CUATRO INSTRUMENTOS DE CONOCIMIENTO QUE COMPARTEN UN AIRE DE FAMILIA: PARTICULAR-GENERAL, REPRESENTACIÓN, METÁFORA Y CONTEXTO[§]

Vicenç Font
Universitat de Barcelona. (España)
vfont@ub.edu
Campo de investigación: epistemología
Palabras clave: representación, contexto, metáfora, generalización

Resumen
El objetivo de este trabajo es reflexionar conjuntamente sobre cuatro de los aspectos más característicos de la actividad matemática y de la emergencia de sus objetos: la dualidad extensivo-intensivo (particular-general), la representación, la metáfora y la contextualización-descontextualización, los cuales son *instrumentos de conocimiento* que comparten un mismo aire de familia (en el sentido de que, de alguna manera, hacen intervenir la relación A es B). En los cuatro casos, podemos observar la existencia de "entidades vicariales o subrogatorias". Es decir, de un primer tipo de entidades que se utilizan para comprender un segundo tipo de entidades, a partir de las acciones que realizamos sobre las primeras (las cuales se pueden considerar, al menos en algún aspecto, diferentes de las segundas).

Introducción

Buena parte de las dificultades observadas en el aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con aspectos característicos de la actividad matemática como son: (1) el hecho de que los objetos matemáticos se presentan siempre por medio de sus representaciones o (2) que en el razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general, es necesario pasar por lo particular. La importancia de estos aspectos ha sido observada por ilustres pensadores. Valga, a modo de ejemplo, la siguiente frase de Peirce:
El matemático se esfuerza por construir el esquema o diagrama de tal modo que en cualquier situación posible pueda admitirse la existencia de algo muy parecido y a lo cual puede aplicarse la descripción hipotética contenida en la tesis del teorema; y también se esfuerza por construirlo de tal modo que no contenga otras características que puedan influir en el razonamiento. Una de las cuestiones que tendremos que considerar es la siguiente: *¿cómo puede ser que aunque el razonamiento se basa en el estudio de un esquema particular resulte al mismo tiempo necesario, es decir, aplicable a todos los casos posibles?*» (Peirce. "The Essence of Mathematics", *CP* 4. 228-243)
Los dos aspectos acabados de comentar tienen una característica en común, que no es otra que el carácter subrogatorio o vicarial que podemos observar en ambos casos. Las representaciones están en lugar de los objetos y lo "particular" en lugar de lo "general" (o viceversa). En ambos casos podemos observar la existencia de un primer tipo de entidades que se utilizan para comprender un segundo tipo de entidades, a partir de las acciones que realizamos sobre las primeras (las cuales se consideran, al menos en algún aspecto, diferentes de las segundas). Esta característica de usar entidades "vicariales" o "subrogatorias" está presente, aunque no exactamente de la misma manera, en otros aspectos que también son muy importantes en la actividad matemática. Nos referimos, además de la representación y de la dualidad particular-general, a la metáfora y a la contextualización, entre otros. Estos cuatro aspectos, esenciales en la actividad matemática, de alguna manera hacen intervenir la relación

[§] Este trabajo se ha elaborado en el marco del proyecto I+D: MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC.

A es *B*, y, por tanto, se pueden considerar como *instrumentos de conocimiento* que comparten un aire de familia (Wittgenstein, 1953).
Muchas de las dificultades observadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con el hecho de que los objetos matemáticos institucionales presentan una complejidad de naturaleza intrínsecamente matemática, la cual está íntimamente relacionada con esta "familia de instrumentos de conocimiento". Dicha complejidad se puede describir en términos "ontosemióticos". Es decir, en términos de las entidades intervinientes y de las relaciones que se establecen entre ellas.
La estrecha relación entre estos cuatro instrumentos de conocimiento y su presencia conjunta se puede observar en muchas de las tareas propuestas a los alumnos. Por este motivo, consideramos conveniente reflexionar primero sobre un episodio de clase en el que se puede observar la relación entre ellos (apartado 2). A continuación, en el apartado 3, se justifica que estos cuatro instrumentos de conocimiento comparten un aire de familia y, por último, en el apartado 4 se presentan algunas consideraciones finales.

