

LA ENSEÑANZA DE LA MODELACIÓN EN CLASE DE FÍSICA Y DE MATEMÁTICAS

Ruth Rodríguez Gallegos

Equipo Informática et Aprendizaje de las Matemáticas (IAM) (Francia – México)

Ruth.Rodriguez@imag.fr

Campo de investigación: modelación matemática. Nivel educativo: medio
Palabras clave: modelación, praxeología, técnica, modelo pseudos-concreto

Resumen

La introducción de nuevos planes de estudio en Francia (2002), muestra la importancia que tiene actualmente la enseñanza y aprendizaje de la modelación, principalmente en disciplinas científicas como Matemáticas y Física. En los programas oficiales y libros del último año de preparatoria se observa la introducción de la noción de ecuación diferencial como objeto de estudio pero también como herramienta para modelar diversas situaciones físicas. En esta investigación, estableceremos un *modelo* del proceso de modelación que constituya una referencia para posteriormente caracterizarlo, desde un punto de vista antropológico, en dos instituciones diferentes: la clase de matemáticas y la clase de física.

Introducción

Esta investigación está motivada por el creciente interés que a nivel mundial, y en particular en Francia, se ha observado en los últimos años de mostrar a los alumnos la utilidad de las Matemáticas en otros dominios de la ciencia.

A nivel mundial el proyecto PISA^{††} establece que la cultura matemática es un objetivo de formación del futuro ciudadano del siglo XXI. Esta cultura es definida como “*la capacidad de un individuo a identificar y a comprender el papel jugado por las matemáticas en el mundo*”. PISA privilegia los conocimientos y las habilidades de los alumnos para resolver problemas de la vida real ya que fuera del contexto escolar los alumnos serán confrontados a situaciones problemáticas en las cuales deberán hacer uso de sus conocimientos matemáticos. Los nuevos programas oficiales de preparatoria en Francia, puestos en práctica desde el 2002, también destacan el papel de las Matemáticas como disciplina al servicio de otras ciencias. El fin del liceo es la culminación de los estudios secundarios y abre las puertas a los estudios superiores. “*Las carreras en la universidad son naturalmente diversas y ofrece a las matemáticas un lugar variable. Para algunos alumnos, ella será una materia central pero para todos es una herramienta de cálculo y de modelación*” (programa oficial de Matemáticas, p. 64).

La modelación en Matemática Educativa

Una referencia sobre las investigaciones realizadas alrededor de la enseñanza de la resolución de problemas y de la modelación a inicios de los 90's es el trabajo de Blum y Niss (1991). Los autores definen como problema cuando una situación nos conduce a interrogarnos sobre ella y sobre la cual no disponemos de métodos o algoritmos directos para responder a determinadas preguntas. Estos autores distinguen dos tipos de problema: matemáticos y aplicados. Los problemas aplicados, situados desde un inicio en el “*mundo real*” (el resto del mundo fuera de las matemáticas) son de interés en nuestro trabajo El paso entre una situación

^{††} Proyecto de los países de la OCDE que estudia, desde 1997, los resultados de los sistemas educativos de 43 países en términos de los conocimientos adquiridos por jóvenes de 15 años en las áreas de lectura, matemáticas y ciencias.

real hacia la construcción de un modelo matemático es denominado modelación por Blum y Niss en esa época. Esta definición evolucionará en trabajos posteriores. La aparición en foros internacionales, como el Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME) y el Congreso Internacional de la Enseñanza de la Modelación y Aplicaciones (ICTMA)^{‡‡}, de la modelación como objeto de estudio desde inicios de la década de los 90's hasta nuestros días, es una muestra de la importancia y el interés que ha tomado el tema en la comunidad de Matemática Educativa.

Es importante señalar la existencia del estudio ICMI^{§§} 14 “Aplicaciones y Modelación en Matemática Educativa” (Blum, 2002) lanzado, en el 2002, por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI). El estudio tiene como finalidad reflexionar sobre el estado del arte actual de este tema y de proponer direcciones posibles para la práctica y la investigación alrededor de la modelación^{***}.

