

LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL BACHILLERATO. RESULTADOS DE UN PROYECTO DE DESARROLLO DOCENTE

Silvia Elena Ibarra Olmos; Lorena Fernández Sesma
Universidad de Sonora. (México)

sibarra@gauss.mat.uson.mx; fesl670131@hotmail.com

Campo de investigación: pensamiento algebraico. Nivel educativo: medio

Palabras clave: registros de representación semiótica

Resumen

Se presenta un reporte sobre el diseño, experimentación y evaluación de una secuencia de actividades didácticas para la enseñanza de la función cuadrática en el primer año del bachillerato. Tomando como marco teórico los sistemas de representación semiótica de Raymond Duval, las actividades se diseñaron con el objetivo de promover en los estudiantes los reconocimientos, tratamientos y conversiones del objeto matemático seleccionado en los registros de representación gráfico, tabular y algebraico, empleando como mediador el lenguaje materno. La puesta en escena se trabajó bajo una estrategia de enseñanza que promoviera en el alumno un constante conflicto cognitivo que lo indujera al razonamiento, análisis y solución de situaciones problemáticas.

Antecedentes

Recientes evaluaciones en el ámbito nacional e internacional muestran que la educación matemática en nuestro país no está alcanzando sus metas. Como ejemplo de lo anterior tenemos los resultados publicados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), respecto a la prueba de matemáticas aplicada el 2004 en secundaria. Se encontró que un 51.1% de los alumnos no alcanzan a dominar satisfactoriamente los conocimientos y habilidades básicos que establecen los programas oficiales (Velasco 2006). Para dicha prueba, se definieron seis habilidades medibles relacionadas con la resolución de problemas: operar, medir, comunicar, imaginar, generalizar e inferir. La prueba fue de opción múltiple, y se aplicó un mismo examen a los tres grados de secundaria, ya que expertos del INEE consideraron que en los tres grados se imparten aspectos comunes de la disciplina (Martínez, 2004). En otra publicación del INEE, respecto a los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), aplicada el año 2003 a estudiantes de 15 años en 41 países, se encontró que México ocupó el lugar número 35 en la evaluación de matemáticas (Martínez, 2003).

En vista de lo anterior, consideramos que es necesario que se convierta en meta de investigación en matemática educativa la búsqueda de alternativas de enseñanza que propicien que nuestros estudiantes alcancen aprendizajes significativos, además de romper con los viejos paradigmas que señalan a la matemática como la disciplina más difícil y atemorizante que se enseña en las escuelas.

Por otro lado, consideramos que el desarrollo que Matemática Educativa tiene en el mundo, y particularmente en México, nos permite encontrar resultados potentes y atractivos, susceptibles de enriquecer el trabajo docente, como es el caso de la teoría de las representaciones semióticas.

Ubicando esta situación en el nivel educativo en el cual desarrollamos nuestra actividad profesional, decidimos desarrollar una propuesta de desarrollo docente que ofreciera una alternativa de enseñanza para la clase de matemáticas en el bachillerato. El objeto matemático

seleccionado fue el de las funciones cuadráticas, escogido por diversas razones; entre ellas está el de su amplia utilización en otras ramas del conocimiento.

Marco teórico

Establecemos que las estrategias de enseñanza para las matemáticas deben estar diseñadas con el propósito de promover en el estudiante un constante conflicto cognitivo que lo induzca al razonamiento, análisis y reflexión de situaciones, así como a la búsqueda y aplicación de estrategias que lo ayuden a solucionar situaciones problemáticas. La capacidad de tomar decisiones propias por parte del estudiante, y saber interpretar correctamente el significado de las soluciones obtenidas, debe ser otro objetivo en el diseño de estrategias de enseñanza.

