UNA CARACTERIZACIÓN DE UNA POBLACIÓN DE ESTUDIANTES CON RESPECTO A SU PRODUCCIÓN MATEMÁTICA CONSIDERANDO CATEGORÍAS DE USO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Estelita García, Francisco Cordero, Ricardo Cantoral
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
egarcia@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El estudio que se presenta se encuentra en la línea de investigación construcción social de conocimiento matemático, al seno de la Aproximación Socioepistemológica. Se considera como problemática la necesidad de realizar estudios sobre el uso de conocimiento matemático en una situación específica, para contribuir en la construcción de modelos teóricos que asuman a la práctica humana como el eje explicativo de la constitución social del conocimiento matemático. Considerando el enfoque etnográfico de la metodología cualitativa, se observó un grupo de investigadores en formación en Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. La investigación brindó un marco de categorías de uso del conocimiento asociado a la función matemática en el escenario observado.*
Palabras claves: Categorías de uso, producción, Socioepistemología, uso de conocimiento matemático

Introducción

Cordero (2006a) señala que el modelo que se ha adoptado para explicar la construcción de conocimiento matemático, el cual ha permeado el sistema educativo, tiene como característica principal la *centración en los conceptos*, es decir, que éstos constituyen los únicos referentes para explicar la construcción de conocimiento matemático. Por tanto, el marco para reconstruir el conocimiento es precisamente el matemático. Por ejemplo, en el estatus escolar, al Cálculo se le concibe como un saber centrado en conceptos matemáticos, tales como: la función, el límite y la derivada.

De esta manera, las epistemologías que se formulan sobre el conocimiento matemático son modeladas por la actividad matemática misma. Lo anterior, enfatiza un estatus utilitario del conocimiento matemático y, por tanto tal conocimiento no contribuye a transformar la realidad del individuo, ni éste participa en la transformación del conocimiento.

El ser humano produce conocimiento según necesidades específicas de una sociedad, la cual se ubica en un determinado contexto y momento histórico. Entonces, las circunstancias que condicionan la construcción de conocimiento matemático son de naturaleza social al seno de un grupo humano. De esta manera, se vislumbra necesario que la epistemología del conocimiento matemático reconozca a la práctica humana, en tanto su constitucional social, como fuente de construcción de conocimiento.

Marco teórico de la investigación

La investigación que se presenta se ubica en la línea de investigación de construcción social de conocimiento matemático, a través de la Aproximación Socioepistemológica (ASE) como marco teórico. La Socioepistemología surge como una aproximación teórica al seno de la Matemática Educativa y "sostiene que el conocimiento matemático, aún aquel que se considera avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas" (Cantoral, 2004, p. 1).

La ASE problematiza la construcción social de conocimiento matemático ya que no centra su atención en los conceptos, sino en los elementos que dieron origen a su construcción en una sociedad determinada, entendiendo que el saber únicamente puede ser explicado dentro del escenario que lo posibilita.

La ASE sostiene como principal hipótesis que el conocimiento matemático se construye socialmente y que las *prácticas sociales* asociadas a un saber, son las generadoras de conocimiento matemático al seno de una comunidad. Las prácticas sociales son entendidas como constructos teóricos que orienta las epistemologías en cuestión, como la normativa de la práctica humana.

Uso del conocimiento matemático

Al seno de la ASE se toma a la práctica social como la unidad de análisis en el estudio de la constitución social del conocimiento matemático, de esta forma lo que interesa del individuo es su manera de constituir conocimiento matemático.

Por ejemplo, la graficación en la ASE se considera como una práctica social, es decir, la argumentación de ciertas situaciones del Cálculo; la graficación permite construir conocimiento matemático en situaciones específicas. Por tanto, bajo esta perspectiva, la gráfica de una función no solo se considera como una representación de la misma, sino que a través de las gráficas se "formulan argumentos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los individuos son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente" (Cordero, 2006b).

Cuando el individuo realiza una práctica a través de la cual construye conocimiento, evidencia usos del conocimiento y al mismo tiempo se implica el desarrollo de tales usos.

La ASE propone construir modelos de uso de conocimiento y su desarrollo para crear marcos que ofrezcan las prácticas de referencia donde se construye la matemática.