Un episodio de clase como contexto de reflexión

A continuación se describe un episodio de clase (Font, 2005) que será utilizado como contexto de reflexión. Se trata de un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato del sistema educativo español (17 años) como parte de un proceso de estudio de la derivada, y dos respuestas correctas de estudiantes al apartado c). En este episodio podemos observar la presencia de los cuatro aspectos sobre los cuales nos proponemos reflexionar (la dualidad extensivo-intensivo, la representación, la metáfora y el contexto).
Cuestionario
En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:
a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

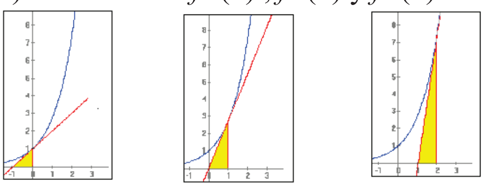

Figura 1

b) Calcula $f'(a)$

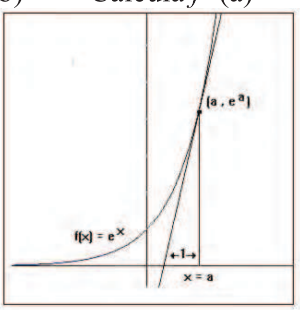

Figura 2

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$.
Respuestas al apartado c):

ALEX

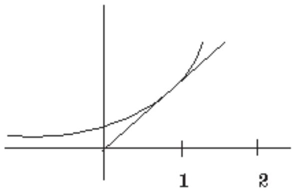

Figura 3

Todas las subtangentes de la función $f(x) = e^x$ son 1, como el desplazamiento vertical es e^x y la derivada de la función es la pendiente de la recta tangente, la fórmula será

$$f(x) = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal} = \frac{e^x}{1} = e^x$$

ROCÍO

$$f'(x) = \frac{f(x)}{sub\tan gente}\ ;\quad es\ f(x) = e^x\ ;\ f'(x) = \frac{e^x}{1} = e^x$$

Si observamos los tres apartados del cuestionario anterior (cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e*) podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general. En el apartado *a* se pide calcular la derivada para tres valores concretos (0, 1 y 2). En el apartado *b* se pide calcular la derivada para un valor concreto "*a*" y en el apartado *c* para un valor cualquiera. Es decir, el tránsito de lo particular a lo general ha estado muy presente en el diseño del cuestionario.

Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes (tienen una longitud igual a 1). Este software dinámico estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica" (Font y Acevedo, 2003).

En el cuestionario, por una parte, podemos observar que hay representaciones que la literatura describe como externas (gráficas, expresiones simbólicas, etc.). Por otra parte, la diferencia entre las respuestas de los alumnos permite suponer la existencia de representaciones, consideradas normalmente como internas, que están relacionadas con las distintas respuestas de cada alumno.

Con relación al contexto, se observa que se trata de una tarea que suele recibir diferentes tipos de calificativos: "situación intra matemática", "situación de contexto matemático", "situación descontextualizada", etc. Por otra parte, el episodio que se describe forma parte de una larga secuencia de actividades que comienza con la "emergencia" del objeto "función exponencial" a partir del estudio de diferentes situaciones de contexto extra matemático (desintegración de una sustancia radioactiva, etc.).

La importancia que tiene la metáfora en la comprensión de los alumnos cada vez se considera más relevante en la investigación en Educación Matemática. La metáfora es muy importante para estructurar la comprensión de los alumnos, como se puede observar en el siguiente episodio descrito en Bolite Frant, Acevedo y Font (2005):

"A este alumno se le pidió que comentara verbalmente los pasos previos (dominio; cortes con los ejes; asíntotas y comportamiento en el infinito; estudio de máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento; estudio de puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad) y la construcción de la gráfica de su examen. Tanto la gráfica como los pasos previos de su respuesta en el examen eran correctos.