Según las teorías de Raymond Duval (Duval, 1993), para cada objeto es posible definir distintos sistemas de signos y reglas que lo simbolizan y facilitan su comprensión y aprendizaje. Dichos sistemas se constituyen como representaciones semióticas del objeto, donde un conjunto de signos se identifican las como *unidades significantes* del sistema, mientras que las reglas que lo rigen ordenan las asociaciones entre que pueden realizarse los signos. Sin embargo, Duval puntualiza que no se debe confundir el objeto con sus representaciones, ya que esto a la larga puede convertirse en un obstáculo cognitivo para quienes lo estudian. Por el contrario, el saber diferenciar entre el objeto y sus representaciones se constituye como un punto estratégico para el aprendizaje, ya que las representaciones son necesarias tanto para fines de comunicación de los objetos, como para la actividad cognitiva del pensamiento que lleva a la comprensión de los mismos. Es decir, los procesos de la *Semiosis* (aprehensión o producción de una representación semiótica) y de la *Noesis* (aprehensión o construcción conceptual de un objeto) son inseparables.

Por otro lado, toda representación semiótica es parcialmente cognitiva respecto a lo que representa, por lo que la coordinación de varios registros de representación resulta fundamental para una asimilación conceptual de un objeto. Aún más, de acuerdo con lo establecido por Duval, para que un sistema semiótico pueda ser considerado como un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la *semiosis*, las cuales son:

1. La formación de una representación identificable como imagen de un registro dado
2. El tratamiento de una representación
3. La conversión de una representación

Así pues, la propuesta consiste, como ya se señaló antes, en una secuencia de actividades didácticas para la enseñanza de la función cuadrática, contemplando el estudio del objeto matemático en los sistemas de representación antes mencionados. Con lo anterior se pretende facilitar la observación global y la caracterización de objeto, además de permitir un mayor número de tratamientos que pueden realizarse dependiendo del tipo de representación en la cual esté siendo estudiado. Se tiene la convicción de que un alumno construye un conocimiento más completo de un objeto matemático, cuando es capaz de identificarlo, caracterizarlo y hacer tratamientos a dicho objeto en varios registros de representación semiótica, y aún más, cuando puede realizar conversiones del mismo de un registro de representación a otro.

Diseño y experimentación

La experimentación del proyecto se dividió en dos fases, un estudio piloto y la puesta en escena del diseño final de la secuencia didáctica. En ambas fases se trabajó con grupos de 15 de álgebra de primer año de bachillerato, organizados en equipos de a lo más cuatro personas y en sesiones de 50 minutos, utilizando un cuadernillo de trabajo con las actividades propuestas. La conducción del proceso de aprendizaje estuvo a cargo de una de las responsables del diseño, quien a su vez era la maestra titular del grupo.

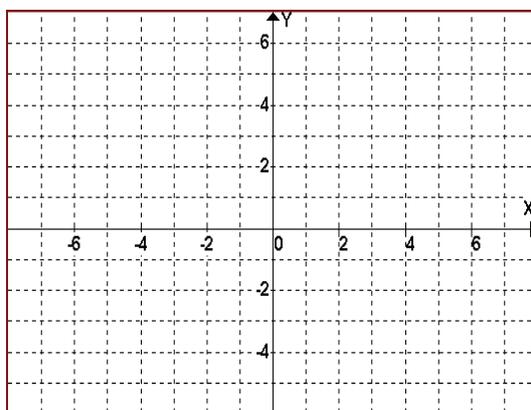
Con la intención de evaluar el grado de efectividad de nuestra secuencia como herramienta en la enseñanza de la función cuadrática, se diseñó un cuestionario con ocho actividades similares a las que se incluyeron en el diseño didáctico, las cuales debieron ser contestadas en forma individual por los alumnos a quienes no se impuso límite de tiempo para realizar la tarea. En el cuestionario se engloban los distintos contenidos y habilidades que se esperaba fueran desarrollados por los alumnos mediante las diferentes actividades.