Modelo del proceso de modelación

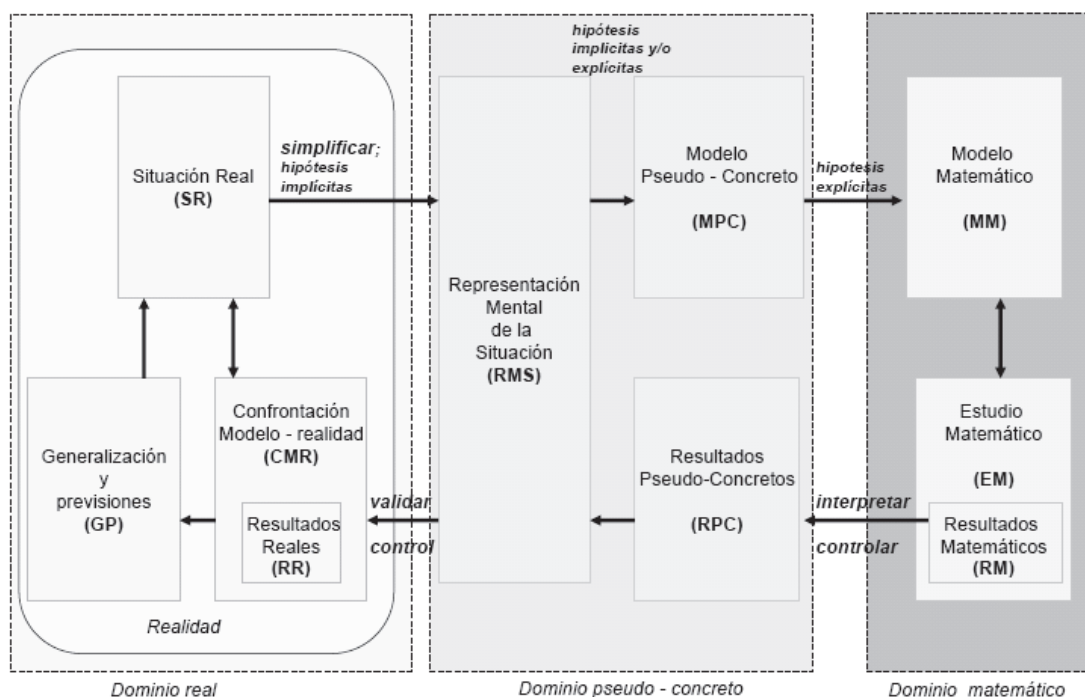
Blum (2002) retoma, en ICMI 14, parte de los elementos teóricos introducidos en su trabajo anterior (Blum y Niss, 1991) pero esta vez precisa que “es común de utilizar el término de modelación matemática en el sentido del proceso completo que consiste a estructurar, modelar, trabajar matemáticamente e interpretar/validar (en ocasiones varias veces)”. Un aspecto interesante es la introducción de la etapa de “*modelo real*” como una etapa intermediaria entre la situación real de inicio y el modelo matemático.

Esta misma distinción ya ha sido realizada por Henry (2001) donde este autor distingue la etapa de “*modelo pseudos-concreto*” en la cual una elección de los aspectos pertinentes de la situación inicial con respecto a una pregunta es llevada a cabo, ignorando otros aspectos no relevantes y donde se establecen las primeras hipótesis de manera explícita (la mayor parte del tiempo implícitamente). La existencia de esta etapa intermedia citada por Blum así como por Henry es primordial en nuestro trabajo ya que del punto de vista de la enseñanza permite al alumno pasar gradualmente de una situación abierta (dominio de la realidad) a un modelo matemático preciso (dominio matemático). Otro trabajo importante es el realizado por Borromeo (2006), donde ella propone la incorporación de la etapa de representación mental. Esta es una etapa intermedia entre la situación real y el modelo pseudos concreto. Para Borromeo, en esta etapa es posible describir el tipo de procesos internos con respecto a la imagen mental del individuo durante y después de la lectura de una tarea de modelación relativamente compleja. El objetivo del trabajo de Borromeo es estudiar el proceso de modelación desde una perspectiva cognitiva. A partir de los esquemas de modelación propuestos (Blum 1991 y 2002; Henry, 2001; Borromeo, 2006), estableceremos nuestro modelo del proceso de modelación de referencia para nuestros análisis posteriores. El proceso de modelación de referencia será conformado por 8 etapas las cuales ilustramos a continuación con el siguiente esquema:

