UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO ESTRATEGIA DE DISEÑO DE UNIDADES CURRICULARES

Ileana Pluss
Universidad Nacional de Rosario-Fac.de Ciencias Económicas y Estadística. (Argentina)
ipluss@cablenet.com.ar
Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística. Nivel educativo: superior
Palabras clave: ingeniería didáctica, derivada, enfoque geométrico

Resumen
El trabajo que se presenta se enmarca en estudios didácticos e investigaciones sobre los procesos de aprendizaje de unidades curriculares, especialmente diseñadas y construidas como material de apoyo para la enseñanza de tópicos específicos, seleccionados por su valor conceptual en los programas de la llamada Matemática Básica en Facultades donde el carácter de esta ciencia es preponderantemente instrumental. El tema a tratar es “Derivada” y se desarrolla a partir de problemas de velocidad y su correspondiente interpretación geométrica. Se presenta el desarrollo de las fases de una Ingeniería Didáctica correspondientes a los “análisis preliminares” y a “la concepción y los análisis a priori” que define Artigue. En un trabajo predictivo se han determinado algunos obstáculos que caracteriza la teoría de Brousseau.

Justificación del tema y objetivo del trabajo

Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivada y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo conceptual del Análisis y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de la matemática. (Artigue y otros, 1995). Esto está reforzado por la propia experiencia docente y nos ha llevado a elegir especialmente el tema “Derivada” por:

➢ Su valor conceptual	Siguiendo el lenguaje de Douady, se nutre en los “cuadros” de la Física, la Geometría, el Álgebra, la Geometría Analítica, el Análisis Matemático.
➢ Su valor formativo	Estimula a reflexionar sobre los cambios continuos que caracterizan a las magnitudes de cualquier área de interés y sobre cómo cuantificar dichos cambios.
➢ El razonamiento lógico que exige	Implica, entre otras cosas, manejar simultáneamente límite y continuidad de funciones, recta secante y recta tangente a una curva.
➢ Su estímulo a un pensamiento visual	Va más allá de una simple visualización, exige operaciones de relación provocadas por dicha visualización.

Es pues el objetivo del trabajo, facilitar la comprensión del “concepto de derivada”.

Marco metodológico de la investigación

“La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación se ubica en el registro de los estudios de casos, cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori” (Artigue, 1995)

La Ingeniería Didáctica incorpora una visión propia del aprendizaje de la matemática; si bien parte de una concepción constructivista del aprendizaje, se distingue dentro de este tipo de teorías por su modo de incorporar la relación entre el alumno y el saber. Los contenidos son el

fundamento sobre el cual se van a desarrollar, de manera jerarquizada, las estructuras mentales. El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber, con el fin de optimizar su control y su reproducción.
Los contenidos matemáticos toman especial importancia, ya que no se pueden separar la concepción de la Matemática como Ciencia de su propio proceso de estudio.
En el diseño de la Ingeniería Didáctica al cual nos adherimos (Artigue 1995 y otros), se realizará la distinción temporal en un proceso de cuatro fases:

- ♦ "análisis preliminar"
- ♦ "concepción y análisis a priori"
- ♦ "desarrollo de una experiencia"
- ♦ "análisis a posteriori y evaluación"

En este trabajo, se abordarán solo las dos primeras fases referidas al diseño del material didáctico, que implican una indagación epistemológica y una propuesta didáctica.
Análisis preliminar que ha guiado al diseño de esta unidad
Comprende en general:

- ➢ Una dimensión epistemológica
- ➢ Una dimensión cognitiva
- ➢ Una dimensión didáctica

Dimensión epistemológica
Nuestro diseño se basa sobre la validez matemática del conocimiento geométrico obtenido por visualización, y sobre la importancia de las operaciones de relación provocadas por dicha visualización.
Dimensión cognitiva
En nuestro diseño la planificación de la enseñanza del tema Derivada está basada en la localización de los obstáculos. Para Brousseau (1983) un obstáculo es un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y fuera de dicho dominio puede ser fuente de errores y dificultades. La localización de los obstáculos inherentes al conocimiento de un tema, es esencial para la planificación de su enseñanza. En su determinación interviene la experiencia del docente y su interés en saber porqué el alumno comete los errores.
Chevallard, Bosch y Gascón (1997) señalan:
Suele haber cierta unanimidad en que los obstáculos se manifiestan mediante errores reproducibles, con cierta coherencia interna (no se trata de errores impredecibles y arbitrarios), persistentes (siguen apareciendo después de que el sujeto haya rechazado conscientemente el modelo defectuoso) resistentes (muy difíciles de modificar) y relativamente universales. En el caso de los que tienen origen epistemológico, se postula rastrear además en la génesis histórica de los conceptos en cuestión (p. 224) .
En nuestro caso, la definición de función puede ser un obstáculo epistemológico para la comprensión del concepto de derivada de una función; el alumno debe vincular una función que tiene un determinado dominio y una relación dada por una ley estática, con otra función derivada de la misma, que representa los cambios continuos que se producen en la primera función.
Dimensión didáctica
Nuestro diseño está centrado en la actividad del alumno. Las actividades que se proponen motivan el surgimiento de situaciones de exploración, formulación y validación generadas en el interés del alumno.

