

DESARROLLO EN ESPAÑA DE LOS ESTUDIOS DE DOCTORADO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Luis Rico
Universidad de Granada

Introducción

El presente trabajo muestra la situación actual de los estudios de doctorado en Didáctica de la Matemática en la universidad española, que han experimentado un desarrollo considerable desde sus comienzos en la década de los 80. El trabajo presenta las condiciones generales y el proceso legal que hay que seguir para la realización de una tesis doctoral en España. Este proceso se ejemplifica con el programa de doctorado de la Universidad de Granada.

El estudio también describe los diversos ámbitos de investigación en educación matemática, las componentes generales de una tesis y los momentos relevantes en su proceso de realización. Esta descripción se complementa con la presentación de una serie de criterios y recomendaciones para orientar a los estudiantes de doctorado en Didáctica de la Matemática. Finalmente, se enumeran criterios para evaluar una tesis doctoral y se hace un balance de la producción reciente de los grupos de investigación y tesis de doctorado realizadas en España.

1. Marco institucional

1.1 Didáctica de la Matemática en la Universidad Española.

En la década de los 60 el interés por las matemáticas experimenta en España un incremento considerable. En estos años se crean nuevas Facultades para promocionar el estudio de las matemáticas en todo el país, que superan el reducto tradicional de las universidades de Barcelona, Madrid y Zaragoza. También a comienzos de los 70, por motivo de diversos cambios legales, los nuevos Institutos de Ciencias de la Educación impulsan la investigación educativa en la universidad.

En este contexto innovador la disciplina Didáctica de la Matemática se incorpora a la universidad española en la década de los 70. Asignaturas de Didáctica de la Matemática se imparten en cursos de formación inicial de Profesores de Educación General Básica (Ciclo 6 a 14 años) y en algunas Licenciaturas de Matemáticas.

A partir de los 70 comienzan a trabajar grupos de investigación españoles en la universidad. No obstante, las condiciones institucionales son restrictivas y dificultan el desarrollo de la Didáctica de la Matemática hasta avanzada la década de los 80.

En 1984 se produce una reorganización académica y administrativa de la universidad española, por medio de la nueva Ley de Reforma Universitaria. La dimensión académica contempla diversas áreas de conocimiento. Un área de conocimiento viene determinada por la homogeneidad de su objeto de estudio, por la identificación de sus problemas, por su campo de aplicaciones, por la existencia de una tradición histórica y por la realidad de grupos profesionales que encuentran tales problemas en la realización de su actividad profesional y aplican a ellos las soluciones estudiadas; la existencia de una comunidad investigadora internacional es un referente adecuado. La administración establece legalmente las áreas de conocimiento universitarias (Real Decreto 1888/84, BOE 26-10-84). A partir de esta fecha, la Didáctica de la Matemática es un área de conocimiento en España (Rico y Sierra, 1994).

La dimensión administrativa organiza la universidad en Departamentos, cada uno de ellos especializado en un área de conocimiento determinada, o en varias afines, y

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

capaz de atender sus necesidades docentes e investigadoras. En algunas universidades españolas (Granada, Madrid, Valencia y Sevilla) se constituye un Departamento de Didáctica de la Matemática singular. En otras universidades los especialistas en Didáctica de la Matemática se integran en Departamentos de Didáctica mixtos, junto con expertos de otras didácticas especiales, o bien en Departamentos de Matemáticas con otros especialistas en matemáticas. En cada caso este agrupamiento se hace en función de la tradición local y de las relaciones previas con colegas de otras materias.

Los actuales departamentos universitarios de Didáctica de la Matemática inician sus tareas a mediados de los 80, y tienen entre sus competencias:

- * Delimitar un campo disciplinar o Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática.

- * Organizar y desarrollar la investigación y las enseñanzas propias del Área de Didáctica de la Matemática en cada Universidad.

- * Proporcionar marco legal y estructura administrativa al grupo de profesores e investigadores universitarios que orientan su actividad profesional hacia la educación matemática.

- * Realizar la formación inicial en Didáctica de la Matemática de los Profesores de Educación Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria.

- * Iniciar y sostener la formación de investigadores en Didáctica de la Matemática mediante un Programa de Doctorado.

Uno de los logros derivados de la nueva situación que se inicia en el año 1984 ha sido la organización y desarrollo de Programas de Doctorado específicos en Didáctica de la Matemática (Rico, 1999). Pasamos a resumir la normativa general que regula los estudios de doctorado.

1.2 Estudios de doctorado.

Para realizar estudios de doctorado en España es necesario estar en posesión de una titulación de segundo ciclo: Licenciado, Arquitecto o Ingeniero. Es por ello que los estudios de doctorado en la universidad española se conocen con el nombre genérico de *estudios de tercer ciclo*. Dentro de los estudios de postgrado el tercer ciclo es la vía para obtener el título de doctor. Los estudios de tercer ciclo están regulados oficialmente por el Real Decreto 778/1998 (BOE 1-5-98) y el título de doctor es común a todas las universidades españolas.

Los estudios de doctorado plantean cuatro grandes objetivos:

- * Disponer de un marco adecuado para la consecución y transmisión de los avances científicos.

- * Formar nuevos investigadores y preparar equipos que puedan afrontar con éxito el reto que suponen las nuevas ciencias, técnicas y metodologías.

- * Impulsar la formación de nuevo profesorado.

- * Perfeccionar el desarrollo profesional y científico de los titulados superiores.

El sistema español de formación de investigadores para las distintas disciplinas no dispone de titulaciones intermedias entre la licenciatura y el doctorado, como es el caso de las maestrías en otros países. El plan común de formación inicial de investigadores se concreta para cada área de conocimiento en un Programa de Doctorado, preparación necesaria para realizar la tesis doctoral en esa disciplina.

El Programa de Doctorado consta de unos cursos y de un trabajo de iniciación a la investigación, programa que se actualiza cada dos años. El objetivo de los estudios de tercer ciclo es preparar para la realización de la tesis doctoral.

El Programa desempeña funciones importantes en el aprendizaje de ciencias y técnicas especializadas y, por tanto, para la formación de investigadores en un campo de conocimiento concreto.

Para cursar estudios de doctorado las universidades españolas abren plazo de preinscripción anual, usualmente en el mes de septiembre. Las solicitudes se presentan en los departamentos respectivos donde se valoran según baremos establecidos por cada universidad, se hace una selección de solicitantes y se publica la lista con los alumnos admitidos. Los estudiantes que solicitan inscripción en los Programas de Doctorado de Didáctica de la Matemática son, en su mayoría, licenciados en matemáticas; en algunos casos son licenciados en física o en pedagogía, pero con experiencia previa en educación matemática. También son frecuentes solicitantes latinoamericanos con licenciatura de profesor de matemáticas. Para la admisión en el programa es condición prioritaria la vinculación y experiencia previa sobre educación matemática.

En el momento de su inscripción se asigna un Profesor Tutor a cada uno de los alumnos admitidos a un programa de doctorado, quien se responsabiliza de sus estudios y trabajos de investigación y le ayuda en lo relativo a su realización.

Las normas reguladoras establecen que los programas de doctorado deberán comprender:

- a) Cursos o Seminarios sobre contenidos fundamentales del campo científico, técnico o artístico a los que esté dedicado el Programa de Doctorado.
- b) Cursos o Seminarios de metodología y formación en técnicas de investigación.
- c) Trabajos de investigación tutelados.
- d) Cursos o Seminarios sobre campos afines al Programa y que sean de interés para el proyecto de tesis doctoral del doctorando, por un máximo de 5 créditos.

El plan de formación de cada Programa tiene dos periodos diferenciados. Un primer periodo de docencia, en el que cada estudiante tiene que realizar una serie de cursos que completen un mínimo de 20 créditos (cada crédito corresponde a 10 horas de clase) y donde cada curso ha de tener un mínimo de 3 créditos. Este periodo de docencia es de formación conceptual y puede realizarse en uno o dos años académicos. A su término da lugar a un Certificado que acredita que el interesado ha superado el periodo de docencia del tercer ciclo. Este Certificado es homologable en todas las universidades españolas e incluye una valoración global cuantitativa.

La oferta de docencia de cada Departamento se concreta en una serie de cursos, obligatorios u optativos, de entre los cuales cada alumno selecciona su opción formativa, ayudado por su tutor.

El segundo periodo se denomina de investigación; durante este periodo cada estudiante deberá completar un mínimo de 12 créditos, mediante la realización en el Departamento de uno o varios trabajos de investigación tutelados por un profesor del programa. Antes de comenzar el segundo periodo del Programa es necesario haber concluido el primero. Al finalizar el segundo periodo se valorará la capacidad investigadora del estudiante.

Al concluir los periodos de docencia e investigación, con un mínimo de 32 créditos superados, un Tribunal evaluará en sesión pública los conocimientos adquiridos por el doctorando en el Programa. Esta evaluación certificará, en su caso, la suficiencia investigadora del doctorando. La obtención de la suficiencia investigadora es condición previa necesaria para la presentación y defensa de la tesis. Los estudios de tercer ciclo constituyen la preparación necesaria para realizar la tesis y su duración mínima es de dos cursos académicos.