^{‡‡} Congreso realizado cada dos años desde 1983. Las actas permiten observar una serie de ejemplos de estudios y de contribuciones a este tema en todos los niveles escolares.

^{§§} Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, siglas en Inglés).

^{***} Una conferencia preliminar fue realizada en Alemania (2004) y el resultado del estudio ICMI 14 está próximo a publicarse. Fecha posible de publicación 28 de noviembre 2006 por la editorial Springer.



Metodología

Nos interesa estudiar el proceso de modelación como objeto de enseñanza así como precisar la manera en la cual este proceso es llevado al sistema escolar, en particular en el último año de estudios en el liceo en Francia. Para ellos realizaremos observaciones en clase de física y matemáticas cuando la noción ecuación diferencial es introducida como una herramienta para modelar diversas situaciones extra-matemáticas.

En términos de Chevallard (1992), consideremos la institución del último año de preparatoria y supongamos que las sub-instituciones Clase de Física y Clase de Matemáticas son diferentes. Establecemos como consecuencia que el tipo de proceso de modelación puesto en práctica en cada una de ellas también lo es. Resta a confirmar o refutar lo anterior gracias a observaciones y análisis realizados.

En un primer tiempo, un primer análisis de programas oficiales nos permitirá escoger el tema adecuado a estudiar con detalle en ambos cursos. En un segundo tiempo, un análisis praxeológico de manuales de clase nos permitirá caracterizar el tipo de modelación que es enseñado en cada una de las sub-instituciones, las etapas (ver esquema) que son más y menos tratadas, así como determinar el tipo de actividades propuestas a los alumnos y el tipo de técnicas enseñadas para llevarlas a cabo.

Elementos teóricos

La teoría de la transposición didáctica desarrollada por Chevallard (1992) evidencia la aparición sistemática de una distancia entre el saber sabio o experto (nuestro modelo de referencia), el saber a enseñar (lo establecido por los programas oficiales) y el saber enseñado (lo que es llevado al aula de clase) a causa de diversas limitaciones del funcionamiento del

sistema de enseñanza. Nos interesa estudiar la transposición de nuestro proceso de modelación de referencia en el ámbito escolar.

En lo que respecta el análisis de manuales para conocer el tipo de actividades propuestas a los alumnos, la noción de praxeología es nuestra herramienta de análisis. Artaud (1997) establece que una praxeología es una respuesta a la cuestión de cómo realizar una determinada tarea aunque en general no es una tarea aislada que aparece sino un tipo de tareas T. Para poder responder a una tarea t del tipo de tareas T habrá que emplear una técnica τ . La justificación de esta técnica es dada por la tecnología θ y ésta a su vez puede ser justificada gracias a la teoría Θ . Se llega así a un modelo praxeológico de la forma $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Análisis praxeológico de manuales de matemáticas

El programa oficial de la clase de Matemáticas establece que se mostrará a los alumnos uno o dos ejemplos de esta práctica con situaciones extra-matemáticas que conduzcan al establecimiento de una ecuación diferencial *simple* y donde los alumnos serán guiados en el trabajo de traducción matemática. Los autores del programa afirman la importancia de confrontar a los alumnos al menos una vez al proceso de modelación pero precisan que ninguna competencia será exigida en el examen del *baccalauréat*^{†††}. Dos casos son posibles: una ecuación diferencial es propuesta por el enunciado del ejercicio restando al alumno de proponer la familia de las soluciones generales de la misma o una solución aproximada por el método de Euler es requerida. La utilización de la palabra traducción en lugar de modelación implica que el pasaje entre una situación real hacia el establecimiento de un modelo matemático es una traducción de lo que se presenta en el enunciado sin confrontar al alumno a hacer elecciones o establecer hipótesis del fenómeno en cuestión.