Esta dimensión está condicionada por la cantidad de alumnos donde se realizará la experiencia, lo cual confiere una gran importancia al diseño del material que deberá ayudar a un aprendizaje autónomo.

Concepción y análisis a priori

En esta etapa el "investigador diseñador" toma decisiones en cuanto a la elección de los contenidos . En nuestro diseño, esta elección se expone en los siguientes objetivos:

1- Educar al alumno en una lectura completa y cuidadosa de un problema.

2- Traducir al lenguaje matemático la velocidad promedio de un objeto en movimiento en un intervalo de tiempo.

3- Interpretar problemas que se modelizan por medio de una función.

4- Identificar la tasa de variación instantánea de una función en un punto con el límite del cociente incremental en dicho punto.

5- Identificar la derivada de una función en el punto x con la tasa o coeficiente de variación instantánea de dicha función en x.

6- Interpretar gráficamente la derivada de una función en un punto.

7- Comprender la necesidad de la continuidad de una función f en un punto x para que exista la derivada de f en x.

8- Diferenciar la condición necesaria de la condición de no suficiencia de la continuidad de una función f en un punto x para que f sea derivable en x.

En la selección de los contenidos teóricos se decide definir derivada de una función

Prospectiva

El "análisis preliminar" y "la concepción y los análisis a priori" presentados preparan el terreno para que, luego de la observación del desarrollo y de los resultados, se realice la confrontación de los análisis a priori y a posteriori y se puedan así validar las predicciones de aparición de situaciones adidácticas (Brousseau, 1986) que caracterizan el aprendizaje de un conocimiento matemático.

A continuación presentamos una secuencia de problemas - "selecciones didácticas" (Artigue 1995) – como eje que conduce y da significado a la definición de derivada.

a) Un problema interesante y una referencia histórica

Una planta vegetal crece en forma continua con velocidad variable a medida que transcurre el tiempo, puede detener su crecimiento en algún momento y luego volver a crecer. Podríamos preguntarnos: ¿la velocidad promedio de crecimiento es la misma entre los tres y seis meses de plantada que en el lapso transcurrido desde que fue plantada hasta que alcanzó los tres meses? ¿cuál es la velocidad instantánea con que la planta crece en el momento que se cumple exactamente un mes de haber sido plantada?

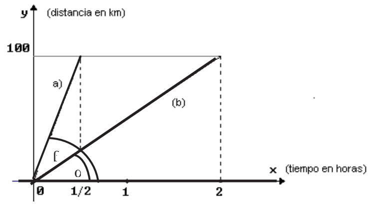
En una referencia histórica, nos encontramos en el siglo XVII con dos problemas aparentemente inconexos que contribuyeron al origen de la idea central de Cálculo Diferencial, que es el concepto de "derivada". Dichos problemas son:

- la velocidad instantánea de un objeto en movimiento
- la recta tangente a una curva en un punto dado de la misma.

Ya podemos estar planteándonos algunas preguntas:

¿Qué entendemos por velocidad instantánea de un objeto en movimiento? ¿Es posible calcularla? ¿Qué se entiende por recta tangente a una curva? ¿Cómo puede relacionarse un problema geométrico con la velocidad instantánea de un móvil?

b) Problema 1:



.
En la figura se describe el movimiento de dos móviles distintos que recorren la misma distancia (100km) con *velocidades* distintas y *constantes* durante todo el trayecto

- ¿Podemos deducir gráficamente cuál de los dos móviles es más veloz?
- Teniendo en cuenta la definición elemental de velocidad: espacio recorrido *dividido por el tiempo empleado en recorrerlo, ¿podemos calcular cada una y compararlas?*

v_a = 100km / 0,5h = 200km/h v_b = 100km / 2h = 50km/h

- ¿Porqué los movimientos de los dos móviles están representados por segmentos de rectas?

porqué la velocidad de cada móvil es constante, o sea es la misma en cada instante del recorrido y coincide con la pendiente de la recta en cada caso. Lo verificamos:

$$m_a = \text{tg}\,\beta = \frac{100}{0,5} = 200 \quad ; \quad m_b = \text{tg}\,\alpha = \frac{100}{2} = 50$$

- ¿Cuál es la relación entre la velocidad del móvil y la pendiente de la recta en cada caso?

cuanto mayor es la velocidad del móvil, mayor es la pendiente de la recta que describe su movimiento.