Concluidos los estudios del programa de tercer ciclo, el doctorando ha de presentar en el Departamento un proyecto de tesis doctoral avalado por quien vaya a ser su director, o directores. El Director de la Tesis puede coincidir, o no, con el Tutor. El compromiso para la dirección de la tesis se realiza, usualmente, cuando ha transcurrido

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

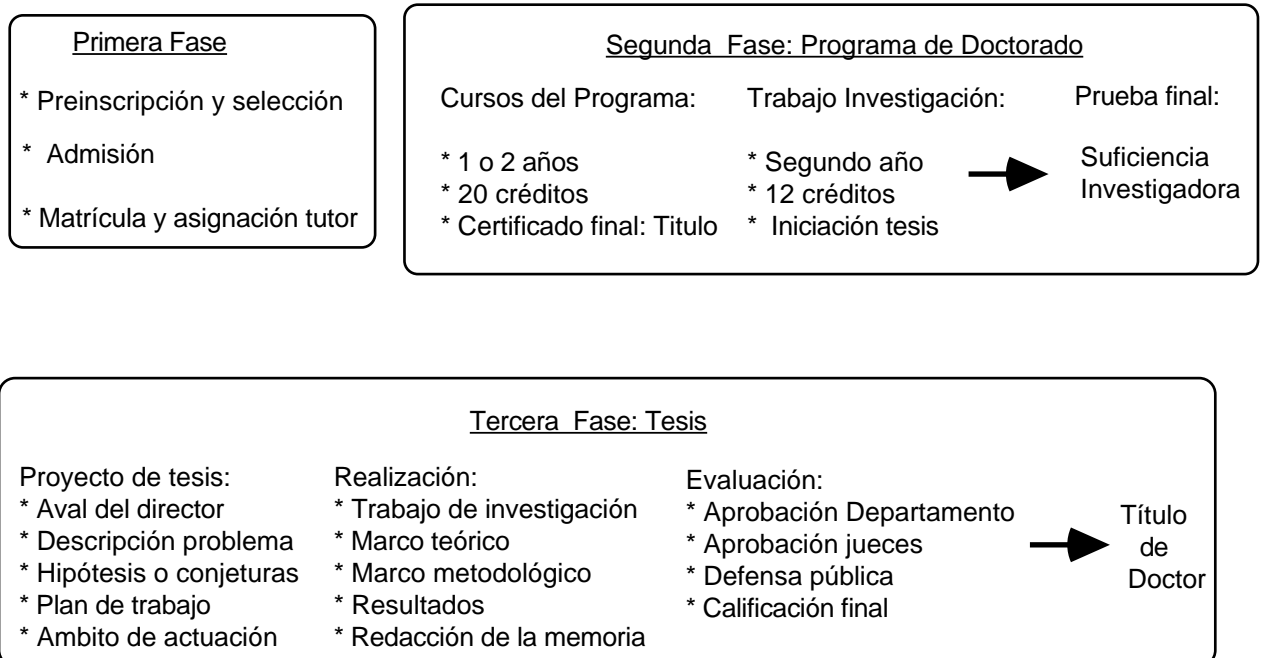
parte del Programa y se formaliza con la aprobación del Proyecto de Tesis Doctoral por el Departamento. Este compromiso formal se articula en función de las líneas de investigación existentes en cada Departamento y de los intereses científicos de los doctorandos. Las líneas de investigación permiten aprovechar los recursos limitados de personal, tiempo y materiales y facilita el trabajo en equipo, imprescindible para este tipo de investigaciones.

La tesis consiste en un trabajo de investigación original, realizado por el doctorando bajo la supervisión de su director y sobre una materia relacionada con la Didáctica de la Matemática. La tesis se concreta en la elaboración por el doctorando de una memoria de investigación, que debe venir avalada por el director o directores de la tesis y su tramitación debe estar aprobada por el Departamento.

La memoria de investigación se remite a la Comisión de Doctorado quien, durante un plazo que fija la universidad, la propone a evaluación pública en la comunidad universitaria; en este periodo de tiempo cualquier doctor puede presentar alegaciones, propuestas de cambio o plantear, razonadamente, su modificación. También se remite un ejemplar de la tesis a cada uno de los cinco miembros del jurado que la han de evaluar; el director de la tesis no forma parte de este jurado. Transcurrido el plazo de 30 días sin ningún informe desfavorable, se procede a la defensa de la tesis ante los miembros del jurado en un acto público, que concluye con la calificación final del trabajo y la obtención del título de doctor.

El título de doctor lo expide el Estado Español y es válido para todo el país. El título de doctor, en cada caso, coincide con el de la licenciatura de su autor si bien lleva la indicación del programa de doctorado en que se ha realizado.

Resumiendo las fases principales de este proceso, tenemos un cuadro con la secuencia general que se ha de seguir para obtener el título de doctor en España:



Desde una perspectiva mas global, podemos considerar que las dos primeras fases del proceso anterior equivalen al título de maestría que hay en otros países. previo a la tesis doctoral.

1.3 Doctorado en Didáctica de la Matemática

En el curso 1988-89 se inician Programas de Doctorado de Didáctica de la

Matemática en las universidades Autónoma de Barcelona, Granada y Valencia, por vez primera en España. De entonces acá otras universidades españolas han incorporado, total o parcialmente, ofertas de Didáctica de la Matemática en sus programas de doctorado. Destacamos las universidades de Almería, Autónoma de Barcelona, Extremadura, Granada, Huelva, La Laguna, Málaga, Sevilla, Valencia y Valladolid. Las universidades españolas abren cada dos años la inscripción para cursar estos estudios. La información de la oferta de las distintas universidades que imparten estos programas, su periodicidad y estructura pueden encontrarse en la red, en la página web de cada universidad.

Los programas de doctorado han supuesto la institucionalización de las tesis en Didáctica de la Matemática y la promoción académica de los profesores adscritos a este área de conocimiento. Aquellas universidades que imparten un programa de doctorado sobre Didáctica de la Matemática son, con carácter general, las que contribuyen con regularidad a la investigación que se hace en España.

Los Departamentos diseñan los cursos para la formación inicial de investigadores. En el caso de la Didáctica de la Matemática la formación teórica previa con la que la mayor parte de los estudiantes acceden a los estudios de doctorado es muy escasa y, casi siempre, está vinculada al ejercicio profesional y práctico. Por ello, la formación que se adquiere durante el programa de Doctorado es esencial para la realización de una tesis en este campo de conocimiento.

Los programas de doctorado españoles en Didáctica de la Matemática han estado orientados por los siguientes objetivos generales:

- * Establecer y mantener un espacio de crítica, debate y comunicación sobre el estado actual y desarrollo reciente de la investigación en el Área de Didáctica de la Matemática, así como de sus avances teóricos y metodológicos.

- * Impulsar la delimitación de problemas relevantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para su estudio exhaustivo y sistemático, que permita obtener información significativa para su diagnóstico y tratamiento y dé lugar a materiales y recursos adecuados para el aula de matemáticas.

- * Constituir grupos de investigación estables, que trabajen metódica, sistemática y continuamente sobre líneas específicas de investigación en Didáctica de la Matemática, que sirvan de referencia para los especialistas y estén conectados con la comunidad investigadora internacional.

- * Producir investigación propia cualificada, que suponga aportaciones específicas y originales a las cuestiones de indagación prioritarias en el Área de Conocimiento, y presentar regularmente los resultados obtenidos en los foros y medios de comunicación de la comunidad de investigadores de Didáctica de la Matemática.

Los programas de doctorado han supuesto un impulso considerable y sostenido a la investigación española en Didáctica de la Matemática. La consolidación de estos programas permite disponer de un marco adecuado para la consecución y transmisión de los avances científicos en Didáctica de la Matemática, con la participación de investigadores cualificados de otros países en la orientación, asesoramiento y evaluación de las tesis. También han impulsado las relaciones entre investigadores de distintas líneas y de diferentes universidades. Mediante estos programas se han formado nuevos investigadores y se han consolidado equipos de investigación, que han presentado proyectos en concursos y convocatorias públicas regionales, nacionales e internacionales. Los programas han impulsado la formación de nuevo profesorado universitario y contribuyen al desarrollo profesional y científico de los titulados superiores.

2. Investigación y Didáctica de la Matemática

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

2.1 Educación matemática

En las sociedades contemporáneas las matemáticas son parte esencial de la formación básica que han de compartir todos sus miembros. Por esto tiene sentido hablar de educación matemática, ya que se trata de una actividad social clave para la formación de los ciudadanos en una sociedad democrática avanzada.

El sistema convencional de enseñanza de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje son parte relevante de la educación. La educación matemática abarca desde las primeras nociones sobre la cantidad, la forma y la deducción que enseñamos a nuestros niños hasta su culminación en una formación profesional o en estudios superiores.

La educación matemática implica una actividad intelectual intensa de carácter explicativo, que se sostiene sobre el aprecio por la belleza formal, las nociones de prueba y argumentación, y que se expresa mediante una gran variedad de acciones, términos, símbolos, técnicas, actitudes y recursos. Las matemáticas son una construcción humana que se utiliza con fines técnicos para la modelización de nuestro entorno y se aplica en la resolución de problemas prácticos (Rico, 1995).