Si bien en su respuesta escrita no se detectó ninguna metáfora, éstas fueron omnipresentes en su explicación verbal de cómo había construido la gráfica. Por ejemplo, a la pregunta

¿Puedes decirme cuándo la función será creciente y cuándo decreciente? el alumno había contestado correctamente señalando con el dedo los intervalos y diciendo aquí crece porque sube y aquí decrece porque baja)

Entrevistador: ¿Puedes decirme ahora cuándo la función será creciente y cuándo decreciente? [(mientras pone el papel en el que el alumno ha dibujado la gráfica de la función en posición horizontal].
Alumno D: (Duda durante unos segundos) ¿No le entiendo, quiere decir que ha cambiado los *ejes?*
Entrevistador: No, no he cambiado los ejes, siguen siendo los mismos.
Alumno D: Esta es decreciente porque baja y esta es creciente porque sube, esta otra es decreciente porque baja y esta creciente porque sube. [Duda durante unos segundos y con el dedo señala la parte de la curva señalada con una flecha fina como creciente y la señalada con una flecha gruesa como decreciente]

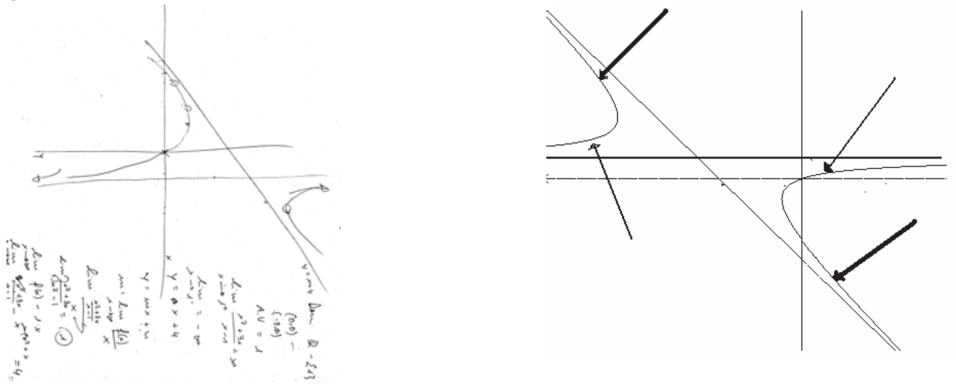

Figura 4

Una familia de instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia
Si consideramos la estructura *A* es *B* como una línea difusa (figura 5), en un extremo podemos situar claramente la relación de subcategorización (extensivo-intensivo) y en el otro extremo la metáfora consciente y creativa. La representación, entendida como instrumento de conocimiento, se sitúa en una posición intermedia:

- Extensivo / intensivo (Subcategorización)

El elemento *A* cumple las condiciones que cumplen todos los elementos de *B*. (Podemos conocer *A* a partir de conocer *B* y viceversa)

- Representación

Aplicación de la teoría o las ideas de un sistema *B* en otro sistema *A*, para poder utilizar el aparato teórico o conceptual de *B* como instrumento de análisis de *A*.

- Metáfora (p.e, la gráfica es la traza de un punto que se mueve sobre al gráfica)

Estructuramos el campo de conocimientos *A* (gráfica) en términos de la estructura que tiene *B* (experiencias sobre el movimiento). (conocemos *A* en términos de *B*):

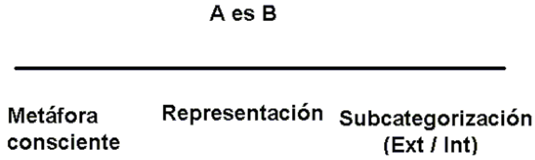

Figura 5

A continuación vamos a considerar una de las metáforas más fructíferas en la historia de las matemáticas: la interpretación de las curvas del plano como conjunto de puntos que son solución de una ecuación y comentaremos el proceso que convierte esta metáfora en una subcategorización (extensivo-intensivo). De entrada, la curva geométrica para Descartes es la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla es trasmitido por las diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. Por ejemplo:

- Una circunferencia *es* la curva geométrica que se obtiene a partir de la traza que deja la punta del compás.

En este caso actúa la dualidad extensivo-intensivo (*A* es *B*), es decir *A* (una circunferencia concreta) es un elemento de la clase *B* (curvas que se obtienen a partir de la traza que deja la punta del compás). En este caso actúa una metáfora fosilizada (las curvas son trazas de puntos que se mueven sujetos a determinadas condiciones). Dicho de otra manera, la metáfora fosilizada se ha transformado en la dualidad extensivo-intensivo.