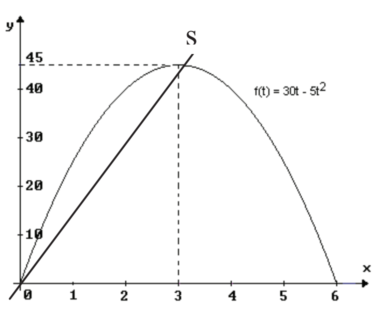
Si la velocidad de un móvil no es constante, obviamente la representación gráfica de la función que vincula el tiempo con la distancia recorrida ya no será un segmento de recta sino una curva y la velocidad no será la misma en cada instante del recorrido.

- Si la velocidad del objeto no es constante, ¿podremos calcular la velocidad promedio del móvil en todo el recorrido o en distintos intervalos de tiempo?
- ¿Se podrá calcular en este caso la velocidad en un instante dado del recorrido?

c) Problema 2:

Supongamos que un jugador de basketball lanza la pelota verticalmente hacia arriba con una determinada velocidad inicial, por ejemplo, sea ésta de 30 metros por segundo. La Física nos dice que la altura alcanzada por la pelota y el tiempo empleado en alcanzar dicha altura están vinculados por la siguiente función: $f(t) = v_0\, t - 5\, t^2$, donde t es el tiempo en segundos , $f(t)$ es la altura en metros, y v_0 es la velocidad inicial.

- ¿Cuál es la función en este caso y cuál es su representación gráfica?



En la representación gráfica de la función f: $[0,6] \to \Re$ / $f(t)=30t-5t^2$ podemos hacer las siguientes observaciones:

- La pelota sube con velocidad decreciente durante los primeros tres segundos que dura la subida:

. entre $t = 0$ y $t = 1$ la velocidad promedio es:
$[f(1) - f(0)] / (1-0) = [(25 - 0) / 1]$ m/s = 25 m/s
. entre $t = 1$ y $t = 2$ la velocidad promedio es:
$[f(2) - f(1)] / (2-1) = [(40 - 25) / 1]$ m/s= 15 m/s
. entre $t = 2$ y $t = 3$ la velocidad promedio es:
$[f(3)-f(2)] / (3-2) = [(45 - 40) / 1]$ m/s = 5 m/s

- Alcanza la altura máxima de 45 metros a los 3 segundos de haber sido lanzado.

	➢ En todo el trayecto de subida la velocidad promedio es: $[f(3) - f(0)] / (3\text{-}0) = [(45 - 0) / 3]$ m/s = 15 m/s

Supongamos que nos interesa conocer la velocidad del objeto a los dos segundos de haber sido lanzado. Comencemos calculando la velocidad media o promedio del objeto en intervalos de tiempo anteriores y posteriores a dos, cada vez más cortos a partir de dos, completando el siguiente cuadro:

intervalos de tiempo en segundos	velocidad promedio en m / s
1,9 – 2	$[f(1{,}9) - f(2)] / (1{,}9 - 2) = (38{,}95 - 40) / (-0{,}1) = 10{,}5$
1,99 – 2	
1,999 – 2	
2 – 2,1	
2 – 2.01	
2 – 2,001	

Si continuamos aplicándole a t=2 incrementos positivos o negativos cada vez más pequeños:

➢ ¿podremos suponer que la velocidad promedio tiende a un “valor límite” igual a 10 m/s, siendo ésta la velocidad de la pelota a los dos segundos de haber sido lanzada, es decir en el instante t=2?

Lo verificamos utilizando la definición de límite de una función en un punto:

- Simbolizando con “h” al incremento aplicado desde el punto 2, la velocidad promedio del objeto en el intervalo (2, 2+h) si $h > 0$, o (2+h, 2) si $h < 0$ es:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{30\,(2+h)-5\,(2+h)^2-(60-20)}{h}$$

Aplicando a esta expresión el límite para h tendiendo a cero, obtenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{30(2+h)-5(2+h)^2-(60-20)}{h} == \lim_{h\to 0}(10-5h) = 10$$

Queda así comprobada la veracidad de la suposición que habíamos hecho en base a nuestras observaciones:

Este valor límite de la velocidad promedio, 10 m/s, es la velocidad del objeto en el instante $t = 2$ y recibe el nombre de “derivada de la función f en el punto $t = 2$”.