La educación matemática abarca el dominio de conceptos y procedimientos para comunicar conocimientos y organizar grandes parcelas de la actividad intelectual, científica, económica, cultural y social. Las matemáticas son el lenguaje de la ciencia y dan forma objetiva a multitud de problemas, permitiendo una crítica racional previa a la toma de decisiones (Skovmose, 1994).

Desde la perspectiva del especialista, consideramos la educación matemática como un conjunto ideas, conocimientos y procesos implicados en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tienen lugar con carácter intencional. La educación matemática la llevan a cabo determinados profesionales en unas instituciones y mediante unas tareas; en todos los casos se proponen dar respuesta a problemas y necesidades derivados de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Rico, Sierra y Castro, 1999).

2.2 Educación matemática e Investigación

Con carácter general, por investigación entendemos la actividad de indagación basada en el método científico, sostenida por un marco epistemológico y orientada a la transformación del medio humano.

El objeto de estudio y trabajo de la investigación en educación matemática se encuentra, principalmente, en los problemas que se detectan y surgen en sus tres campos de actuación: diseño, desarrollo y evaluación del currículo, conocimiento profesional y formación del profesor, y fundamentación epistémica y elaboración teórica. La investigación en educación matemática selecciona sus problemas en estos ámbitos y se atiene a las condiciones propias de la investigación educativa: indagación sistemática en un marco epistémico y con intención transformadora del medio educativo.

En términos generales sostenemos que se pueden distinguir tres sentidos distintos en educación matemática, cada uno de los cuales establece un campo diferente de actuación y un ámbito para la investigación.

* En primer lugar, educación matemática como conjunto de conocimientos, artes, destrezas, lenguajes, convenciones, actitudes y valores, centrados en las matemáticas y que se transmiten por medio del sistema escolar. La educación matemática en este caso se refiere al conocimiento matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje; la finalidad de la educación matemática se centra aquí en enriquecer y estructurar de manera adecuada los diversos significados de los conceptos matemáticos, superando la aparente exclusividad de su significación formal y deductiva. También se refiere a los planes de formación necesarios para que estos conocimientos sean transmitidos, aprendidos, utilizados y compartidos socialmente por la totalidad de los ciudadanos. Este ámbito lo denominamos diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas (Rico, 1997).

* En segundo lugar, educación matemática como actividad social que tiene lugar en unas instituciones determinadas y que es llevada a cabo por unos profesionales cualificados. En este caso se entiende la educación matemática como la totalidad de acciones y condiciones que hacen posible la enseñanza de las matemáticas. Abarca pues el conjunto de conocimientos, procesos y condiciones que posibilitan las interacciones entre profesores y alumnos en el medio escolar sobre un tópico matemático, es decir, que hacen viable la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La educación matemática se refiere aquí a la actividad intencional mediante la que se lleva a cabo la construcción, comprensión, transmisión y valoración del conocimiento matemático. En este ámbito, la educación matemática se refiere al análisis y estudio de las condiciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Parte importante de este ámbito se refiere al conocimiento y desarrollo profesional de los profesores y, por ello, lo denominamos conocimiento profesional y formación del profesor de matemáticas (Llinares, 1991; García, 1996).

* En tercer lugar, educación matemática como disciplina científica; es en este caso cuando nos referimos a la Didáctica de la Matemática. Se entiende aquí educación matemática como la totalidad de marcos teóricos y metodológicos que permiten interpretar, predecir y actuar sobre los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La Didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas así como de los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos. La Didáctica de la Matemática tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático (Steiner, 1987; Biehler, 1994). La disciplina Didáctica de la Matemática tiene como objeto de estudio los dos campos antes mencionados, junto con su propia fundamentación teórica. Este carácter recursivo de la Didáctica de la Matemática dentro de la educación matemática puede provocar, a veces, interpretaciones inadecuadas. Cuando queremos diferenciar este ámbito de los dos anteriores lo denominamos fundamentación epistémica y elaboración teórica .

2.3 Investigación en Didáctica de la Matemática

Postulamos que toda investigación en Didáctica de la Matemática se puede caracterizar mediante tres componentes: su marco teórico, su marco metodológico y su ámbito de actuación dentro de la educación matemática, que encuadran los problemas en estudio. (Rico y Sierra, 1999).

La investigación en Didáctica de la Matemática tiene como fin la actuación en el medio social, trata de ser acción transformadora. Es por eso que consideramos tres ámbitos generales de actuación, prioritarios para la investigación en Didáctica de la Matemática:

- * Diseño, desarrollo y evaluación del currículum de matemáticas,
- * Conocimiento profesional y formación del profesor de matemáticas,
- * Fundamentación epistémica y desarrollo teórico de la disciplina.

Desde nuestra perspectiva, la fundamentación epistemológica de la Didáctica de la Matemática es de carácter multidisciplinar. Por ello el marco teórico sobre el que se sostiene la investigación en este área comprende varias disciplinas:

- * Teorías de la comunicación, teorías curriculares, teorías de la interacción, semiótica, medios y tecnología educativa, entre otras, cuando el foco se sitúa en los fenómenos y procesos de enseñanza.
- * Psicología de la educación, teorías del aprendizaje matemático, constructivismo, constructivismo social, entre otras, cuando el foco se sitúa en los fenómenos y complejidad del aprendizaje.

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

* Análisis epistemológico y conceptual del conocimiento matemático, historia de las matemáticas, estructura de las distintas disciplinas matemáticas, procesos matemáticos, análisis fenomenológico, y otras, cuando el foco se sitúa en el estudio de la complejidad del conocimiento matemático.

* Sociología del conocimiento, sociología de la educación, antropología cultural, axiología y teleología de la disciplina, teoría de las instituciones educativas, y otros, cuando el foco se sitúa en los procesos sociales de construcción y valoración del conocimiento.

Por ello sostenemos que el marco teórico de la Didáctica de la Matemática se articula sobre cuatro dimensiones: pedagógica, cognitiva, conceptual y sociológica (Rico, 1997).

Finalmente, investigar es indagar mediante el método científico; por ello, toda investigación ha de tener una orientación metodológica predominante, que se expresa en un paradigma, unas aproximaciones, unas técnicas y unos instrumentos. Kilpatrick y Sierpiska (1993) consideraron tres aproximaciones metodológicas generales a la investigación educativa: positivista, fenomenológica y crítica; después de analizar estos paradigmas adoptan una posición holística respecto a los métodos de investigación educativa. Por su fecundidad y uso frecuente, sostenemos que los marcos metodológicos usuales en España para investigar en educación matemática son el paradigma positivista, el interpretativo y el crítico.

3. Programa de Doctorado de la Universidad de Granada

3.1 Datos generales y líneas de investigación

El Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada viene desarrollando un Programa de Doctorado bianual desde el curso académico 1988-89. Este Programa ha cubierto ya 6 ediciones y se ha consolidado en España como una oferta bien definida de formación de investigadores en Didáctica de la Matemática. Mas información puede obtenerse en: <http://www.ugr.es/~dpto_did/>. Algunos datos avalan esta afirmación:

Bienio	Alumnos matriculados	Proyectos de tesis presentados	Tesis concluidas
88-90	17	16	14
90-92	14	10	6
92-94	8	6	3
94-96	6	3	-
96-98	12	3	-
98-00	12	-	-
Totales	69	38	23

Las primeras tesis se defendieron en el curso 94-95, y vemos que un 33% de los estudiantes matriculados en el Programa han concluido, hasta el momento, su tesis. El tiempo mínimo para su realización, desde el comienzo de los estudios hasta su conclusión, ha sido de 5 años. Un 55% de los estudiantes han presentado su proyecto de tesis y recibido la aprobación del Departamento; la presentación del proyecto se puede realizar en un plazo de 2 años desde el comienzo de los estudios.

Dato destacable es el número de estudiantes latinoamericanos matriculados en el Programa que, hasta el momento, ha sido de 12 (17% del total), concentrados en sus últimas ediciones.

Este programa ha recibido apoyo financiero del gobierno español como programa

de doctorado de calidad, forma parte de los estudios de postgrado ofertados por la Comisión Europea, ha recibido estudiantes becarios de los planes de formación de personal investigador del gobierno español y de seis países latinoamericanos (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Venezuela). También recibe financiación del Programa Alfa de la Unión Europea, formando parte de la *Red Fiemal* (Formación de Investigadores en Educación Matemática para América Latina), en el que intervienen 3 países comunitarios (Italia, Reino Unido y España) y 3 latinoamericanos (Colombia, Guatemala y México).

No disponemos de datos exactos sobre la producción realizada en los programas de doctorado de Didáctica de la Matemática de otras universidades; en el momento actual el número de tesis leídas en la Universidad de Granada es, aproximadamente, el 50 % de la producción española en estos programas.

La oferta de formación inicial de investigadores que realiza el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada se sostiene en su actividad investigadora. Con el fin de organizar y desarrollar esta actividad, el Departamento está estructurado en cinco líneas de investigación:

- Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico
- Didáctica de la Probabilidad y de la Estadística
- Diseño, Desarrollo y Evaluación de Currículo de Matemáticas
- Formación del Profesorado de Matemáticas
- Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática

En términos generales, podemos decir que estas cinco líneas concretan el modo en que los investigadores del Departamento abordan, de manera especializada, los tres ámbitos de actuación que hemos señalado en el apartado anterior.

