

## EL USO DEL GRAPHER EN LA ENSEÑANZA DE LAS DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD: EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Javier Barrera Ángeles, Tulio Rafael Amaya de Armas, Petra Téllez Reyes  
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.  
Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo  
Centro de Bachillerato Tecnológico e Industrial y de Servicios No 8.  
jbarrera12@hotmail.com, tuamal@hotmail.com, ptr45@hotmail.com

México  
Colombia  
Mexico

**Resumen.** -En este documento se reportan resultados de una investigación llevada a cabo con estudiantes de nivel universitario, cuyo objetivo fue determinar de qué manera el uso del software (Grapher) facilita el aprendizaje de la distribución normal mediante procesos matemáticos en resolución de problemas. Se diseñó una metodología a través de un caso de estudio, con una muestra de 11 estudiantes. Se utilizó el método de comparación en dos fases de aplicación. La enseñanza de la distribución normal de forma tradicional, centra más su atención en la parte algorítmica que en la reflexión misma de la actividad. Sin embargo, se pudo constatar que el uso del Grapher motivó de manera importante a los estudiantes para resolver problemas con la distribución normal, permitiendo así, la reflexión y análisis durante el proceso de resolución.

**Palabras clave:**- grapher, aprendizaje, distribución normal, reflexión, estrategias.

**Abstract.** -This paper reports result of a research conducted with college students, whose goal was to determine how the use of software (Grapher) facilitates the learning of normal distribution using mathematical processes to solve problems. A methodology was designed through a case study with a sample of 11 students. We use the method of comparison in two stages of implementation. The teaching of the traditional normal distribution focuses more on the algorithmic reflection of the activity itself. However it was found the use of an important reason, students using grapher to solve problems with the normal distribution, thus, reflection and analysis during the resolution process.

**Key words:**- grapher, learning, normal distribution, reflection, strategies.

### Introducción

El propósito de este documento es presentar resultados del reporte de investigación, cuyo objetivo principal fue determinar de qué manera el uso de la tecnología facilita el aprendizaje de la distribución normal a través de los procesos matemáticos en resolución de problemas, con estudiantes de nivel universitario. Existen diversas opiniones a favor del uso de la tecnología, por ejemplo, Estrada (2002) menciona que la tecnología moderna ha creado las condiciones esenciales para manipular los objetos matemáticos y, al mismo tiempo, ver los objetos sobre estas acciones en la representación dinámica mostrada sobre la pantalla de la computadora. Así, la tecnología es una infraestructura representacional que amplía las posibilidades del pensamiento humano (Kaput, 1994). También se menciona que la utilización

de la informática de tipo cualitativo representa para el estudiante un poderoso medio de transformación en su modo de entenderlas y desarrollarlas (Kutzler, 1999). De igual manera, se dice que las técnicas basadas en el análisis de datos y su interpretación es cada día más importante (Rodríguez, 2004). Por otra parte existen investigaciones que han estudiado conceptos de la probabilidad, como la distribución normal (Batanero, et al. 2001, Lavalle, et al. 2003 y García, et al. 2009). Para llevar a cabo esta investigación se hizo una selección adecuada de problemas de aplicación de la distribución normal, a través de un caso de estudio donde participaron estudiantes universitarios. El método empleado en esta investigación fue de comparación: la primera actividad fue desarrollada con lápiz y papel y la segunda con el uso del Grapher. Algunos de los resultados más sobresalientes son: la enseñanza tradicional centra más su atención en la parte algorítmica que en la reflexión misma de la actividad y el uso del Grapher creó un ambiente interactivo que motivo a los estudiantes a la reflexión y análisis durante el proceso de resolución.

### Referentes teóricos

La relación sujeto-herramienta tecnológica permite observar patrones de conducta en el sujeto cuando interactúa con ella. En este sentido, pueden apreciarse dos situaciones: la primera tiene que ver con situaciones estáticas o inertes; una característica esencial de este punto, es que las acciones de los estudiantes no reaccionan con las representaciones de los objetos matemáticos. La segunda tiene que ver con un medio interactivo, en el cual los estudiantes reciben respuesta a sus acciones (Estrada, 2002). En este sentido, se dice que la tecnología moderna ha creado las condiciones esenciales para manipular los objetos matemáticos y, al mismo tiempo, ver los objetos sobre estas acciones en la representación dinámica mostrada sobre la pantalla de la computadora.

