RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ANTIGUOS QUE INVOLUCRAN AL TEOREMA DE PITÁGORAS

Mario Dalcín, Mónica Olave
Instituto de Profesores Artigas. (Uruguay)
filomate@adinet.com.uy, matemoni@adinet.com.uy
Campo de investigación: formación de profesores, pensamiento geométrico. Nivel educativo: superior
Palabras clave: problemas, teorema de Pitágoras

Resumen
Se comparan la forma original de resolución y las resoluciones dadas por estudiantes de primer año de profesorado de matemática a problemas pertenecientes a distintas culturas antiguas (babilónica, egipcia, china, hindú, árabe) cuya resolución implica el conocimiento de la relación pitagórica.

Introducción

La relación entre los lados de un triángulo rectángulo aparece entre los primeros resultados matemáticos de distintos pueblos. No hay pruebas de que las culturas antiguas –babilónica, egipcia, china, hindú, árabe– conocieran una demostración deductiva del teorema de Pitágoras salvo para algunos casos particulares como el del triángulo rectángulo isósceles o el de lados 3, 4 y 5. El desconocimiento de una demostración que abarcara a todos los triángulos rectángulos no impidió que el resultado fuera usado para plantear y resolver problemas del más variado tipo.

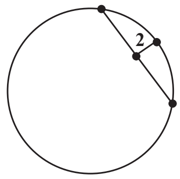
Objetivos y método de trabajo

Los problemas antiguos que implican un conocimiento del teorema de Pitágoras por parte de las culturas que los plantearon y resolvieron, están enunciados y resueltos con valores específicos. Planteamos algunos de dichos problemas a dieciocho estudiantes de primer año del profesorado de matemática del Instituto de Profesores Artigas (18 – 20 años) buscando por un lado conocer las estrategias de resolución de los mismos por parte de los estudiantes, y por otro dar a conocer los procedimientos y herramientas usados originalmente por las culturas que plantearon los problemas. La dinámica de trabajo fue la siguiente: se trabajó en grupos de no más de cinco integrantes que deberían discutir las tareas propuestas, llegar a un consenso y entregar un reporte de común acuerdo. Esto permitirá que los estudiantes expresen lo que piensan acerca de la forma de resolución de los problemas, que refuten la opinión de sus compañeros con sus argumentos lo que permite el desarrollo del pensamiento en general y particularmente el pensamiento matemático. Esto puede favorecer el desarrollo del pensamiento crítico ya que permite que se den alternativas de solución a algún problema y que argumentando en base a ello se favorezca el desarrollo intelectual de los estudiantes. El favorecer la diversidad de miradas que pueden hacerse de los conocimientos y sus relaciones con los conocimientos previos, lleva a que los conocimientos adquiridos con anterioridad puedan ir formando cierta estructura conceptual cada vez más robusta y funcional.
Se propone un problema y se les solicita que, una vez resuelto, expliciten los conocimientos y herramientas que utilizaron en su resolución. Una vez culminada esta etapa, se les presenta la solución dada por quienes plantearon el problema originalmente y se les pide que interpreten

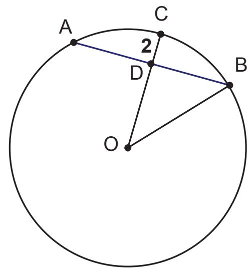
dicha solución y que identifiquen conocimientos y herramientas supuestamente utilizadas de acuerdo a la interpretación realizada.
Se hace una puesta en común en donde se presentan y comparan las conclusiones de los diferentes grupos en torno a sus propias resoluciones así como a las resoluciones dadas por los antiguos. De las seis actividades trabajadas se reportan las actividades 1 y 3.

La experiencia

Actividad 1
El primer problema planteado, que figura en una tablilla babilónica de alrededor de 2600 años a. C., dice:
Sesenta es la circunferencia, dos es la flecha.
Hallar la cuerda.



La totalidad de los equipos, luego de discutir y asumir que la flecha es perpendicular a la cuerda en su punto medio, halla en primer lugar el diámetro de la circunferencia, luego el radio, la distancia del centro de la circunferencia al punto medio de la cuerda y por último usan el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos cuyos vértices son: el centro de la circunferencia, un extremo de la cuerda y el punto medio de la cuerda.
A grandes rasgos, los cálculos realizados fueron:



diámetro = $60 / \pi = 60 / 3,14 = 19,10$.
radio = 9,55
DO = 7,55
DB = $\sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{9,55^2 - 7,55^2} =$
$= \sqrt{91,20 - 57,06} = \sqrt{34,12} = 5,84$
AB = 2.DB = 11,68.
Las propiedades que reconocen haber aplicado:

- Relación entre el diámetro y la circunferencia
- La perpendicular a una cuerda por su punto medio pasa por el centro de la circunferencia
- El teorema de Pitágoras