Las líneas de investigación *Pensamiento Numérico* y *Didáctica de la Probabilidad y de la Estadística* marcan las prioridades en el ámbito de la investigación sobre innovación curricular. Los tópicos que se estudian en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada son Álgebra, Análisis, Estadística y Probabilidad, con un énfasis sobre las estructuras numéricas en los dos primeros casos.

La línea de investigación *Formación del Profesorado de Matemáticas* se centra en el ámbito conocimiento profesional y formación del profesor de matemáticas.

Finalmente, las líneas de investigación *Diseño, Desarrollo y Evaluación del Currículo de Matemáticas* y *Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática* atienden al ámbito de fundamentación y desarrollo teórico de la Didáctica de la Matemática.

En este caso parece claro que las líneas de investigación no se han determinado ni por el marco epistemológico ni por el marco metodológico sino que han atendido a los ámbitos de actuación considerados para la educación matemática, principalmente. Cada línea se sostiene en un marco teórico y metodológico propio, pero el criterio considerado para su determinación ha sido el ámbito de actuación.

3.2 Estructura del programa

Según establecen las normas reguladoras de los estudios de Doctorado, éstos deberán comprender:

- a) Cursos o Seminarios sobre contenidos fundamentales del campo científico, técnico o artístico a los que esté dedicado el Programa de Doctorado.
- b) Cursos o Seminarios de metodología y técnicas de investigación.
- c) Trabajos de investigación tutelados.
- d) Cursos o Seminarios sobre campos afines al Programa y que sean de interés para el proyecto de tesis doctoral del doctorando, por un máximo de 5 créditos.

El Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada sigue la normativa general y ha perfeccionado su estructura conforme sus En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

efectivos humanos han adquirido experiencia y mejorado su formación.

En el momento actual (Bienio 1998-2000) el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada realiza una oferta docente de 21 cursos, por un total de 63 créditos, para la formación de los estudiantes del programa de doctorado de Didáctica de la Matemática.

Contenidos fundamentales

La oferta de Cursos o Seminarios sobre contenidos fundamentales consta de 15 cursos sobre contenidos (43 créditos) y 2 seminarios de investigación en Didáctica de la Matemática (8 créditos).

Estos cursos constituyen la parte central del Programa y se exige haber cursado 15 créditos en estas materias. Mientras que los cursos metodológicos, o afines, se pueden compartir con los Programas de doctorado de otras disciplinas, los cursos de contenido fundamental son los que marcan la especificidad del Programa. En estos cursos podemos diferenciar dos grupos: materias troncales y materias de líneas de investigación específicas.

Las materias troncales son obligatorias para todos los estudiantes del programa; entre ellas se encuentran:

**Teoría de la Educación Matemática*, curso dedicado a los fundamentos de la Didáctica de la Matemática, sus problemas, fuentes de información, marcos teóricos, fundamentación epistemológica, paradigmas de investigación y escuelas.

* *Diseño, Desarrollo y Evaluación del Currículo de Matemáticas*, curso que aborda los fundamentos de la teoría curricular y los problemas que se derivan para la Didáctica de la Matemática del hecho de considerar la complejidad de los planes de formación que tienen lugar en las instituciones educativas.

Las líneas de investigación específicas ofertan cursos opcionales, en los que se muestra al doctorando el estado de la cuestión en campos específicos de la Didáctica de la Matemática. Se presentan problemas concretos y prioridades de investigación en líneas tales como Pensamiento Numérico, Didáctica de la Estadística y Probabilidad, Etnomatemáticas, Problemas Aritméticos o Estrategias para la Resolución de Problemas. En estos cursos participan profesores visitantes, y sus intervenciones sirven para intercambiar información entre nuestro Departamento y otros centros de investigación en Educación Matemática.

Estos cursos tienen como complemento el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática, que se imparte durante los dos años del programa. El Seminario de Investigación es el espacio natural en el que el alumno del Programa entra en contacto con investigaciones en curso y se enfrenta a los problemas prácticos que supone su puesta en marcha y desarrollo.

Cursos metodológicos

La metodología de investigación en las áreas científicas sociales ha evolucionado profundamente en los últimos años, superando el paradigma positivista y los trabajos exclusivamente de laboratorio. En el campo de las Ciencias de la Educación, la *Metodología de Investigación* constituye un área de conocimiento diferenciada, cuya complejidad no es fácil controlar (Jaeger, 1988; Wittrock, 1986). Si a esto añadimos los problemas específicos, derivados de la peculiaridad de la Didáctica de la Matemática, podemos apreciar la importancia que tienen este tipo de cursos.

La experiencia nos ha mostrado la importancia del marco metodológico para la realización de una Tesis; un diseño adecuado, junto con los instrumentos pertinentes para el análisis de datos y discusión de hallazgos y resultados, contribuyen a la calidad del producto final. En la actualidad se ofertan 4 cursos metodológicos (12 créditos) en el programa.

El curso *Investigación en Educación Matemática. Avances Metodológicos* es una materia troncal, es decir, obligatoria para todos los estudiantes del programa.

Los otros cursos son: *Diseño de Investigaciones en Educación Matemática*, *Análisis de Datos*, y *Aplicaciones del Análisis Multivariante a la Investigación*

Educativa.

En el curso *Investigación en Educación Matemática. Avances Metodológicos* se abordan tres núcleos de problemas:

i) los estadios lógicos de investigación en educación Matemática, con la delimitación del problema de investigación, la revisión de la literatura y la naturaleza de los datos empíricos;

ii) los métodos diferenciales de investigación en educación matemática, considerando: métodos centrados en la materia, métodos centrados en la enseñanza, métodos centrados en el aprendizaje, métodos centrados en el colectivo educativo y métodos integrados;

iii) la evaluación de la investigación en educación matemática.

Metas generales de este curso, son:

* Preparar al doctorando para ser un consumidor de juicios de investigación en educación matemática, tras evaluar críticamente informes y proyectos.

* Dotar al doctorando de un repertorio de conocimientos y destrezas metodológicos que le permitan realizar o, al menos, iniciar investigaciones en educación matemática; es decir, lograr que sea un productor de investigación.

* Comprender el papel de la investigación en la mejora de la práctica en educación matemática y en la génesis y desarrollo de esta disciplina.

Materias afines

Dentro de este grupo se incluyen aquellas materias que se consideran convenientes para completar la formación del doctorando, de cara a su labor de investigación en el campo de la Educación Matemática. También está previsto que el alumno, de conformidad con su tutor, pueda elegir materias de otros programas, hasta un total de 5 créditos. En este último caso se encuentran materias cursadas previamente a la iniciación del Programa y que pueden ser convalidadas con las limitaciones indicadas.

La oferta docente del Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada queda resumida en el siguiente cuadro:

Líneas de Investigación y otros cursos	Total de cursos	Total de créditos
Pensamiento Numérico	4	11
Didáctica de la Estadística y Probabilidad	3	9
Formación de Profesores	3	9
Currículum y Evaluación	2	6
Teoría de la Educación Matemática	3	8
Cursos Metodológicos	4	12
Seminarios de Investigación	2	8

3.3 Trabajo de Investigación

El Programa exige a los alumnos un trabajo de investigación, dirigido por un Profesor, a cuya realización se dedica el segundo periodo de los estudios de tercer ciclo y al que se asigna una valoración de 12 créditos.

Este trabajo de investigación tiene autonomía y está concebido como iniciación

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

tutelada a la investigación en el área correspondiente. Sin embargo, conviene que el doctorando enfoque su atención sobre un determinado problema desde el comienzo de su trabajo. Por ello, en nuestro Departamento, se concibe este trabajo como una primera aproximación a la Tesis o a una parte de ella, en el que se realiza un primer abordaje al problema que se quiere investigar, permitiendo hacerle correcciones o reorientarlo.

El Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada ha entendido que la forma de aprender a investigar consiste en realizar un trabajo de investigación, y estimula a los alumnos que se matriculan en su programa de doctorado a que presenten una Memoria de Tercer Ciclo con los resultados obtenidos. Esta Memoria no tiene carácter obligatorio ya que puede sustituirse por la redacción de algún artículo o comunicación e, incluso, puede convalidarse por trabajos de investigación previos. Sin embargo, la experiencia ha mostrado que los alumnos que optaron por realizar una Memoria de Tercer Ciclo han finalizado o tienen muy avanzada su Tesis doctoral, en la mayor parte de los casos.

El trabajo de investigación se presenta en varias sesiones del Seminario de Investigación, en las que se debate y discute detalladamente su diseño, su estado de progreso y desarrollo posterior. A la conclusión del trabajo es obligatoria su presentación final en el Seminario, previa a la sesión de evaluación.

En la realización del trabajo de investigación tutelado el doctorando pone a prueba los procesos, técnicas, estrategias y herramientas que luego va a desarrollar durante la realización de la tesis. Con independencia del contenido del estudio hay cuestiones metodológicas que implican un modo sistemático de actuar, que deben ensayarse y en las cuales el doctorando tiene que iniciarse. Una de las estrategias habituales es el trabajo regular con el tutor de la investigación y una de sus técnicas es el registro de las actuaciones en un cuaderno de investigación.