Kaput (1994) señala que la tecnología es una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano; afirma que el uso de las herramientas tecnológicas conduce a nuevas maneras de pensar o razonar por parte del usuario. Una utilización de la informática de tipo cualitativo, que incide mucho más en los procesos de modelización y construcción de las matemáticas que representa para el estudiante un poderoso medio de transformación en su modo de entenderlas y desarrollarlas (Kutzler, 1999).

Se está avanzando hacia una sociedad cada vez más informatizada y a una comprensión de las técnicas basadas de análisis de datos y su interpretación es cada día más importante (Rodríguez, 2004). A pesar de ello, el número de investigaciones sobre la didáctica de la estadística es aún muy escaso, en comparación con las existentes en otras ramas de las matemáticas. Sin embargo, existen investigaciones importantes que discuten el uso de las

herramientas tecnológicas en la enseñanza de la estadística. Por ejemplo, Batanero, et al. (2001) quienes han menciona que a pesar de la importancia de la distribución normal, no se han encontrado estudios que muestren los errores y dificultades que presentan los estudiantes en el estudio de esta distribución. Esta investigación toma el referente teórico sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos.

Además, el significado de objeto institucional de la distribución normal es tomado de tres referentes: del carácter epistemológico, la literatura actual y de la experiencia propia y la de los estudiantes con el enfoque basado en el uso de los ordenadores. A partir de esta concepción, se incorporan los siguientes elementos: *extensivos* (las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto), *ostensivos* (las herramientas semióticas disponibles para representar o para operar con los problemas y objetos involucrados), *actuativos* (procedimientos y estrategias para resolver problemas), *intensivos* (propiedades características y relaciones con otras entidades) y *validativos* (argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones).

Por otra parte, Lavalle, et al. (2003) en su estudio, analizan la presencia de razonamientos heurísticos; entendiendo a la “heurística” como el proceso mental que reduce la complejidad del problema, de modo que sea accesible al resolutor. En esta propuesta, los autores establecen que los cursos de formación deben contemplar ciertos aspectos complementarios, entre los que destacan: a) reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos particulares y el estudio de las transformaciones que experimentan para adaptarlos a la enseñanza; b) conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias de resolución de problemas.

Otra investigación importante es la desarrollada por García, et al, (2009), cuyo objetivo es proporcionar a estudiantes de la licenciatura en matemáticas y, en general a los alumnos de asignaturas básicas de probabilidad y estadística, de cualquier área, de material de apoyo a los contenidos teóricos y prácticos que se desarrollen en clase, sin que ello deba entenderse como un sustituto del profesor a la hora de explicar los contenidos de la materia, sino como un complemento a la clase presencial. Como resultado de esta aportación se tuvo un considerable descenso en el grado de dificultad encontrado después de haber utilizados los materiales (software llamado CDPYE, el cual administra un determinado conjunto de materiales docentes que incluyen: presentaciones multimedia, programas interactivos, que permitan realizar aplicaciones a problemas concretos, así como ejercicios con los cuales el alumno pueda comprobar de forma interactiva los conocimientos adquiridos) en todos y cada uno de los aspectos a que se hacía referencia.

## Planteamiento y análisis de resultados

La distribución normal es la más utilizada en la estadística. Constituye un buen modelo para muchas poblaciones continuas, aunque no para todas. La media de una variable aleatoria normal puede tener cualquier valor y la varianza cualquier valor positivo. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal con media  $\mu$  y  $\sigma^2$  está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

La proporción de una población normal que se encuentra a cierto número de desviaciones estándar de la media es la misma en cualquier población normal. Por esta razón, cuando se trabaja con poblaciones normales, se convierte las unidades en las cuales se midió originalmente las unidades de la población a unidades estándar. Estas últimas indican a cuántas desviaciones estándar se encuentra un dato de la media poblacional (Navidi, 2007).

Para esta investigación se consideraron los siguientes problemas:

1. Un proceso fabrica cojinetes de bolas cuyos diámetros se distribuyen normalmente con media 2.505 cm y desviación estándar de 0.008 cm. Las especificaciones requieren que el diámetro esté dentro del intervalo  $2.5 \pm 0.01$  cm. ¿Qué proporción de cojinetes de bolas cumple con la especificación?
2. Si el proceso puede recalibrarse para que la media sea igual a 2.5 cm, el centro del diámetro del intervalo de la especificación. La desviación estándar del proceso sigue siendo de 0.008 cm. ¿Qué proporción de los diámetros satisface la especificación?
3. Suponga que se ha recalibrado nuevamente el proceso de tal forma que la media del diámetro mide ahora 2.5 cm. A qué valor debe reducirse la desviación estándar para que 95% de los diámetros satisfaga la aplicación.