Junto al problema en la tablilla babilónica figura la forma de resolverlo:
El doble de dos es cuatro. Quite cuatro a veinte, obtiene dieciséis. El cuadrado de veinte es cuatrocientos; el cuadrado de dieciséis es doscientos cincuenta y seis. Quite doscientos cincuenta y seis de cuatrocientos: obtiene ciento cuarenta y cuatro. Halle la raíz cuadrada de ciento cuarenta y cuatro. Doce, la raíz cuadrada, es la cuerda.
Tal es el procedimiento.
Todos los equipos interpretaron que se estaba trabajando en un triángulo rectángulo de hipotenusa 20 y un cateto 16, pero en general al no reconocer de dónde provenía el 20 no supieron como relacionarlo con la restante información. Sólo uno de los grupos, uno de cuyos integrantes sabía que en algunas culturas antiguas se usaba 3 como valor de pi, interpretó el 20 como diámetro de la circunferencia y pudo interpretar la solución dada por los babilonios

Una de las preguntas que surgió fue la de ¿cómo interpretar la diferencia entre el resultado obtenido por ellos (11,68) y la respuesta babilónica (12)?
La explicación estuvo a cargo del grupo antes mencionado: los babilonios, como algunos otros pueblos, utilizaron para π el valor aproximado 3. Por lo tanto si “sesenta es la circunferencia” el veinte que aparece en la resolución del problema puede ser el diámetro.
Otra interrogante: ¿Cómo interpretar el dieciséis, que se obtiene de restar cuatro? El mismo grupo explica que posiblemente razones de simetría los hayan llevado a obtener la figura que indican y de allí, utilizando la relación que liga a los lados de un triángulo rectángulo, se siga que la longitud de la cuerda buscada se obtenga mediante

Longitud de la cuerda = $\sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$

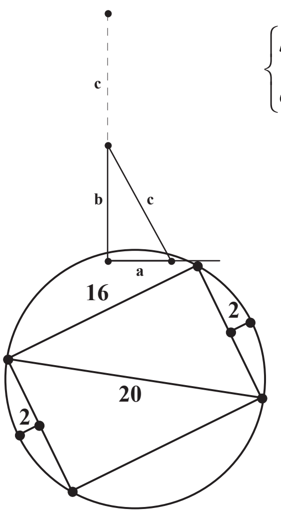
que coincide con los pasos indicados en la tablilla.
Aceptando esta interpretación, ¿qué propiedades reconocían los babilónicos?

- ♦ Que ángulos inscriptos en una semicircunferencia son rectos.
- ♦ Congruencia de los dos triángulos simétricos.
- ♦ Teorema de Pitágoras en el caso del triángulo 12, 16, 20, variante del triángulo de lados 3, 4, 5.

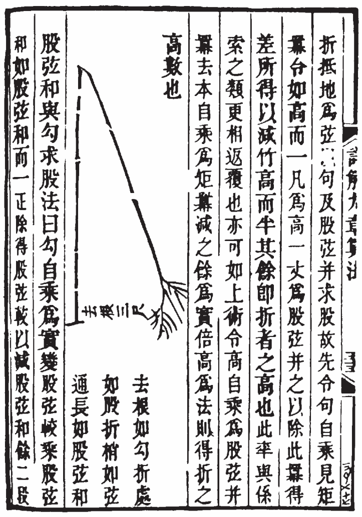
Actividad 3

En *Aritmética en Nueve Secciones*, libro chino del siglo II a. C. que tuvo una importancia considerable para el desarrollo de la matemática china aparece el siguiente problema (citado en Eves, 1995):

Hay un bambú de 10 chih de alto, cuyo extremo superior al romperse toca el suelo a 3 chih de la base del tronco.
¿A qué altura se produjo la rotura?
Todos los grupos pudieron resolver el problema salvo uno de ellos, que si bien planteó un sistema de ecuaciones no lo pudo resolver por no ser este lineal.



$$\begin{cases} b + c = 10 \\ c^2 = b^2 + 9 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{91}{20}$$


折抵地爲弦以句及股弦并求股故先令句自乘見矩
冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此冪得
差所得以減竹高而半其餘即折者之高也此率與係
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折之
高數也
去根三尺
去根如勾折處
如股折梢如弦
通長如股弦和
股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實幷股弦較乘股弦
和如股弦和而一正除得股弦較以減股弦和餘二段

La solución que acompaña al problema chino es la siguiente:
Tomar el cuadrado de la distancia desde la base del bambú hasta el punto en el que su parte superior toca el suelo, y dividir esa cantidad por la longitud del bambú. Restar el resultado de la longitud del bambú y dividir por 2 la diferencia que se obtiene. Esto nos da la altura de la rotura.
Al momento de comparar el resultado que habían obtenido con el dado por los chinos se dieron cuenta que la solución dada por estos no solo hacía referencia al caso particular sino a una situación más general que luego de una serie de idas y vueltas vieron que podría expresarse como:

$$b = \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{a^2}{b + c}\right)$$