Las actividades del doctorando en la realización de su trabajo deben quedar recogidas en un cuaderno de investigación, de manera que sea posible disponer en cualquier momento de un registro de lo planificado y realizado, de los análisis y valoraciones realizados, de los ensayos realizados, las decisiones adoptadas y el estado de progreso del trabajo. Igualmente, debe realizarse un seguimiento y valoración continuado de estas actividades por medio de sesiones periódicas de trabajo con el profesor que lo dirige; el registro de estas sesiones por medio de grabaciones y la transcripción posterior de un resumen al cuaderno de investigación son técnicas usuales.

La experiencia muestra que las sesiones de trabajo con el tutor llevadas con regularidad impulsan la investigación. Una reunión quincenal permite un seguimiento adecuado, sin perjuicio de incrementarlas cuando se vea necesario. Contenidos de estas sesiones serán la delimitación precisa del problema que se quiere estudiar, la selección de documentos para la revisión de antecedentes y delimitación del marco teórico en que se encuadra, el diseño metodológico del estudio, la discusión y preparación de los instrumentos para la recogida de información, el tratamiento y análisis de los datos obtenidos y la valoración de los resultados alcanzados.

4. Realización de la Tesis Doctoral

Los alumnos de doctorado han de presentar en el Departamento, antes de terminar el programa, un Proyecto de Tesis Doctoral avalado por quien vaya a ser su director, o directores. En el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada el Proyecto se presenta preceptivamente en una sesión del Seminario de Investigación, donde se debate y se hacen sugerencias para su redacción definitiva; transcurrida esta sesión el Proyecto queda aprobado.

Para lograr el título de Doctor en Matemáticas en el programa de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, además de los cursos y trabajos mencionados, se requiere realizar una Tesis Doctoral.

4.1 Tesis doctoral

La Tesis Doctoral consiste en un trabajo original de investigación sobre una materia relacionada con la disciplina Didáctica de la Matemática realizado por el doctorando. Por investigación entendemos la actividad de indagación basada en el método científico, sostenida por un marco epistemológico y orientada a la transformación del medio humano.

La reglamentación actual no establece plazo temporal para realizar la Tesis.

La ciencia se propone dar respuesta a problemas y cuestiones reales así como transformar el mundo, no sólo el mundo físico sino también el mundo social. Ello implica mejorar nuestro conocimiento sobre las cuestiones que nos afectan y preocupan. Investigar es un modo de construir la ciencia, de ahí que la investigación pueda considerarse como actividad de resolución de problemas. Al considerar la ciencia como acción transformadora, la investigación se concibe como tarea de resolución de problemas (Laudan, 1986). Esta conceptualización es válida para la investigación en educación matemática (Shumway, 1980; Grouws, 1992; Kilpatrick, 1994; Malara, 1998; Ponte y cols., 1998; Rico y Sierra, 1999)

De aquí que un trabajo de tesis pueda analizarse, en términos generales, como la resolución de un problema, un problema ambicioso y de cierta complejidad.

La tarea de resolución de problemas que llamamos investigación consiste en una indagación sistemática mediante el método científico. Por ello, cualquier investigación ha de tener una fundamentación metodológica, que se expresa en un paradigma, unas aproximaciones, unas técnicas y unos instrumentos. Igualmente, desde nuestra perspectiva, la investigación en Didáctica de la Matemática debe sostenerse en un marco teórico. Además, la investigación en Didáctica de la Matemática tiene como fin la actuación en el medio social, es acción transformadora, y de aquí que sea necesario considerar su ámbito de actuación.

Por tanto una tesis doctoral en Didáctica de la Matemática se caracteriza mediante tres componentes: su marco teórico, su marco metodológico y su ámbito de actuación dentro de la educación matemática.

4.2 Momentos en la realización de una tesis

En el proceso de resolución de un problema los expertos suelen distinguir, con denominaciones más o menos parecidas, varios momentos clave (Polya, 1979; Bransford y Stein, 1986). Con el mismo carácter general, consideramos en nuestra argumentación sobre realización de una tesis los cinco momentos siguientes:

1. Detección e identificación de un problema.
2. Representación del problema dentro de un marco conceptual.
3. Tratamiento técnico del problema mediante diversas estrategias.
4. Explicitación de los resultados u obtención de la solución.
5. Evaluación e interpretación de los resultados.

Veamos la conexión de las tres componentes generales de una tesis consideradas anteriormente con los momentos señalados para el proceso de resolución de un problema

En primer lugar, para la detección e identificación de un problema el investigador novel comienza por situarse en uno de los ámbitos de actuación de la educación matemática, es decir, trata de precisar el problema que quiere estudiar, los sujetos con los que va a trabajar y la institución donde va a llevar a cabo el estudio. Esta elección es, inicialmente, muy general y responde a alguna preocupación surgida en su trabajo profesional dentro de la educación matemática. Progresivamente el investigador va esforzándose por dar mayor precisión a la cuestión que le interesa dentro de un área problemática, trata de expresar con claridad las intuiciones iniciales y delimitarlas. De

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

este modo se van perfilando los componentes generales que caracterizan el problema que quiere estudiar y surge la necesidad de ubicarlo dentro de un marco objetivo preciso.

Este momento está vinculado, principalmente, con la elección de un campo o ámbito de actuación. El momento no concluye hasta que el investigador no logra establecer un objetivo general bien enunciado y sin ambigüedades para su estudio. La elección del ámbito es una decisión importante del doctorando que va a condicionar su trabajo e incluye integrarse en un equipo de investigación.

Cuando el investigador novel se integra en un equipo que desarrolla una agenda propia de investigación, la detección de problemas se hace con menos dificultad, ya que los intereses del grupo tienen su ámbito bien delimitado y la experiencia de estudios previos permiten señalar puntos de dificultad con los que identificar el problema.

En segundo lugar, la representación del problema está basada en un marco teórico y epistemológico. Este momento transcurre con la caracterización precisa del problema que se quiere estudiar, con la consecución de un enunciado cuyo significado venga dado por un marco conceptual de referencia. Para ello se siguen distintas técnicas, como son elaborar un primer listado de términos y palabras clave del problema, revisar la bibliografía y buscar sistemáticamente en bases de datos, seleccionar y leer documentos que hayan abordado previamente el problema en estudio o similar; finalmente, es conveniente disponer de un informe sobre el estado de la cuestión y de los resultados de investigación relacionados.

El desglose del objetivo general en objetivos parciales es una buena estrategia para definir un problema de investigación. De este modo se lograrán establecer los diversos componentes que estructuran el marco teórico del problema, en sus distintas dimensiones: cognitiva, epistemológica, pedagógica y sociológica.

También en este momento es conveniente hacer una descripción general del diseño metodológico, que deberá incluir el tipo de investigación, la muestra, los instrumentos de recogida de información y su temporalización. Finalmente, las conjeturas que se quieren contrastar pueden dar lugar a unas hipótesis de la investigación.

El tipo de estudio que se quiere realizar va conectado con su racionalidad y ambas nociones, tipo de estudio y racionalidad, muestran el sistema de ideas con las que el investigador se representa el problema en estudio.

El trabajo del doctorando en este caso requiere de un esfuerzo intelectual considerable, que pasa por el trabajo personal de lectura y revisión críticas, pero también por un trabajo en el seminario donde irá presentando los sucesivos intentos de expresión del problema. Un curso general de metodología de investigación es esencial para abordar este momento. La discusión con el director del trabajo y con otros investigadores es muy provechosa. Este momento comprende la fase de preparación y redacción del proyecto de tesis doctoral

En tercer lugar el investigador novel aborda el estudio de su problema mediante algún trabajo empírico o de revisión, que necesita de un tratamiento técnico. Este es el momento en que la investigación se sostiene en un marco metodológico determinado y hace uso de unas técnicas específicas, que quedaron esbozadas con anterioridad. Aquí es usual trabajar con unos sujetos mediante un planteamiento empírico.

Pasos importantes de esta etapa son la delimitación de variables, definición de tareas y elaboración de instrumentos para la recogida de información; asimismo tienen interés los ensayos piloto y la revisión de tareas e instrumentos.

Durante la realización del trabajo experimental hay que seguir unos criterios determinados de control y llevar un registro detallado de incidencias, que permitan un balance posterior de la ejecución. También corresponde a este momento el tratamiento y análisis de la información que incluye su recogida y los criterios y categorías para su análisis, así como la caracterización, codificación, organización y tratamiento de los datos.

Este momento se suele considerar como núcleo de la investigación propiamente tal, restando importancia a los dos momentos anteriores; sin embargo conviene destacar que gran parte del éxito en esta parte ejecutiva depende de la labor de clarificación y precisión realizada en los dos momentos anteriores.

En cuarto lugar tenemos la obtención de resultados, momento éste que no tiene solución de continuidad con el anterior. Los resultados de una investigación son las explicaciones de las observaciones dentro de un marco teórico determinado. Actividad importante en este momento es la interpretación general y específica de los datos obtenidos, según los criterios y categorías previamente establecidos. La conexión en este caso vuelve a centrarse en el marco teórico, ya que los datos y observaciones deberán encajar dentro de un marco para que puedan considerarse como resultados y donde deberán mostrar toda su potencia explicativa en relación con el problema inicialmente planteado.