Estos problemas permiten analizar el proceso en la resolución de problemas y estrategias que el estudiante utiliza en la obtención del resultado, a través del significado institucional de la distribución normal. Además, se busca que relacione la información que provee cada problema, de manera que el primer resultado le permita pensar en la solución del segundo y, así consecutivamente, dado que se trata del mismo problema sólo que variando los datos y cambiando las preguntas. Por otra parte, se usa Grapher como herramienta que permite resolver problemas a través del uso de los elementos tales como extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos; a través de la manipulación de la ecuación (1). En este sentido; se usa la herramienta tecnológica para dar repuesta a los problemas, lo que permite un mayor dinamismo en el manejo de los objetos matemáticos, dando lugar a razonamientos heurísticos según Lavallo (2003).

Un aspecto relevante en la selección de estos problemas tiene que ver con la interrelación entre los datos y las preguntas (variables aleatorias, variables normalizadas, media y variación de la media, desviación estándar, etc.), las cuales propician que durante el desarrollo del proceso en la resolución de estos, bajo cualquiera de las dos situaciones pretenden que el estudiante desarrolle estrategias en cada caso que le permitan reflexionar sobre sus resultados, desde el punto de vista tanto inerte como dinámico. De esta manera, el objetivo de esta investigación es determinar de qué manera el uso de la tecnología facilita el aprendizaje de la Distribución normal a través de los procesos matemáticos en resolución de problemas.

### Metodología

El diseño de esta investigación tuvo como sustento un estudio de casos a partir de una muestra de 11 estudiantes de segundo año universitario (cuarto semestre de Lic. En sistemas computacionales, de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo). El tipo de método que se empleó fue de comparación a partir de un primer momento y una segunda aplicación en otro momento. A estos estudiantes se les dio un curso de probabilidad y estadística básica (tomando como referente la literatura actual: Walpole, 1992, Navidi, 2006, Richard et al., 1996); este curso tuvo una duración de 3 meses, tomando 5 horas a la semana de clase. Y durante el tercer mes del curso se instruyó a los estudiantes sobre el manejo del Grapher, en principio no se les comentó cual era la intención en el manejo de esta herramienta. Después del tercer mes se aplicaron los problemas previamente seleccionados de acuerdo al objetivo de esta investigación; la aplicación duró dos horas. Al siguiente día nuevamente se les pidió que contestaran los problemas; que para sorpresa de ellos, eran los mismos, una de las recomendaciones era que explicaran en la medida de lo posible el proceso que realizaban en cada problema.

### Análisis de resultados

Después de haber realizado todo el trabajo y recabado la información escrita así como las presentaciones realizadas en la computadora, se procedió al análisis de la información, la cual se describe a continuación.

#### *a. Actividad con lápiz y papel*

En la tabla 1, se presentan los resultados obtenidos de la primera situación, la cual tiene que ver con el trabajo a lápiz y papel o prueba escrita. Para ello hemos convenido en la siguiente codificación: 0(sin respuesta), 1(sólo intento), 2(procedimiento sin resultado), 3(procedimiento y respuesta correctos) y 4(procedimiento incorrecto). Además se incluyen los elementos que

utilizaron los estudiantes para responder a cada problema descritos bajo la siguiente subcodificación: \*1(extensivos); \*2(ostensivos); \*3(actuativos); \*4(intensivos) y \*5(validativos).

Tabla 1. Descripción de resultados de la primera situación.