Posteriormente se les realizó una entrevista en la que expusieron las estrategias que siguieron para ejecutar las tareas que les fueron planteadas vía el cuestionario; el propósito de las entrevistas fue profundizar en la información escrita con la que se contaba. Se llevó una bitácora del trabajo realizado por los estudiantes en cada sesión, así como de la evaluación y las entrevistas, mediante registros escritos y video grabados.

Algunas de actividades que se incluyeron en la secuencia didáctica y en el cuestionario de la evaluación, así como el tipo de conocimientos que se pretende enseñar mediante ellos, se presentan a continuación.

1. Te voy a pedir que utilices el siguiente plano cartesiano y traces las parábolas cuyas características describo a continuación:

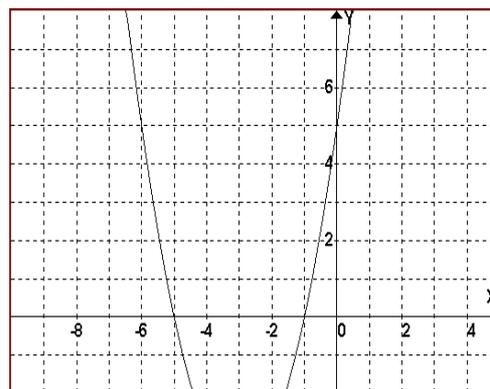
- A) La parábola 1 tiene su vértice en $(-3,4)$, su ordenada al origen en $(0,-5)$, y tiene dos intersecciones con el eje horizontal, una en $(-5,0)$ y la otra en $(-1,0)$.
- B) La parábola 2 tiene su vértice en el punto $(5,0)$, su ordenada al origen se encuentra en $(0,5)$ y tiene una intersección en el eje horizontal en $(5,0)$.
- C) La parábola 3 tiene su vértice en $(3,3)$, su ordenada al origen en $(0,4)$ y no tiene intersecciones con el eje horizontal.



Con esta actividad, se pretende examinar el desarrollo de *conocimientos disciplinarios*, en el alumno, es decir aquellos que están relacionados directamente con la matemática y que son necesarios para iniciar el estudio de la función cuadrática. Entre dichos contenidos se pueden mencionar, conocimiento de técnicas de factorización, productos notables, trazo y ubicación de puntos en el plano cartesiano, leyes de los signos, leyes de los exponentes y orden de los números de acuerdo con la recta numérica (enteros, fracciones comunes, decimales, positivos y negativos). Por supuesto en esta clasificación se incluye el conocimiento referente a la función que se estudiará mediante la secuencia de actividades.

Entre dichos conocimientos podemos mencionar:

1. Reconocimiento de la parábola como la gráfica de una función cuadrática,
 2. Construcción de la gráfica a partir de la identificación de algunos de sus puntos, principales, atendiendo las propiedades de concavidad y simetría de la parábola, y trazo de puntos en el plano cartesiano
2. Construye la expresión algebraica de la función representada por la gráfica en el siguiente plano cartesiano.



Con la actividad se pretende evaluar contenidos *disciplinarios* y *habilidades cognitivas* como los siguientes:

1. Se espera que los alumnos se vean en la necesidad de convertir la función del registro gráfico al tabular,
2. En el registro tabular, los alumnos se encontrarán con el problema de que no hay suficientes datos para realizar tratamientos, mediante el método de segundas diferencias para encontrar las coordenadas de los puntos que no contiene la gráfica y que son necesarios para encontrar la expresión algebraica.
3. Por lo tanto será necesario que el alumno entre en el terreno de las conjeturas y suponga los datos que le hacen falta. Específicamente se tienen que suponer las coordenadas del vértice y los puntos anterior y posterior a él,
4. Una vez propuestos los puntos que hacen falta, se espera que se realice la conversión del registro tabular al algebraico.
5. En el registro algebraico será necesario realizar tratamientos a la expresión simbólica para encontrar el parámetro “ a ” y finalmente obtener la expresión canónica de la función.
6. Por último se espera que los alumnos comprueben que tanto los datos supuestos, como la expresión algebraica encontrada, son correctos.

