, nos apoyamos en la ciencia cognitiva. Tomamos una postura desde la cognición, que considera a la percepción como la capacidad fundamental que nos mantiene en contacto con el mundo (González, J., 2006).

En González (2006) se describen tres aspectos fundamentales de la percepción: El funcional, el fenoménico y el simbólico. Percibir el mundo desde el aspecto funcional equivale a operar adecuadamente en él. Desde el aspecto fenoménico percibir el mundo equivale a experimentarlo (i.e. modalidad auditiva, olfativa y visual). Y finalmente desde el aspecto simbólico o lingüística conceptual permite percibir el mundo en función de conceptos y descripciones comunicables que, al tenerlos disponibles y aplicarlos le otorgan una identidad a lo que percibimos. Es a partir del segundo y tercer aspecto desde el que analizamos a la percepción de las nociones de comparación, conservación y cuantificación del área. Desde el segundo aspecto interesa lo visual, que contribuye en identificar propiedades como: *cambio de forma* (al disminuir o incrementar el número de lados en polígonos) y *cambio de posición* de la figura (al trasladar puntos). A partir de las relaciones entre figuras, algoritmos y procedimientos es que se relaciona al tercer aspecto.

El modelo argumentativo de Toulmin

La reconstrucción de los argumentos se apoya en el modelo argumentativo de Toulmin, particularmente nos basamos en la descripción presentada en Inglis y Mejía-Ramos (2005) e Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P. y Simpson, A. (2007). A través de este modelo es posible reconstruir y representar desde los argumentos de los estudiantes: a) La conjetura a probar y que es objeto de debate; b) Los datos que identifican en el problema como punto de partida de sus explicaciones; c) Las propiedades, relaciones, definiciones y analogías en que se apoyan para justificar y sostener una conjetura. El modelo está constituido por seis elementos básicos a los que denominamos categorías, cada una desempeña un papel diferente en un argumento. Los elementos de este modelo son: La aserción (A) es la tesis a defender, a debatir, por parte del que argumenta ya sea en forma oral o escrita. La evidencia (E) es la información en la cual se basa la aserción. La garantía (G) justifica la conexión entre evidencia y aserción haciendo referencia, ya sea por medio de una regla, una definición, o mediante una analogía. La garantía es apoyada por el soporte (S) a través de nueva evidencia. El calificativo modal (C) especifica el grado de certeza, la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza en la tesis; y la refutación (R) presenta las excepciones de la aserción. Las seis categorías del modelo están conectadas en la estructura que se muestra en la figura 1.

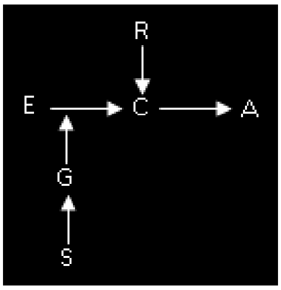


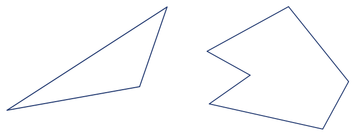
Figura No. 1. Modelo argumentativo de Toulmin

Categorías que no siempre van a estar explícitas en un texto argumentativo. Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) sostienen que cuando se modelan argumentos apoyados en el esquema argumentativo de Toulmin (1958), se da el caso en que algunas partes del argumento no son verbalizados explícitamente por el argumentador. Se refieren explícitamente al soporte y la excepción.

Métodos y participantes

En la investigación participaron trece estudiantes (19-21 años) que cursaban el tercer semestre de una licenciatura en matemáticas, cuyos antecedentes académicos fueron algunos tópicos de geometría euclidiana que habían trabajado semestres previos al estudio. Esto nos aseguraba al menos hipotéticamente, que estarían en condiciones de realizar las transformaciones. Los estudiantes fueron invitados a escribir los procedimientos en que fundamentaron sus respuestas, objeto de discusión durante una entrevista. La entrevista fue individual y se llevó a cabo en la oficina de un investigador. Para la reconstrucción de las estructuras argumentativas se recurrió a la grabación, transcripción y análisis de la entrevista, así como al análisis de las producciones escritas de los participantes. Una de las actividades en que se apoyó este trabajo y que es objeto de análisis es la siguiente:

Actividad 1. En los siguientes polígonos realiza las transformaciones que consideres necesarias de tal forma que la medida de sus áreas no cambie. Argumenta tu respuesta para cada caso.