En este tenor, la presente investigación responde a la necesidad de realizar estudios sobre el uso de conocimiento matemático para contribuir en la construcción de modelos de uso y su desarrollo y, de esta manera aproximarse a una matemática funcional para el individuo. Nuestra investigación tuvo como objetivo:

Caracterizar el uso del conocimiento matemático asociado a la función que un grupo de investigadores en formación en Matemática Educativa desarrolló en un escenario específico, para evidenciar de esta manera su producción en dicho escenario.

En la investigación la noción de uso de conocimiento matemático tuvo un papel central, motivo por el cual se caracterizó de cierta manera, la cual se presenta a continuación:

El uso de conocimiento matemático se explica por la cuarteta *(CM, S, Fo, F):*

Para hablar de uso se debe hacer referencia a un *conocimiento matemático* (CM) en una *situación específica* (S). El uso en esa situación específica se evidencia a través de la *forma del conocimiento* (Fo) y el *funcionamiento del conocimiento* (F). Por *forma* se entiende la clase de tareas asociadas a la situación y por *funcionamiento* la función orgánica de la situación que se manifiesta por la tarea específica que compone la situación, es decir, el funcionamiento permite establecer lo que hace el individuo con el conocimiento en esa situación específica. "Las tareas hacen referencia a las construcciones, actividades, acciones, ejecuciones o alternancias de dominios que el individuo puede realizar en la situación" (Cordero y Flores, 2007, p. 13).

Como se mencionó anteriormente, los usos dependen de una situación específica expresada de alguna manera, donde se identifica cierto funcionamiento y cierta forma, de esta manera entenderemos por *desarrollo del uso de conocimiento* la reorganización de los funcionamientos y las formas establecidos para dar lugar a nuevos funcionamientos y formas. Asimismo, el desarrollo del uso puede dar luz a patrones de usos, obteniéndose *categorías de uso.*

Aspectos metodológicos

Población de estudio

La población de estudio que se eligió estuvo conformada por un grupo de investigadores(as) en formación, que iniciaban el primer semestre de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, Área Nivel Superior del Cinvestav – PN, México, D.F. El grupo de investigadores en formación se integró por seis mujeres y seis hombres. Cada uno de ellos con diferentes formaciones académicas, procedentes de diversos estados de la Republica Mexicana y de otro país.

Los(as) investigadores(as) en formación fueron observados en un seminario denominado: *Pensamiento Matemático*. El seminario se desarrolló considerando de manera implícita ciertos conceptos matemáticos ubicados en el dominio del Cálculo en Educación Superior. En particular, nuestro interés se centró en la *función matemática*. La forma de presentación de la función no se realizó de manera tradicional. Es decir, no se consideró el modelo de secuenciación de saberes ni conceptos matemáticos a enseñar, subordinados a una temporalización.

El objetivo del seminario no era formalizar conceptos matemáticos a través de su definición, sino explorar su proceso de construcción a través de las situaciones presentadas. En este seminario se presentaron un conjunto de doce situaciones que implícitamente versaron sobre la función matemática.

Las situaciones fueron diseñadas bajo cierta premisa de construcción de conocimiento que corresponde a la Aproximación Socioepistemológica. De esta manera, se asume que la investigación se interesó por un escenario donde el individuo usa conocimiento en su práctica, al mismo tiempo que construye conocimiento.

El desarrollo del seminario permitió inferir como objetivo del mismo: *la estructuración de diferentes formas de análisis de la función matemática, mediante las prácticas de graficación y* *visualización matemática*. Las dos prácticas anteriores no se asumen al inicio del seminario, sino que se infieren de las situaciones planteadas y el discurso del investigador que impartió el seminario.

Metodología

Para responder al objetivo planteado anteriormente, se recurrió al enfoque etnográfico de la metodología cualitativa. La postura de la investigadora consistió en una observadora no participante, no se interviene en la realización del seminario.

El seminario se desarrolló en un total de catorce sesiones, en un período de tres meses. La observación de su desarrollo permitió a la investigadora identificar y establecer cuatro etapas, las cuales se describieron de acuerdo a las situaciones presentadas y los objetivos perseguidos.

En el escenario de estudio se consideraron diversas fuentes de información tales como: observación no participante, exploraciones aplicadas a los investigadores en formación, notas de campo, grabaciones de audio y video, fotos digitales, reportes y apuntes de los investigadores en formación. Las fuentes de información se triangularon para integrar los datos.