Realizando un estudio en términos de praxeologías a los ejercicios no resueltos del capítulo “Ecuaciones Diferenciales” de tres manuales de la clase de Matemáticas, nosotros identificamos, en la introducción de la ecuación diferencial como herramienta de modelación, situaciones extra-matemáticas modeladas por: a) una ecuación diferencial de la forma $y' = ay + b$ con a y b constantes y b) una ecuación diferencial diferente pero que se puede transformar a una de la forma $y' = ay + b$ con a y b constantes.- en este caso todas las indicaciones serán dadas al alumno (programa oficial, confirmado con el análisis de los ejercicios de los manuales).

El tipo de tareas más frecuentemente observadas es la búsqueda de la solución general (T_{SG}) y particular de la ecuación diferencial (T_{SM}). El establecimiento del modelo por los alumnos es poco observado, casi ausente. La transición de los resultados matemáticos (Estudio Matemático) en términos de la situación real (Confrontación Modelo Realidad) es tratada de manera simple con una simple reformulación de términos matemáticos en términos de los objetos reales, sin representar gran dificultad en los alumnos. La técnica τ_{SG} presente en los manuales para *encontrar* la familia de la solución de una ED de la forma $y' = ay + b$ es la utilización del teorema establecido previamente por el profesor en clase y que afirma que las familia de soluciones son de la forma $Ce^{at} - b/a$; la consigna es de “aprenderse este resultado de memoria”. Evidentemente, la justificación de esta técnica θ_{SG} , la demostración del teorema, es dada en clase pero éste no es un conocimiento exigido posteriormente al alumno.

^{†††} Examen de fin de año que valida los tres años de liceo a nivel nacional, comúnmente llamado *BAC*.

Análisis de praxeológico de manuales de física

Aplicando la misma metodología para el caso del programa de física, una primera revisión del mismo nos permite ver que el objeto ecuación diferencial (ED) es una herramienta de modelación en tres grandes dominios: la radioactividad, la mecánica y los circuitos eléctricos. Escogiendo como tema de estudio la parte de Electricidad y analizando los ejercicios propuestos en el capítulo “Circuito RC” (resistencia-condensador), donde la carga y descarga de un condensador es estudiada, identificamos tres tareas a realizar con respecto a la modelación:

T_{EED} : Establecimiento de la ecuación diferencial para modelar la variación (en el circuito RC) de la tensión en bornas del condensador u_C en función del tiempo Se parte de una descripción verbal en términos de la física para llegar a una ED de la forma $u_C' + a u_C = b$ con a, b constantes.

T_{VSG} : Verificación de que una solución general es solución de la ED establecida. La técnica τ_{VSG} es la sustitución (en la ED) de la solución general dada previamente en el enunciado.

T_{SP} : Establecer una solución particular de la ecuación diferencial en términos de los parámetros del circuito, donde las condiciones iniciales a utilizar son normalmente establecidas por los alumnos.

En este caso, señalemos que el establecimiento del modelo por los alumnos en clase de física es importante ya que el proceso de modelación es una práctica cotidiana de los físicos. Por otro lado, se encuentra un tipo de tareas semejante a las observadas en clase de matemáticas para la determinación de una solución general y particular pero en esta ocasión el tipo de técnica que se exige del alumno es la comprobación mediante la sustitución en la ecuación previamente establecida por los propios alumnos. La justificación de una tal técnica pertenece más a un dominio matemático y en este caso tampoco observamos una justificación para ésta al interior de la clase de física (en términos de teoría propia a la física).