Actuaciones de este momento son una revisión y presentación ordenada de resultados en relación con el planteamiento del problema, su conexión con el plan de trabajo diseñado, los hallazgos y logros obtenidos del estudio, los resultados confusos o sin interpretación clara y, finalmente, la vinculación de los resultados con las hipótesis iniciales y su valoración.

Por último hay una evaluación e interpretación final de los resultados, donde se debe proponer un marco explicativo global para la información obtenida y abrir nuevas perspectivas para el avance en la investigación. Este es un momento clave ya que permite una interpretación amplia del problema y de sus resultados. En este momento se conectan las tres componentes de la investigación: ámbito de actuación, marco teórico y marco metodológico, presentándose el estudio como un todo que adquiere su auténtica dimensión cuando se destaca su ubicación en un plan general e incluye una reflexión global y abierta hacia nuevos interrogantes.

Junto con las conclusiones hay que destacar en este momento los problemas que quedan abiertos, las cuestiones surgidas durante el estudio que no se contemplaban en el planteamiento del problema, así como la vinculación del estudio con otros campos no considerados inicialmente.

Al mismo tiempo los resultados del estudio conectarán con otros datos obtenidos en estudios previos enfocados a la misma cuestión. De ahí el interés que tienen los esfuerzos de convergencia hacia proyectos comunes, hacia el encuadre en un grupo o línea de investigación que obliguen al investigador novel a esforzarse por compartir supuestos, fundamentos y métodos, a interpretar sus resultados en relación con los obtenidos por otros investigadores.

4.3 Orientación del estudiante de doctorado

En la realización de una tesis hay varias ocasiones en las que hay que tomar decisiones delicadas y de cierta complejidad. Una de las tareas del director de una tesis doctoral consiste en proporcionar al doctorando la orientación adecuada para superar las dificultades encontradas. Siguiendo el esquema anterior destacamos algunas cuestiones problemáticas que se presentan en el transcurso de una investigación.

Identificación del problema

La elección e identificación del problema de investigación es la primera dificultad que encuentra el doctorando en Didáctica de la Matemática, y se pueden hacer varias reflexiones en este sentido. Por un lado, es usual que el doctorando tenga algunas preocupaciones personales respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y pretenda convertirlas directamente en problemas de investigación. Esta intuición inicial puede ser útil, pero en la mayor parte de los casos resulta insuficiente e imprecisa y puede no responder a los intereses prioritarios del grupo de investigación

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

en el cual el investigador en formación quiere integrarse y del que forma parte su director. Por otro lado, el doctorando estima que una preocupación general es más que suficiente para iniciar su investigación y no valora la necesidad de disponer de un marco teórico adecuado, donde su preocupación general adquiera límites nítidos y pueda abordarse con el aparato adecuado. En este momento el doctorando debe someterse a la disciplina del grupo de investigación y del marco teórico global en que el grupo se ubica. Esta elección no resulta sencilla en ocasiones y debe asumirse como una incorporación activa y crítica a un grupo que dispone de mayor experiencia y no como una aceptación pasiva, dispuestos a aprender pero también a discutir y objetar todo aquello que resulte confuso o ininteligible.

Representación del problema

La representación y planteamiento del problema de investigación consiste en su delimitación y enunciado. Señalamos como dificultad principal de este momento el enunciado de las hipótesis de la investigación o, en su defecto, el enunciado preciso de la cuestión.

Para una correcta delimitación del problema de investigación y un enunciado preciso, son imprescindibles un conocimiento amplio del campo de estudio y un marco teórico que permita plantear cuestiones significativas, que supongan algún tipo de cuestionamiento sobre las condiciones usuales con las que se ha abordado anteriormente el problema.

"Los objetivos de una investigación dan paso a los *interrogantes* que definen de forma precisa el planteamiento de un problema de investigación. Estos interrogantes constituyen una guía para el enunciado de las *hipótesis de investigación* que son explicaciones posibles o provisionales que tienen en cuenta los factores, sucesos o condiciones que el investigador procura comprender. En éstas hipótesis se incluyen hechos que trascienden los elementos conocidos para dar explicaciones plausibles de las condiciones desconocidas. Al relacionar los hechos conocidos con las conjeturas formuladas acerca de las condiciones ignoradas, las hipótesis, tanto si son confirmadas como rechazadas, incrementan el conocimiento." (Segovia, 1995).

Las hipótesis de investigación dan forma al problema de investigación en términos del marco teórico y del marco metodológico con el que se aborda. Las hipótesis expresan conjeturas que proporcionan algún modo de explicación del fenómeno en estudio, cuya verificación o rechazo, en algunos casos, y su consideración conjunta, en otros, profundiza el conocimiento sobre el campo en estudio. Las hipótesis expresan, en términos estrictos, la globalidad del problema que se quiere estudiar. Por tanto, deben avanzar interpretaciones sobre una cuestión cuya respuesta no se conozca y que tenga interés intrínseco, cualquiera que ésta sea, por razón de que se quiera aumentar el conocimiento sustantivo sobre el campo en estudio mejorando la información disponible. Las hipótesis tienen que expresar con rigor y claridad el problema que se quiere estudiar.

El enunciado del problema de investigación mediante una o varias hipótesis de investigación es condición formal necesaria para la realización efectiva de una investigación; también permite calibrar la profundidad e interés del estudio propuesto. En el caso de una tesis doctoral se convierte en una de las claves del estudio. La bondad de la hipótesis (o en su defecto, de las cuestiones de investigación) es uno de los criterios para delimitar la calidad de una tesis doctoral. Uno de los momentos importantes en la intervención del director de una tesis doctoral está en la delimitación inicial y enunciado preciso posterior del problema que se quiere abordar.

Elaboración de instrumentos

En el momento de realización de la investigación son múltiples las cuestiones problemáticas que se plantean. Por su interés queremos destacar la elaboración y puesta a punto de los instrumentos de recogida de información. Salvo en los estudios de réplica, el trabajo de investigación lleva consigo la delimitación de una serie de

tareas que van a ser propuestas a los sujetos de la muestra.

La caracterización y selección de las tareas es un proceso complejo, que pone a prueba la capacidad del investigador para concretar el objeto de la investigación en un número limitado de cuestiones, mediante las cuales ha de recoger el máximo de información con la mayor economía de procedimientos. El o los instrumentos son parte esencial del diseño, que condicionan la muestra y la temporalización del estudio. Las tareas obligan a delimitar variables y a establecer los criterios para el análisis y tratamiento de la información que se recoja. Las tareas muestran con detalle el núcleo de la indagación. Aunque por sí solas no garantizan la bondad de un trabajo, sí ponen de manifiesto sus rasgos esenciales.

Para observar cuidadosamente las actuaciones de los sujetos conviene construir tareas que provoquen y hagan emerger las creencias, obstáculos o errores involucrados. Para someter a prueba una conjetura sobre la comprensión de los escolares, o sobre el conocimiento profesional de los profesores, es necesario proponer actividades que muestren la riqueza y complejidad del pensamiento subyacente. Por ello, los instrumentos de recogida de la información (pruebas, cuestionarios, encuestas y entrevistas) y las tareas que los configuran (items, problemas, preguntas abiertas, actividades) son parte esencial del trabajo de investigación y permiten, igualmente, evaluar la calidad del estudio en curso.

El diseño metodológico es sólo un medio que garantiza el control y tratamiento adecuado de la información recogida; permite obtener el mejor aprovechamiento de los datos obtenidos. Pero son estos datos la parte esencial del proceso de realización de una investigación; las tareas permiten establecer con la mayor precisión posible cómo alumnos y profesores interpretan y dotan de significado a sus cometidos en relación con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Una intervención importante del director de una tesis está en la discusión de las tareas sobre las que se va a centrar la investigación.

Resultados

La interpretación y conexiones que se establecen entre los resultados son especialmente delicadas en el momento de redactar las conclusiones del estudio.

Es usual que los resultados de una investigación no ofrezcan respuesta a algunas de las cuestiones planteadas inicialmente. En este sentido puede parecer que las expectativas se han visto defraudadas. Sin embargo, el investigador, orientado por unas cuestiones precisas y asistido por unos instrumentos y tareas bien diseñados, ha recogido una cantidad considerable de datos que dan lugar a una diversidad de informaciones que, aparentemente, desbordan las previsiones iniciales, o bien se orientan hacia cuestiones no previstas.

Se trata de un momento crucial en el proceso de investigación. El investigador parece tener, por un lado, menos información de la que pretendía y, por otro, una serie de hallazgos con los que inicialmente no contaba. Las piezas del puzzle parecen no ajustarse a las previsiones. La riqueza de información resultante puede desbordar al investigador y dificultarle la comprensión. En este momento el investigador debe recordar que hay que buscar una organización de los datos y resultados que tenga la mayor potencia explicativa, aunque para ello haya que tomar distancia de algunas de las expectativas iniciales. Si los datos no se equivocan, el investigador debe revisar su marco interpretativo y profundizar en las distintas opciones que permiten relacionar los resultados obtenidos para, de este modo, ofrecer de todos ellos una interpretación estructurada y coherente.