Reconstrucción y análisis de las estructuras argumentativas

a) Análisis de las transformaciones

Cinco de los trece estudiantes realizaron las transformaciones. Algunos consideraron conveniente etiquetar los vértices de los polígonos. En el proceso de solución, sus procedimientos se sustentaron en la relación de paralelismo, en el interés por reducir el número de sus lados polígonos. La tesis (*aserción*) que sostienen los estudiantes al realizar ambas transformaciones es que el área del polígono resultante se conserva (algunos lo dicen en términos de que son iguales). Una *evidencia* (dato) en que se apoyan desde la actividad, que el área del nuevo polígono no debe cambiar.

a.1) Transformación del polígono convexo

Los estudiantes reconocen que no es posible reducir el número de lados del triángulo. En consecuencia, cambian su forma y su posición relativa. Trazan una recta paralela a uno de los lados del triángulo (al que llaman base del triángulo), de tal forma que pase por el vértice opuesto a dicho lado. Enseguida construyen otro triángulo desde un punto cualquiera ubicado sobre la recta paralela

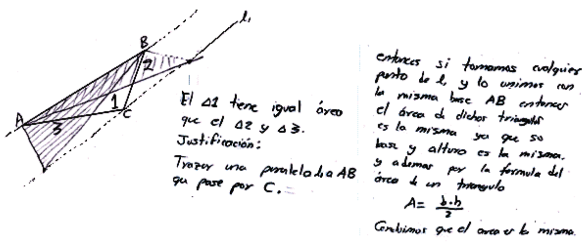


Figura 2. Transformación basada en la relación de paralelismo

hasta los vértices del lado que forma la base del polígono original. Para los estudiantes, la *garantía* de que el área de ambos triángulos se conserva se fundamenta en el trazo de la recta paralela. Afirman que la base y la altura es la misma (miden lo mismo). Algunos estudiantes apoyan (*soporte*) este argumento en la fórmula para calcular el área de un triángulo (ver figura 2 y episodio 1). La excepción a la regla no aparece en sus argumentos. Enseguida se muestra un episodio reconstruido desde los argumentos de Homero, uno de los estudiantes (E) durante la entrevista con su profesor (P).

Episodio 1

E: *El triángulo uno es el ABC, y el triángulo dos es el AB y este punto, y el triángulo tres es AB y este otro punto (el punto es el otro vértice de los triángulos 2 y 3). El triángulo uno tiene igual área que el triángulo dos y el triángulo tres.*

P: ¿Cómo justificas que el área de los tres triángulos son iguales?

E: Trazando una paralela al lado AB del triángulo ABC

P: ¿Por dónde debía pasar esa recta?

E: Que pasara por el punto C. Si tomamos cualquier punto de la paralela l1 que trazamos y lo unimos con la misma base AB, entonces el área de dichos triángulos es la misma, ya que su base…es la misma . . . y su altura.

P: ¿Pensaste en formar otro triángulo? ¿Por eso dices que si tomas un punto y lo unes con la base?

E: Exactamente …que me resultaran otros triángulos de tal manera que fueran de área igual

P: ¿Porqué crees que las áreas de los triángulos son iguales?

E: Ya que su base y su altura son la misma y además por la fórmula . . . ahí la justificación de porqué su área siempre es igual. Aplicando la fórmula del área de un triángulo que es base por altura sobre dos, ya que su altura . . . si es paralela es la misma, tomando cualquier punto concluimos que $\frac{bh}{2}$ *es igual.*

Estructura argumentativa caracterizada a partir de los argumentos presentados por Homero.