Conclusión

El proceso de modelación puesto en práctica en clase de física y matemáticas difiere de nuestro esquema de referencia por lo que reconocemos la transposición de este proceso el ámbito escolar. La situación inicial de la gran mayoría de los ejercicios observados en los manuales de ambas clases está situada en un dominio pseudos-concreto ya que ciertas elecciones son ya realizadas y sólo son mencionadas las variables que intervendrán en el modelo matemático final (consecuencia: las etapas de la Representación mental de la situación y de la confrontación Modelo-Situación Real se encuentran también al interior de este dominio). La etapa de Generalización y Previsiones desaparece en situación escolar (en base a nuestras observaciones y análisis realizados reafirmando lo observado en un estudio anterior en Rodríguez (2003). De acuerdo a Henry (2001), esta etapa requiere de conocimientos especializados en el dominio extra-matemático que interviene en la situación lo que podría ser una razón de la dificultad que representaría si esta estuviera totalmente a la carga de los alumnos a este nivel.

El proceso de modelación existente en clase de Matemáticas es mostrado a los alumnos de manera parcial evitando confrontarlos a etapas claves de esta práctica. La gran parte del tiempo, los alumnos no establecen el modelo lo cual resta significado a la práctica. El Estudio

Matemático del modelo propuesto exige al alumno *tener en mente* la forma general de la solución. La especificación de la solución particular a la situación, siendo las condiciones iniciales dadas en el enunciado, no propone mayor reto a los alumnos. En resumen, el proceso de modelación existente en esta clase es lejano a aquel vivido por los expertos y en términos de la enseñanza no permite al alumno el enfrentarse al acto de modelar de manera completa. En clase de física, se observa una importancia mayor dada a este proceso de modelación. La etapa de Modelo Matemático es propuesta al alumno en clase y una interacción entre ambas disciplinas (Matemáticas y Física) es fundamental para poder interpretar en términos de los componentes del circuito – resistencia R , capacidad C – los resultados obtenidos matemáticamente. Observamos que en esta disciplina el proceso de modelación vive de manera más cercana a nuestro esquema de referencia y algunas etapas son más tratadas en particular el establecimiento del modelo y de las condiciones iniciales para encontrar una solución particular lo cual permite al alumno un mayor aprendizaje respecto a la modelación en Física.

La búsqueda de una solución general para $y' = ay + b$ en ambas sub-instituciones (T_{SG} y T_{VSG}) da lugar a la existencia de dos técnicas distintas ($\tau_{SG} \neq \tau_{VSG}$), correctas o no, dependiendo de la clase donde la tarea es formulada (contrato didáctico).

El diseño de situaciones que pongan de manifiesto más etapas del procesos de modelación a la responsabilidad de los alumnos es una tarea que se revela primordial para mostrar los alcances y también las limitaciones de este tipo de práctica a alumnos que culminan sus estudios secundarios y para los cuales las Matemáticas serán, seguramente, una ciencia de servicio en su futuro profesional.

Referencias bibliográficas

- Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la IX Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Houlgate: ARDM et IUFM Caen, Francia.
- Blum, W. (2002). ICMI 14: Applications and modelling in mathematics education – Discusión Document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1-2), 149-171.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37-68.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (2), 86-95.
- Bulletin Officiel (2001). Programme de l'Enseignement des Mathématiques en Classe de Terminale Série Scientifique. No. 4 30 Août 2001. 63-71. Francia.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-111. La pensée Sauvage. Francia.
- Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En M. Henry (Ed), *Autour de la modélisation en probabilités..* (pp.149-159). Besançon, Francia : Commission Inter-IREM Statistiques et Probabilités PUFC.
- Rodríguez Gallegos, R. (2003). Le contrat didactique relatif aux équations différentielles comme outils de modélisation en classe de Terminale S. Tesis de maestría no publicada. Université Joseph Fourier, Francia.