Reflexiones finales

Del análisis realizado con los registros escritos por los equipos de estudiantes en los cuadernillos de trabajo, así como de las video grabaciones de las sesiones de clases y de las entrevistas individuales, se concluyó que los alumnos afrontaron la secuencia de actividades poniendo en juego sus conocimientos y habilidades, hasta lograr la institucionalización local del nuevo conocimiento que iban construyendo. Con esta forma de trabajo se observó en los estudiantes una mayor confianza al exponer sus ideas ante grupos pequeños de compañeros, además favoreció la cooperación entre los integrantes de los equipos durante la ejecución de las tareas. También se observó una mayor disponibilidad por parte de los estudiantes a defender las conclusiones a las que habían llegado con sus equipos de trabajo, cuando se realizaban discusiones grupales para institucionalizar el conocimiento estudiado.

La actuación de los equipos participantes en general fue buena, al demostrar capacidad para realizar tratamientos a la función cuadrática en los distintos registros de representación.

Además de utilizar satisfactoriamente el conocimiento de diversos contenidos básicos del álgebra, como herramientas en la resolución de las actividades de la secuencia.

En lo que respecta a los procesos de conversión entre distintos registros de representación, se llevaron a cabo eficientemente siempre y cuando en cada registro de salida existiera la información necesaria para realizar dichas transformaciones. Es decir, en el registro de salida, debían estar presentes todas las unidades significantes que aprendieron a correlacionar con las unidades significantes del registro de llegada. En caso de faltar alguna de dichas unidades, el proceso de conversión entre registros no se llevó a cabo por algunos equipos.

Se encontró que nuestro diseño potenció en los alumnos la caracterización del objeto matemático en los registros de representación gráfico, tabular y algebraico, logrando una buena identificación de las unidades significantes de cada registro, así como una buena relación de las mismas al momento de llevar a cabo tratamientos internos a la función.

Algunos estudiantes no sólo realizaron tratamientos con el propósito de responder lo que les pedían algunas actividades, también los utilizaron como herramientas para la obtención de datos que no incluían las actividades que resolvieron y que les eran necesarios para lograr la resolución de las mismas. Estos estudiantes también realizaron tratamientos para validar sus propios resultados y los datos que habían supuesto cuando trabajaron con las actividades del cuestionario de evaluación.

Otro aspecto que es importante destacar es el hecho de que los estudiantes, pusieron en igualdad de importancia el aprendizaje de las tres formas de representación de la cuadrática y no se enfocaron hacia la representación algebraica de la función como sucede en las clases tradicionales.

Observaciones como las anteriores nos hacen tener una actitud positiva respecto a la posibilidad de continuar con esta línea de trabajo, profundizando en lo que ya se ha hecho y retomando otros contenidos matemáticos del álgebra en el bachillerato.

Referencias bibliográficas

- Bagni, G. (2004). Una secuencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 07 (1), 5 -23.
- Duval, R. (1993). Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives*. (pp. 37 –65). Strasbourg, France: IREM.
- Duval, R. (1999) *Semiosis y el Pensamiento humano. Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.
- Velasco J. M. (2006). *Instituto Nacional para Evaluación de la Educación*. [Documento de www]. URL <http://www.inee.edu.mx/>
- Martínez F. (2004) *¿Qué resultados obtuvieron las entidades federativas en las pruebas nacionales de comprensión lectora y matemáticas?* [Documento de www] URL <http://multimedia.ilce.edu.mx/inee/publicaciones1.2htm>
- Martínez F. (2003). *Resultado de la prueba PISA, elementos para su interpretación*. [Documento de www] URL: <http://multimedia.ilce.edu.mx/inee/pdlf/pisaplus.pdf>
- Segura, S. M. (2004). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una Secuencia Didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 07 (1), 49-78.