Figura 3. Estructura argumentativa reconstruida desde los argumentos presentados por Homero

a.2) Transformación del polígono no convexo

Los estudiantes reconocen que en polígonos con lados mayor a tres es posible disminuir el número de sus lados. La transformación que realizan se fundamenta en la relación de paralelismo. Los estudiantes sitúan dicha transformación en una parte del polígono, en el interés por trabajar sobre un triángulo, situado entre rectas paralelas (*garantía*). Por lo que unen dos vértices del polígono, que les permita visualizar un triángulo. Construyen una recta paralela a ese lado del triángulo (el que se forma al unir los vértices del polígono).Lo que sigue es transformar el triángulo utilizando el mismo método que en el caso de polígono convexo. Para lograr que el número de lados disminuya, el punto sobre el que construyen el otro triángulo tiene una característica particular, debe ser colineal a uno de los vértices de la base que comparten el triangulo original con el triángulo resultante, como se muestra en la figura 4. Durante la entrevista, Homero explica que la recta l_1 debe ser paralela a AB.

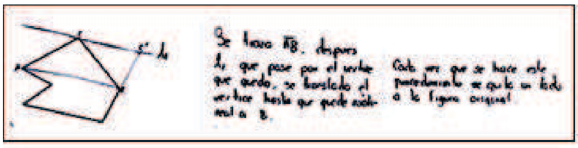


Figura. En la transformación, el número lados del polígono

Reflexiones finales

La conjetura (*tesis*) a debatir por los estudiantes está centrada en la conservación del área. La *garantía* de que el área de los polígonos se conserva, la justifican en la construcción de rectas paralelas. El procedimiento se fundamenta en situar la transformación sobre triángulos limitados por dos rectas paralelas, como se muestra en la figura 4. El triángulo a transformar, *cambia de posición* y *de forma*, conservando el área. En consecuencia, las nociones de comparación y conservación del área se perciben por los estudiantes a partir de la relación de paralelismo. Especialmente porque esta relación les asegura que la altura y la base de los triángulos permanecerá constante. Este método lo usan al transformar ambos polígonos. La cuantificación del área se percibe cuando los estudiantes aluden a la fórmula para calcular el área de un triángulo. Este algoritmo lo usan como un *soporte* a la *garantía*, cuando se les cuestiona el por qué las áreas de los polígonos son iguales (el original y el resultante) o incluso en sus razonamientos escritos. La excepción a la regla no aparece en las explicaciones de los estudiantes. Los aspectos visuales son básicos en este trabajo. A partir de lo visual, los estudiantes perciben por ejemplo, *cambio en la forma* (al disminuir el número de lados de los polígonos) *y de posición* de las figuras al trasladar un punto, *sin que cambie el área* del polígono dado. En algunos casos, el cambio de posición también conlleva al cambio de forma, como la transformación que se muestra en la figura 2.

Referencias bibliográficas

Cabañas, G. (2006). *Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral definida*. Memoria predoctoral no publicada. Cinvestav-IPN.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2006a). Percepción de la noción de conservación del área entre estudiantes universitarios. En G. Buendía (Ed), *Memoria de la X Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 34-46. México: Red de Cimates. Descargado el 9 de enero de 2008 desde: http://www.red-cimates.org.mx/Documentos/xeime.pdf.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2006b). La conservación en el estudio de Área. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las* *matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 199-226). México DF, México: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2008a). Studying arguments in mathematics classroom. A case study. *Topic Study Group 24: Research on Classroom Practice.* México: Icme-11. July, 2008.

Cabañas, G. Cantoral, R. (2008b). Estudio socioepistemológico del área y la integral. *Resúmenes del History and Pedagogy of Mathematics, The HPM Satellite Meeting of ICME 11*, p. 29. México, D.F. 14-18 July, 2008.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53* (3), 255-270.

Crespo, C., Farfán, R.M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 287-317.

González, J.C. (2006). Presentación: La congnición como objeto de estudio filosófico y científico. En J. C. González (Ed.), *Perspectivas contemporáneas sobre la cognición: categorización, percepción y conceptualización* (pp. 11-36). México DF, México: Siglo XXI Editores.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación matemática. *Revista Ema 10* (2), 327-352.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P., Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics 66* (1), 3 – 21.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University Press.