Interpretación y conexiones finales

Finalmente queda conectar los resultados con un marco más amplio y señalar las cuestiones que quedan abiertas. El investigador ha recorrido todo el proceso de indagación, ha percibido la complejidad del estudio y la multiplicidad y riqueza de los datos recogidos. También ha constatado las conexiones que se presentan entre el

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

tópico estudiado y otras cuestiones importantes que no eran objeto explícito del estudio. Sabe que la información recogida es sólo una parte de los fenómenos considerados, aquella parte en la que el proceso ha estado controlado y se dan condiciones para su replicación. Ahora debe obtener el máximo jugo de los datos e informaciones obtenidas, destacar los hallazgos y presentar los logros en un esquema estructurado y coherente con el marco general de la investigación.

Es el momento más importante de la investigación y también el más difícil. Las investigaciones aisladas o singulares suelen tener dificultades para ubicar sus resultados en un marco general; los resultados de estas investigaciones suelen abrir nuevas conjeturas y cuestiones. Las investigaciones que se sitúan en líneas de investigación en desarrollo disponen de mayores recursos para reordenar sus resultados ya que los datos no tienen un valor único y absoluto sino que deben interpretarse en conexión y contraste con todo un cuerpo de conocimientos ya establecido, al que contribuye a configurar.

5 Resultados de la investigación

5.1 Evaluación de las investigaciones

La evaluación de los estudios e investigaciones constituye un requisito indispensable para delimitar la calidad del trabajo hecho, depurarlo, y, en su caso, proceder a su replicación, revisión o refutación. Se trata de un requisito imprescindible para el avance de una comunidad científica y es una necesidad vital para el progreso de cada campo de conocimiento. La evaluación de las investigaciones constituye una estrategia destacada en el ejercicio de la crítica:

"En la ciencia lo esencial es la actitud crítica. Primero creamos las teorías y después las criticamos. Como ante nuestras teorías solemos adoptar una actitud muy humana y tendemos a defenderlas, en vez de criticarlas, siendo como son nuestras, se produce entre los científicos una suerte de rivalidad entre amistosa y hostil. Si yo no adopto una actitud crítica ante mis teorías habrá cientos de personas que se mostrarán críticas ante ellas en grado superlativo. Y, por fuerza, habremos de felicitarnos de su actitud." (Popper, 1997).

Previo a la presentación y defensa de una tesis doctoral, o cualquier otro trabajo de investigación con validez académica, cada uno de los miembros del tribunal que va a intervenir en su evaluación debe emitir un informe de valoración con indicación expresa de que el trabajo sometido a su consideración reúne los requisitos básicos de calidad científica para ser admitido a trámite. En este informe previo los miembros del tribunal pueden hacer cuantas observaciones consideren pertinentes para mejorar o modificar el trabajo en estudio. El trabajo no se presentará para su defensa hasta no haber satisfecho razonablemente las indicaciones señaladas. También los miembros del jurado pueden expresar la conveniencia de aplazar la presentación y defensa del trabajo hasta no haberlo mejorado significativamente. En la mayor parte de los departamentos funcionan seminarios de investigación, donde se someten los trabajos en curso a discusiones y evaluaciones periódicas, que ayudan al progreso y mejora de las tesis e investigaciones en curso.

El Seminario de Investigación del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada tiene entre sus objetivos la presentación pública, discusión y evaluación de las producciones y resultados de las investigaciones que hacen los estudiantes del programa de doctorado en sus diversas fases.

5.2 Criterios de calidad de la investigación

La preocupación por la calidad de la investigación en Didáctica de la Matemática ha sido una constante desde el despegue de este campo de indagación y ha ido en paralelo con el avance metodológico en investigación educativa (Rico y Sierra, 1999). El desarrollo de la investigación educativa y un interés permanente por la calidad de los resultados han obligado a establecer estándares y determinar criterios para la valoración de estas investigaciones (Wittrock, 1986). Entre los criterios más usuales

encontramos: *Empiricidad, Factibilidad, Claridad, Pertinencia para la comunidad, Pertinencia para la práctica, Pertinencia para la teoría, Originalidad, Eticidad y Precisión* (Fernández, 1995). Cada uno de estos criterios explicita alguna preocupación básica de los investigadores en educación.

Los criterios para evaluar la investigación en Didáctica de la Matemática no son específicos sino que coinciden, en términos generales, con los establecidos por los expertos para evaluar la calidad de la investigación en educación. Freudenthal (1982) presentó tres criterios de calidad: *Fiabilidad, Validez y Pertinencia*, y discutió el sentido de estos criterios para nuestra disciplina. En términos generales, podemos decir que mediante la fiabilidad se evalúa la calidad y adecuación del método en una investigación, con la validez se evalúa la calidad y coherencia del marco teórico y por medio de la pertinencia se evalúa la calidad de los resultados para la práctica.

Kilpatrick y Sierpinska (1993) establecen una serie de criterios más elaborados para evaluar la calidad de una investigación en Didáctica de la Matemática, que se derivan igualmente de los criterios generales establecidos para la investigación educativa. Los criterios propuestos y comentados por estos autores son: *Pertinencia, Validez, Objetividad, Originalidad, Rigor y precisión, Predictibilidad, Reproducibilidad y Conexiones*; estos criterios mantienen actualidad e interés.

Cada uno de estos criterios evalúa de manera prioritaria una de las componentes antes señaladas para una investigación. Así, rigor y precisión y replicabilidad son criterios centrados en los aspectos metodológicos de la investigación, establecen exigencias de calidad respecto al método elegido, prioritariamente.

Validez, objetividad y conexiones son criterios orientados a evaluar el marco teórico en que se sitúa la investigación.

Finalmente, pertinencia y predictibilidad evalúan la coherencia del estudio con el ámbito de actuación en que se sitúa.

La originalidad tiene que ver con la globalidad del estudio y es un criterio de valoración comparativo respecto de otras investigaciones realizadas sobre el mismo problema.

5.3 Difusión de la investigación

El medio usual de comunicación de los resultados de una investigación es la publicación de un documento con el planteamiento del problema, el método utilizado y las conclusiones a las que se ha llegado.

Las investigaciones realizadas en la universidad tienen un formato convencional de presentación. Esto es lo que ocurre con las tesinas de licenciatura, trabajos de tercer ciclo o tesis doctorales, que se presentan y defienden en un marco académico y están sometidas a una normativa. El producto final es una memoria de investigación, por lo general voluminosa, en la que se presenta y delimita el problema en estudio, los marcos conceptual y metodológico con los cuales se aborda, los instrumentos diseñados, la recogida, tratamiento y análisis de la información realizados y, finalmente, los hallazgos, resultados y conclusiones. Las memorias de investigación son estudios técnicos detallados, cada vez más especializados en un campo muy concreto de estudio, y en los cuales puede resultar difícil orientarse.

Hay varias vías convencionales que abordan el problema de la difusión de los resultados de una investigación y hay diversos niveles de comunicación .

En un primer nivel está la publicación y difusión de los propios informes de los estudios o cualquier otra monografía de investigación. Son trabajos extensos y especializados y de difusión limitada; constituyen el núcleo de lo que se denomina "literatura gris", que se intercambia y debate entre especialistas y no suele tener versión comercial. En España estos trabajos tienen una edición limitada, realizada por las universidades y otras instituciones de investigación, y se localizan en las bibliotecas de los centros de investigación correspondientes o bien en las páginas web de los departamentos universitarios. También el *Departamento de Matemática* En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados de México publica ediciones limitadas de monografías con resultados de las investigaciones hechas en el Departamento. Una parte reducida de estos trabajos tienen una edición comercial y se concretan en unos materiales que llegan a un público más amplio; este es el caso de las publicaciones del *Grupo Editorial Iberoamericano* en México, de las publicaciones de *una empresa docente* en Colombia o de la *Colección Mathema* de la Editorial Comares en España.

En un segundo nivel, los resultados de las investigaciones se comunican brevemente por medio de artículos en revistas especializadas, debates en seminarios y comunicaciones en congresos específicos de investigación. Se trata de exposiciones cortas, muy sintéticas y en las que se presenta algún núcleo del estudio realizado.

Este tipo de comunicación cumple varias finalidades complementarias importantes: somete el trabajo al juicio crítico de la comunidad de especialistas -convierte el estudio en conocimiento público-, amplía el conocimiento en la comunidad de investigadores y obliga al autor del trabajo a un gran esfuerzo de síntesis para reducirlo a sus elementos esenciales o singularizar una de sus partes. Es una información dirigida a los especialistas, si bien por su difusión resulta asequible a un público más amplio.

Este segundo nivel se encuentra en España en una etapa de constitución y consolidación. No disponemos aún de revistas especializadas en exclusiva sobre investigación en Didáctica de la Matemática. *Enseñanza de las Ciencias* es la revista que mejor se ajusta a los criterios mencionados, pero necesita tomar autonomía de las secciones de ciencias experimentales, ampliar su producción y agilizar su aparato crítico. Otras revistas publicadas en distintos países, como es el caso de la mexicana *Educación Matemática*, la colombiana *EMA*, la portuguesa *Quadrante*, y la interamericana *RELME*, principalmente, vienen realizando una tarea valiosa de difusión de investigaciones en Didáctica de la Matemática publicadas en castellano o portugués. Por otra parte, con carácter no regular aparecen artículos de este campo en revistas de investigación educativa. En este caso el material es público y se encuentra en bases de datos especializadas.