Análisis de los datos a través de las formas y funcionamientos

La búsqueda de categorías de uso asociadas a la función matemática dirigió el análisis de los datos. Para establecer las categorías fue necesario analizar las producciones de los investigadores en formación en cada una de las situaciones presentadas (considerando las diferentes fuentes de información) y determinar formas y funcionamientos del conocimiento matemático asociado a la función. Una vez establecidas las formas y funcionamientos se determinó un patrón de uso, lo cual permitió hacer referencia a las categorías de uso (**CU**).

La naturaleza del escenario de estudio permitió reflexionar sobre la necesidad de considerar tres tipos de uso, ubicados en el contexto del cálculo: *uso gráfico de la función, uso algebraico de la función* y *uso numérico de la función*.

- El uso gráfico consistió en las formas y los funcionamientos asociadas a la gráfica de una función *f*.

- El uso algebraico consistió en las formas y los funcionamientos asociadas al desarrollo algebraico que permite la expresión algebraica de una función *f*.
- El uso numérico consistió en las formas y los funcionamientos asociadas a la expresión $f(a) = b$, es decir, los valores numéricos asociados a la función *f*, donde $a \in D_f$ y $b \in I_f$.

Algunos resultados de la investigación

Los diversos usos que se presentaron en el seminario permitieron identificar como método de uso, respecto a la función el *Análisis de comportamientos*. Podemos afirmar que éste fue el uso eje que integró las siete categorías de uso identificadas. *Análisis de comportamiento gráfico (ACG), Relación entre variables, Pares ordenados, Graficación por punteo, Relación función-derivadas, Variación de parámetros y Modelación-graficación*

Para fines de este escrito, se hará mención únicamente del desarrollo del uso gráfico en los investigadores en formación, señalando categorías de uso asociadas.

Durante el seminario fue posible observar un determinado desarrollo del uso gráfico asociado a las prácticas de graficación y visualización consideradas de manera conjunta. Los investigadores en formación transitaron por cuatro etapas de graficación, las cuales no se consideran excluyentes, ya que en una misma situación los investigadores podían ubicarse en más de una etapa.

En el desarrollo del seminario se observó, a través del uso, cómo los investigadores aumentaban de forma gradual la abstracción de propiedades para conformar un lenguaje gráfico que permitiera predecir una forma gráfica dada una expresión analítica o viceversa.

La tabla siguiente tiene como objetivo mostrar diversas producciones de los investigadores en formación para evidenciar las etapas que se identificaron en cuestión al uso gráfico y, que refieren al análisis de comportamientos gráficos. Las producciones presentan en las tablas se relacionan con iniciales que indican al investigador en cuestión.

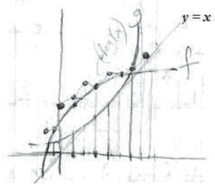
<table>
<tr><td>Situación 5: Dadas las gráficas de las funciones f y g, obtener la gráfica de la función $h = f \circ g$.</td><td>Situación 6: ¿Qué modificaciones sufre la gráfica de la parábola cuando se le suma a su expresión analítica una función lineal?</td></tr>
<tr><td>CU: Graficación por punteo
Sesión 5, 04/10/2007, Lu, E, K


Figura 1: Bosquejo de la gráfica y = $f \circ g$</td><td>CU: ACG
Extracto 1,11/10/2007, sesión 6, MV
MV: cuando la <u>recta</u> es <u>decreciente</u> la <u>mueve a la derecha</u>, si es creciente el vértice se mueve a la izquierda.
Extracto 2, 11/10/2007, sesión 6, R
R: Como que la recta desplaza a la parábola, pero <u>conserva la concavidad</u>.</td></tr>
</table>

Tabla 1 (parte 1): Producciones de los investigadores y categorías de uso asociadas

<table>
<tr><td>Situación 9: Explicar usando la calculadora ClassPad 300 los efectos gráficos que ocurren cuando a una función cúbica se le suma una función cuadrática.</td><td>Explicar los efectos gráficos que ocurren cuando a la función seno se le suma una función polinomial.</td></tr>
<tr><td>CU: Variación de parámetros
Extracto 3, 18/10/2007, sesión 9, F
F: yo vi una cosa, el parámetro a lo puse en [-5, 5] para ver, una forma de la parábola así, pero traslada así, de no hacer el cambio así como se muestra, del lado derecho hace una función suave, no le mete así algo.