Descartes en la Geometría introduce una de las metáforas más creativas de la historia de las matemáticas:

- La circunferencia que se obtiene al trazar la punta del compás *es* el "conjunto de puntos que son solución de una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$"[**]

Se trata de una metáfora creativa que permite entender la clase *B* desde otro punto de vista (*B* es *B'*, o *B* ~ *B'*, o *B* c *B'*). Gracias a esta metáfora, podemos estructurar nuestro conocimiento de las curvas de la geometría sintética en términos de nuestro conocimiento del álgebra. Con el paso del tiempo se considera que lo que hacemos es representar las curvas de la geometría sintética por medio de ecuaciones:

- La expresión $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se considera como la *representación* de una circunferencia.

Este proceso se cierra con el olvido de *B*. Es decir, *A* es *B* pasa a un segundo plano o incluso *A* es *B* se sustituye completamente por *A* es *B'*. De esta manera, con el paso del tiempo *A* es *B'* se convierte en una metáfora fosilizada que se interpreta en términos de extensivo e intensivo.

- Una circunferencia *es* el conjunto de puntos que son solución de una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (o simplemente una circunferencia *es* una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$).

Tal como muestra el ejemplo de la geometría analítica se trata de un proceso complejo que, por otra parte, puede llegar a necesitar mucho tiempo. Se trata de un proceso que conlleva que un objeto (la circunferencia en este caso) que "vivía" en un determinado programa de investigación (la geometría sintética) pasa a "vivir" también en otro programa de investigación (la geometría analítica).

En este último párrafo de manera implícita hemos estado considerando el "contexto", entendido este de manera ecológica. Con relación al término contexto, hay básicamente dos usos (Ramos y Font, 2006) uno consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, mientras que el otro consiste en enmarcarlo en el entorno. En el primer caso, se trata de ver que la situación problema cae dentro del campo de aplicación de un objeto matemático. En el segundo caso, se trata de un "uso" que vamos a llamar, metafóricamente, "ecológico". Este uso ecológico queda claro cuando se dice, por ejemplo,

[**] Descartes utiliza el término "círculo" y una ecuación del tipo $y^2 = lx - x^2$

que el contexto del gorila es la selva. Ahora bien, puesto que el contexto del gorila también puede ser el zoológico, podemos entender que hay un uso ecológico del término contexto que permite situar el objeto matemático en diferentes "lugares", por ejemplo, diferentes instituciones (universidad, secundaria, etc.). Estos "lugares" no tienen porque ser sólo instituciones, pueden ser también, por ejemplo, diferentes programas de investigación o diferentes "juegos del lenguaje".
El uso del contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático se observa claramente en los procesos de instrucción en los que se proponen situaciones-problema extra matemáticas pensadas para la emergencia de nuevos objetos matemáticos. En los procesos de descontextualización a partir de contextos extra matemáticos se sigue el siguiente proceso: se parte de una situación de contexto extra matemático *S*, que podemos poner en relación ® con la situación *S'*, la cual, a su vez, se considera como un caso particular del objeto matemático *OM* (*S´* es *OM*). La relación *R*, que permite relacionar *S* con *S'*, puede ser de muchos tipos diferentes, ahora bien, en todos los casos se suele terminar considerando *R* como una relación de representación, entendida ésta en términos de instrumento de conocimiento (*S'* es una representación de *S*).

Consideración final

Puesto que la dualidad particular-general, la representación, la metáfora y la contextualización-descontextualización son instrumentos de conocimiento que comparten un mismo aire de familia, por el hecho de usar "entidades subrogatorias", consideramos importante para la Educación Matemática investigar conjuntamente su función en la emergencia de los objetos matemáticos como resultado de los procesos de instrucción. Incluso cuando el foco de atención es uno sólo de ellos conviene hacerse la siguiente pregunta: ¿cómo se vincula el instrumento de conocimiento que nos interesa con los otros?

Referencias bibliográficas

Bolite Frant, J., Acevedo, J. y Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41-54.

Font, V. (2005), Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21, 3, 405-418.

Peirce, C.S. 1965. *Collected papers*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*, 20 (4), 535-556.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.