5.4 Producción investigadora en España

Los antecedentes y el desarrollo reciente de la investigación en Didáctica de la Matemática en España son similares, manteniendo las proporciones adecuadas, a los que encontramos en otros países de parecido desarrollo cultural y social (Rico, Sierra y Castro, 1999). Presentamos brevemente algunas de las realizaciones españolas recientes en investigación.

La investigación curricular tiene cierto desarrollo en la Universidad de Granada, una de cuyas líneas de investigación es *Diseño, Desarrollo y Evaluación del Currículo de Matemáticas*; hay una amplia reflexión teórica sobre el concepto de currículo publicada en diversos trabajos y se han realizado ocho tesis doctorales conectadas con este tópico.

La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos tiene un desarrollo más amplio, con participación de equipos de varias universidades. En las universidades Autónoma de Barcelona, Cantabria, La Rioja y Valencia se realizan investigaciones sobre aprendizaje de la Geometría. En el primer caso se desarrolla un proyecto conjunto de investigación centrado en el uso de nuevas tecnologías y en el análisis de las interacciones en el aula; en Valencia la línea de investigación está centrada sobre el modelo Van Hiele relativo a la comprensión de conceptos geométricos y su empleo para analizar su aprendizaje.

En las universidades de Granada y Jaén hay un equipo de investigación que trabaja sobre la Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria; hasta el momento se han realizado siete tesis doctorales en este campo. Este equipo mantiene una buena proyección internacional. También en las universidades de La Laguna y Murcia se trabaja en Didáctica de la Estadística y en las universidades Autónoma de Madrid y Cádiz en Didáctica de la Probabilidad.

En las universidades de Alicante, Autónoma de Barcelona, Castilla- La Mancha, La

Laguna, Pública de Navarra, Salamanca, Santiago de Compostela y Valladolid se trabaja sobre Didáctica del Cálculo y del Análisis. La producción de este grupo hasta el momento es de siete tesis doctorales. Los investigadores de estas universidades mantienen una buena coordinación interna, que se expresa en el desarrollo de proyectos de investigación conjuntos.

En las universidades de Granada, Málaga, La Laguna y Valencia, principalmente, se mantienen equipos de investigadores sobre Pensamiento Numérico y Algebraico, que estudian los procesos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética escolar, estructuras numéricas, sistemas de representación, paso de la aritmética al álgebra y resolución de problemas. También en las universidades de Alicante, Almería, Cantabria, Córdoba, Barcelona, Pública de Navarra, Zaragoza y Valladolid se trabajan estos campos. Este grupo mantiene buena producción, con dieciseis tesis doctorales hasta el momento.

En relación con aspectos procedimentales de las matemáticas, principalmente sobre resolución de problemas, hay un amplio grupo de investigadores que trabajan en las universidades Autónoma de Barcelona, Extremadura, Huelva, Granada, La Laguna y Valencia, así como en el Instituto de Estudios Pedagógicos de la Universidad Pontificia de Somosaguas. Sobre Educación Infantil hay una actividad sostenida en las universidades de Cádiz, Granada, Málaga, Oviedo y Pública de Navarra

Sobre el conocimiento profesional del profesor, la formación y desarrollo del profesorado de matemáticas se trabaja en las universidades de Barcelona, Cádiz, Extremadura, Granada, Huelva, León y Sevilla. También la producción de tesis doctorales es alta, con diez tesis realizadas hasta el momento y el desarrollo de diversos proyectos de investigación y colaboraciones internacionales.

Los estudios sobre evaluación en matemáticas han recibido una atención menor por parte de los especialistas; no obstante se mantiene una producción estable en las universidades de Almería, Autónoma de Barcelona, Barcelona, Granada, León y País Vasco, con proyectos de investigación financiados por la DGICYT y el CIDE.

La investigación sobre Historia de la Educación Matemática está limitada a las universidades de Barcelona, Murcia y Salamanca, donde se han realizado tres investigaciones que han dado lugar a las correspondientes tesis y hay trabajos de investigación abiertos. La investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas por niños deficientes o con necesidades especiales tiene su referencia principal en la universidad de Barcelona; también en Málaga se está trabajando en este campo.

En las universidades Autónoma de Barcelona y Granada hay grupos de investigación centrados en Etnomatemáticas, que mantiene una actividad estable y una proyección internacional. Hay un grupo de investigadores que trabajan coordinadamente sobre la Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica, y tratan de impulsar la reflexión teórica. Pertenecen a este grupo investigadores de las universidades Autónoma de Barcelona, Granada, Complutense y Zaragoza.

6. Conclusión

Estas reflexiones tienen como primer objetivo orientar a los investigadores noveles en Didáctica de la Matemática, principalmente a los que inician o se encuentran en proceso de realizar una tesis doctoral. En el marco de un informe internacional sobre supervisión de Estudios y Grados Superiores en Educación Matemática, hemos puesto el énfasis en la actividad que se viene realizando en España durante los últimos años, en la normativa que regula los estudios de tercer ciclo y en el procedimiento que permite llevar a término un trabajo de investigación para obtener el título de doctor en Didáctica de la Matemática.

Pero otro objetivo importante de esta contribución es mostrar un sistema de ideas estructurado mediante el cual abordar la realización de una tesis doctoral tanto desde la perspectiva del doctorando como desde la función de director del trabajo. Por ello hemos distinguido ámbitos de actuación, componentes del marco teórico, diseño, técnicas, variables e instrumentos, momentos de realización, y criterios de calidad para la investigación. Este sistema de ideas queremos ofrecerlo como herramienta práctica

En: Hart, K & Hitt, F. (eds) "Dirección de Tesis Doctorado en Educación Matemática. Una Perspectiva Internacional."

para la reflexión y orientación del investigador en formación. Son resultado de nuestra experiencia como investigadores en Didáctica de la Matemática durante tres décadas y de la observación y enjuiciamiento del trabajo realizado en la comunidad española de investigadores en educación matemática.

Esperamos que, como tal herramienta, sea útil para aquellos que la necesitan y contribuya a su promoción y desarrollo.

Referencias

- Biehler, R., Scholz, R., Straßer, R. & Winkelmann, B.** (1994) *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Bransford, J. y Stein, B.** (1986) *Solución IDEAL de Problemas*. Barcelona: Labor.
- Fernández, A.** (1995) *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Freudenthal, H.** (1982). Fiabilité, Validité et Pertinence -criteres de la recherche sur l'Enseignement de la Mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 13.
- García, M.** (1996) *Análisis del Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas de Enseñanza Secundaria y el Concepto de Función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Tesis doctoral. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Grouws, D.** (edt.) (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Jaeger, R.** (1988) *Complementary Methods for research in education*. Washington: American Educational Research Association.
- Kilpatrick, J.** (1993) Beyond face value: Assessing Research in Mathematics Education. En Nissen, G. & Blomhøj, M. (edts.) *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde: IMFUFA.
- Kilpatrick, J.** (1994) Historia de la Investigación en Educación Matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis.
- Laudan, L.** (1986) *El progreso y sus problemas*. Madrid: Encuentro Ediciones.
- Llinares, S.** (1991) *La Formación de Profesores de Matemáticas*. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Malara, N.** (edt.) (1998) *Proceedings of W.G. 25- ICME 8: An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Módena: C.N.R.
- Niss, M.** (1998) *Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education*. Roskilde: IMFUFA.
- Nissen, G. & Blomhøj, M.** (1993) *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde: IMFUFA.
- Polya, G.** (1979) *Como plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.
- Ponte, J. P.; Matos, J. M. y Abrantes, P.** (1998) *Investigação em Educação matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Popper, K.** (1979) *El desarrollo del conocimiento científico*. Buenos Aires: Paidós.
- Popper, K.** (1997) *El cuerpo y la mente*. Barcelona: Editorial Paidós.
- Puig, L.** (1996) La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora. En Puig, L. y Calderón, J. (1996), *Investigación y Didáctica de la Matemática*, MEC: CIDE.
- Rico, L.** (1995). *Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado. Lección Inaugural del Curso Académico 1995-96*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L.** (edt.) (1997) *La Educación Matemática en Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Editorial Horsori.
- Rico, L.** (1999) Matemáticas, Universidad y Formación del Profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* nº 34. Zaragoza.
- Rico, L. y Sierra, M.** (1994) Educación Matemática en la España del siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Rico, L. y Sierra, M.** (1999) Didáctica de la Matemática e Investigación. En J. Carrillo (edt.) *Matemática española en los albores del siglo XXI*. Huelva: Hergué.
- Rico, L.; Sierra, M. y Castro, E.** (1999) Didáctica de la Matemática. En Rico, L. y Madrid, D. (edts.) *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Areas Curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Segovia, I.** (1995) *Estimación de cantidades discretas: estudio de Variables y Procesos*. Granada: Editorial Comares.

- Shumway, R.** (1980) *Research in Mathematics Education*. Reston VA: National Council Teachers of Mathematics.
- Sierpinska, A.** (1993) Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactic of Mathematics. En Nissen, G. & Blomhøj, M. (eds.) *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde: IMFUFA.
- Skovmose, O.** (1994) *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Steiner, H.** (1987) Philosophical and Epistemological aspects of Mathematics and their interaction with Theory and Practice in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 7, pp. 7-13.
- Wittrock, M.C.** (1986) *Handbook of Research on Teaching. A Project of the American Educational Research Association*. New York: Macmillan.