➢ *¿Cuál es el significado geométrico de la velocidad promedio?*

Interpretemos por ejemplo la velocidad promedio en todo el trayecto de subida: $\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{45}{3} = 15$ es la pendiente de la recta “s” que pasa por los puntos de coordenadas (0,0) y (3, f(3)). O sea que la velocidad promedio en un intervalo de tiempo, es la pendiente de la recta que corta a la gráfica de f en los puntos cuyas abscisas son los extremos de dicho intervalo, llamada “recta secante” a la curva en tales puntos.

➢ *Considerando los intervalos del cuadro ¿Qué ocurre con las rectas secantes a la curva cuando nos aproximamos a t=2 por la derecha o por la izquierda?*

Obviamente varían sus posiciones tendiendo a una única posición límite, es decir a una única recta, llamada “recta tangente” a la curva en el punto de coordenadas (2, f(2)).

➢ *¿Cuál es entonces el significado geométrico de la velocidad instantánea?*

“La velocidad del objeto en el instante t=2, es decir 10, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa t =2.”

Y aquí está entonces la relación entre los dos problemas que mencionamos al comienzo, en la referencia histórica.
Si ahora, en lugar de la función *f* y el punto *t*=2 que consideramos en el problema 2, generalizamos nuestro razonamiento pensando en una función *f* definida en un cierto intervalo y en un punto x_0 interior a dicho intervalo, llegamos a la siguiente definición:

Sea *f* una función definida por lo menos en un intervalo abierto (a,b) y sea x_0 un punto perteneciente a dicho intervalo. Sea *h* un incremento positivo o negativo del punto x_0 de modo que $x_0 + h$ pertenezca también al intervalo (a,b).
Formamos el cociente incremental o cociente de diferencias: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$ cuyo numerador y denominador son los incrementos de la variable dependiente y de la variable independiente respectivamente. Este cociente representa la "variación media" de la función *f* cuando *x* varía de x_0 a $x_0 + h$.
Luego estudiamos el límite de dicho cociente cuando *h* tiende a cero. *Si este límite existe y es finito*, entonces se le da el nombre de *derivada de la función f en el punto* x_0, se lo simboliza $f'(x_0)$ y *representa la "variación instantánea" de la función f en el punto* x_0:
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

- ¿Existe siempre la derivada?

En la definición de derivada, el límite del cociente incremental es una indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$, de modo que para que exista derivada esta indeterminación debe poder ser salvada.

- ¿Cómo se interpreta el resultado del siguiente límite: $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$?
- ¿Cuál es la relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función?

Con la misma metodología que hemos venido aplicando, se orientará al alumno para que pueda responder estas preguntas.

- Si suponemos que en cada punto del (a,b) existe un número real, límite del cociente incremental, y si relacionamos cada punto de ese dominio con el valor del límite correspondiente, ¿qué ha quedado definida?

Se conjetura que por los conocimientos que tienen los alumnos de la definición de función, pueden responder a esta pregunta.

- ¿Cuál es la vinculación entre la función f y su derivada f'?

Análogamente se analizarán las situaciones de no existencia del límite del cociente incremental en algunos puntos del (a,b) y sus interpretaciones geométricas, las cuales obran como fotografías que ayudan al alumno a la construcción del conocimiento.

Conclusiones

Lo que se ha presentado es un análisis preliminar de una Ingeniería Didáctica en el cual las elecciones del profesor han buscado la construcción del concepto de derivada de una función por el análisis de problemas, en una ventana conceptual que se nutre de los cuadros mencionados al comienzo y profundiza la vinculación con el concepto de límite de una función. Los problemas elegidos, creemos que son adecuados para entender el concepto de derivada como tasa de variación instantánea. Creemos que a partir de la aprehensión de ese significado el alumno podrá construir el concepto de derivada.

Agradecimientos
ECO-17 "La ingeniería didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares".

ECO-16 “La elaboración y evaluación de los materiales curriculares para la Matemática Básica de carreras de Ciencias Económicas”.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *El lugar de la didáctica en la formación de profesores.* México. Grupo Editorial Iberoamericano. 7-23

Artigue, M., Douday, R., Moreno, I. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericano. 34-56.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Actes de la XXVIII Recontre de la CIEAEM*, Louvain La Nueve, 5-12.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4, 2, 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7,2 , 33-115.

Brousseau, G. (1988). *Los diferentes roles del maestro.* Buenos Aires. U.Q.A.M.

Brousseau, G. (1996). La Didàctique des Mathemàtiques en la formació del professorat. *Butlleti de la Societat Catalana de Mathemàtiques*. Vol 11, Nº 1 pág. 33-45.

Chevalard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática.* Editorial ICE-Horsori. 213-225; 277-290.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas.* (4ª ed.) México. International Thomson Editores.