Alumno/Problema	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Graficas
1	4*3	0	0	1
2	4*2*3	0	0	1
3	4*2*3*4	0	0	1
4	4*2*3*4	4*2*3*4	4*2*3*4	1,2,3
5	4*2*3	0	0	1
6	3*3*5	3*3*5	0	1,2
7	3*2*3*5	3*2*3*5	2*2*3*5	1,2,3
8	3*2*3*4*5	3*2*3*4*5	3*2*3*4*5	1,2,3
9	3*2*3*4*5	3*2*3*4*5	4*2*3*4*5	1,2,3
10	3*2*3*4*5	3*2*3*4*5	3*2*3*4*5	1,2,3
11	0	0	0	0

De manera breve concluimos con los siguientes resultados: (3) 32% con los elementos \*2(10), \*3(10), \*4(8), \*5(1); (4) 24% con los elementos \*2(6), \*3(4), \*4(5), \*5(1); (2) 3.03% con los elementos \*2(1), \*3(1), \*5(1) y (0) 33% con los elementos. Como podemos ver, estos resultados muestran el alto grado de deficiencias que tienen los estudiantes al resolver problemas con la distribución normal. Además de que no existe reflexión alguna sobre sus respuestas.

*b. Actividad con el uso del Grapher*

La segunda situación tiene que ver con el uso del Grapher, en donde los estudiantes resolvieron los problemas con éxito; no solo han sido capaces de reflexionar sobre cada una de las actividades sino que también lograron vincular las soluciones con otros objetos matemáticos (concepto de límite y el concepto de integral). Esto se debió al dinamismo y la interactividad entre el objeto matemático y sujeto cognoscente. La visualización dinámica que proporcionó la pantalla también les permitió explorar cada resultado obtenido. Además, se hace notar que después de terminar de resolver los problemas, los estudiantes siguieron

manipulando el algoritmo cambiando el valor a los parámetros deseados y, de esta manera realizaron algunas conjeturas acerca de lo que sucedería si se cambiaran los valores de la media y desviación estándar. Otro aspecto importante observado en esta actividad tiene que ver con el uso de los elementos \*1(extensivos); \*2(ostensivos); \*3(actuativos); \*4(intensivos) y \*5(validativos), que a pesar de que es una actividad muy diferente a la primera, son utilizados para responder de manera correcta a los problemas planteados argumentando cada respuesta y reflexionando sobre otro tipo de respuestas que se producían al cambiar los valores mencionados.

### Conclusiones

Después de concluir esta investigación se considera conveniente resaltar lo siguiente: que enseñar distribuciones continuas a estudiantes de manera tradicional solo favorece la parte algorítmica; así lo demuestran los resultados derivados de este trabajo. La poca capacidad de análisis demostrada en las actividades realizadas por el estudiante en la resolución de problemas, se convierte en una actividad mecánica. Por otra parte el uso del Grapher ha motivado a los estudiantes para resolver problemas con la distribución normal; donde la manipulación de variables de un problema se representa en imágenes que simulan su comportamiento, permitiendo la reflexión y análisis de la actividad misma.

### Referencias bibliográficas

- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, B. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso de análisis de datos. *Quadrante*, pp. 59-92.
- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos en la formación del profesorado*. Tesis doctoral en didáctica de las Matemáticas i les Ciencies experimentals. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Kaput, J. (1994). *Democratizing access to calculus: New routes to old roots. Mathematics and cognitive science*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Kutzler, B. (1999). The Algebraic Calculator as a Pedagogical tool for Teaching Mathematics. In: Laughbaum, E.D, (ed.): *Hand-Held Tecnology in Mathematics and Science Education: A Collection of Paper, Teachers Teaching with Technology Short Course Program @ the Ohio State University*, pp.98-109.
- Lavalle, A., Micheli, E. y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. *Boletín de la SOAREM (Sociedad Argentina de Educación Matemática)*. Año 5 nº 17, pp.23-32.

- Levin, R. I. y Rubin, D. S. (1996). *Estadística para administradores*, 6a.Ed.Prentice Hall 1996, pp.264-277.
- García Ligeró, M. J., Hermoso, A., Maldonado, J. A., Román, P. y Torres, F. (2009). *Nuevas tendencias para enseñar probabilidades usando CDPYE*. Vol. 30. No 2, pp.173-184.
- Navidi, William. (2007). *Estadística para Ingenieros y científicos*, 1ª. Ed. Mc Graw Hill, pp 231-238.
- Rodríguez, M. (2004). Dificultades en el significado y la comprensión de conceptos estadísticos elementales y de probabilidad. *Revista premisa de la SOAREM (Sociedad Argentina de Educación Matemática)*. Año 6 nº 22, pp.13-22.
- Walpole y Myers.(1992). *Probabilidad y Estadística*, 4ª Ed. McGraw-Hill.