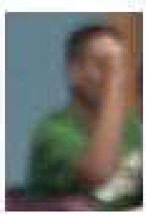



Figura 2: Imagen de un investigador en formación al momento de explicar

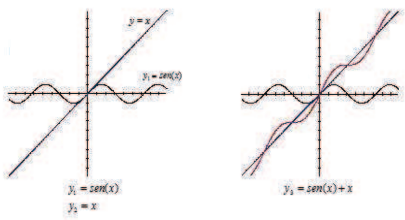
F: <u>la gráfica resultante se forma de esa manera, cuando la parábola se va haciendo hacia la derecha horizontalmente, la gráfica resultante pierde esa forma y agarra como una línea</u>.</td><td>CU: ACG, variación de parámetros


Figura 3: Gráfica de la función $y = sen(x) + x$

Extracto 4, 22/11/2007, sesión 13, D
D: La gráfica resultante de la operación suma se comporta como la función polinomial para valores grandes de x y, para valores en un intervalo alrededor del punto (0, f(0)) la función resultante toma la forma de la función seno.</td></tr>
</table>

Tabla 1 (parte 2): Producciones de los investigadores y categorías de uso asociadas

Etapa 1: Se consideran parejas de pares ordenados asociados a la función correspondiente. Los puntos se asociaron con características de las gráficas, tales como: cortes con los ejes, cambios de concavidad, puntos máximos o mínimos. Por ejemplo, en la situación 5 para bosquejar la gráfica de la función composición fue necesario ubicar puntos en el plano, según la definición analítica de la función composición, considerando cortes entre gráficas, intersecciones con los ejes, tal y como se observa en la figura 1.

Etapa 2: El análisis se realizó de tal forma, que se consideró el comportamiento global de la gráfica través de la determinación de patrones. Es decir, ahora los investigadores no observaban únicamente puntos, sino comportamientos, aunque aún asociados a puntos específicos de la gráfica, por ejemplo el vértice de la parábola, como se observa en la situación 6.

Etapa 3: El análisis de comportamiento se realiza considerando a la gráfica como un objeto susceptible de experimentar movimientos. Los investigadores implícita o explícitamente variaron los parámetros asociados a la estructura algebraica $f(x) = A[f(BX) + C] + D$. En el ejemplo de la tabla (situación 9), se varía el parámetro *a* de la expresión $y = x^3 + (x - a)^2$. Los investigadores en esta etapa logran visualizar el comportamiento tendencial de la función $y = x^3$, es decir, a qué se parece la gráfica cuando se le suma una función cuadrática. Los investigadores ya no centran la atención en puntos, sino en comportamientos de una gráfica con respecto a otra. El análisis se realiza en un intervalo alrededor del punto (0, *f*(0)).

Etapa 4: El análisis nuevamente se realiza mirando el comportamiento de una gráfica con respecto a otra, sin considerar la fijación en puntos, pero en esta etapa se determinan patrones de comportamiento para explicar y predecir la forma grafica de *una familia de funciones o de tipos de funciones*: polinomiales, racionales, trigonométricas, tal y como se observa en el extracto 4.

La integración de las cuatro etapas permitió analizar el comportamiento de las curvas asociadas a las funciones primero por partes y, luego como entidades completas dotadas de cierto significado.

Consideraciones finales

En esta investigación se analizó la producción sin intervenir en su proceso, pero considerando el escenario, el cual resultó *ad hoc* para la construcción de conocimiento matemático. El uso fue el elemento que permitió mirar las producciones de los investigadores en formación y evidenciarlas en términos del binomio graficación-visualización. Se dio muestra de cómo el uso de la función matemática se desarrolló y de cómo *evolucionó según las maneras de hacer de los investigadores en formación.*

El desarrollo del uso en un escenario específico puede mirarse como un mecanismo de construcción de conocimiento, al mismo tiempo que evidencia indicadores de conocimientos institucionalizados. Es decir, el desarrollo del uso deja ver un conjunto de elementos constantes, a pesar de las diferentes formaciones y lugares de procedencia de los investigadores. Por ejemplo, en la tabla anterior se observa que todos los investigadores sienten necesaria la graficación por punteo. Lo anterior, refiere a la presencia de conocimientos institucionalizados.

Referencias bibliográficas

Cantoral R. (2004). Desarrollo del pensamiento matemático y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática* 17 (pp. 1–9). México: Comité latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cordero F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México, D.F., México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione gráfica nell'insegnamento apprendimento della matemática. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(1), 59-79.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.