Lo primero que hicieron todos los grupos fue verificar si la solución china coincidía con la obtenida previamente por ellos.
Para los valores del problema b + c = 10 y a = 3, de donde $b = \frac{1}{2}\left(10 - \frac{9}{10}\right) = \frac{91}{20}$.
Ante la pregunta por parte de los docentes acerca de si la solución china al problema era válida para otros valores, la mayoría de los estudiantes manifiestan que sí basándose en que fue correcta para los valores del problema. Hacen una extensión inductiva basándose en un solo caso. Se les hace notar el tipo de razonamiento que habían empleado y se les plantea buscar algún fundamento matemático para la solución general china.
Las explicaciones que se obtuvieron por parte de los equipos fueron las siguientes:
i) Generalizaron a partir de lo trabajado por ellos en el caso particular de la siguiente manera:

$a^2 + b^2 = c^2$
$b + c = k \quad \rightarrow \quad c = k - b$

$a^2 + b^2 = (k - b)^2$
$a^2 + b^2 = k^2 - 2kb + b^2$

$$b = \frac{k^2 - a^2}{2k}$$

$$b = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2(b + c)}$$

$$b = \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{a^2}{b + c}\right)$$

ii) Transforman algebraicamente la solución china, lo que los llevó a la relación pitagórica.

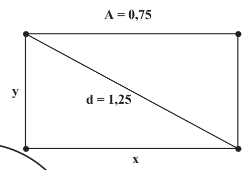
$$b = \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{a^2}{b + c}\right)$$

$2b(b + c) = (b + c)^2 - a^2$

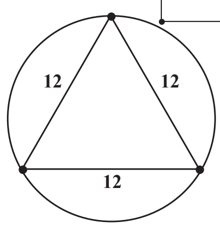
$2b^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$
$b^2 + a^2 = c^2$

Otros problemas trabajados

Un pavo real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero de culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el pavo real se lanza sobre ella en línea recta mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el pavo real captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos codos de distancia del agujero se produjo la captura?
(Problema indio) (Gheverghese, 1996)
Hallar la longitud y la anchura de la figura (rectángulo), dadas su área 0,75 y diagonal 1,25.
(Problema babilonio cercano al 1000 a. C.) (Perero, 1994)



Hallar el área de un círculo que circunscribe un triángulo equilátero de lado 12.
(Problema egipcio de aproximadamente el año 150 d. C.) (Boyer, 1986)



A ambas orillas de un río hay dos árboles, uno frente al otro. Uno de los árboles tienen una altura de 20 codos, el otro de 30 codos. La distancia entre sus troncos es de 50 codos. En la cima de cada árbol hay un pájaro. De pronto, los dos pájaros ven un pez que aparece en la superficie del agua entre los dos árboles y se lanzan para alcanzarlo. Lo alcanzan al mismo tiempo.
¿A qué distancia del tronco de los árboles apareció el pez?
(Problema árabe) (Perero, 1994)

A modo de reflexión final

Los problemas aquí reportados así como sus resoluciones muestran que es posible enfrentar a los estudiantes a problemas tomados de la historia de la matemática. Su resolución habilitó la discusión acerca de la diversidad de procedimientos –actuales como antiguos–, así como de conocimientos puestos en juego en cada resolución. Al comparar los distintos métodos de resolución y las formas de transmitirlos se pudo redimensionar las herramientas algebraicas disponibles hoy en día frente a la forma retórica en que aparecen las soluciones de muchos problemas antiguos. También sirvió para tomar conciencia de cómo las formas de validar resultados matemáticos ha ido cambiando a través del tiempo: lo que hoy puede ser mirado como un argumento no riguroso, fue aceptado por otras culturas como tal. Esta visión puede ayudar al estudiante de profesorado de matemática a entender sus propias dificultades al momento de decidir cuando un argumento matemático es válido. La tarea de interpretar las producciones de los antiguos contribuye a la futura labor docente de interpretación de las producciones de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Aaboe, A. (1984). *Episódios da história antiga da matemática*. Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas I*. México: Siglo XXI.

CONICET (1986). *Geometría. Su enseñanza*. Argentina: Prociencia-Conicet.

Dunham, W. (1995). *El universo de las matemáticas*. España: Pirámide.

Eves, H. (1985). *Estudio de las Geometrías*. Tomo 1. México: Uteha.

Eves, H. (1995). *Introducáo á História da Matemática*. Brasil: Editora da Unicamp.

Fernández Fernández, S. (2001). La historia de las matemáticas en el aula. *UNO*, nº 26, Historia de las matemáticas, págs. 9-27.

Gheverghese, G. (1996). La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas. España: Pirámide.

Mankiewicz, R. (2000). Historia de las matemáticas. Argentina: Paidós.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática*. Volumen 1. España: Gedisa.

Swetz, F. (1995). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. En F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson y V. Katz (Eds.), *Learn from the masters*, págs. 25-38.