LA REPRESENTACIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco . Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar

Resumen. - Este trabajo forma parte de la línea de investigación sobre resolución de problemas, con incorporación de tecnología informática.

Focalizados en analizar los modos en que los alumnos de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (LEM) resuelven problemas sobre Cálculo diferencial e Integral, utilizando herramientas informáticas, nos propusimos:

*a)*corroborar si estos alumnos integran las diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica) en la resolución de problemas, y

*b)*comprobar si los procesos de conjetura, experimentación, simulación y verificación, se llevan a cabo en la resolución de problemas con herramientas informáticas..

Palabras clave:- resolución de problemas, representaciones semióticas, estrategias de resolución, heurística.

Abstract. -This paper is part of our research on problem solving, with computer technology. Focused on analyzing the ways in which students of Teaching Mathematics … (LEM) solve problems on Differential and Integral Calculus, using tools, we set:

a) verify if these students integrate different representations (graphical, numerical and algebraic) to solve problems, and

b) check whether guess processes, experimentation, simulation and verification, are performed in problem solving with informatic tools.

Key words:- problem solving, semiotic representation, solving strategies, heuristic.

Introducción

En los últimos veinte años se han realizado un gran número de trabajos referidos a la resolución de problemas en los ámbitos académicos, con distintas orientaciones. Por un lado, se han descrito modelos sobre cómo los sujetos resuelven problemas, denominados: estudios experto-novato (López-Rupérez, 1991 y Glaser, 1992). Por otro, se han desarrollado propuestas metodológicas, diseñadas explícitamente para enseñar a los alumnos a resolver problemas, con la característica común de haber evaluado su nivel de eficacia dentro del aula (Caillot y Dumas, 1987; Selveratnam, 1990; Gil y Martínez Torregrosa, 1983; Taconis, Ferguson-Hessler y Broekkamp, 2001).

Esta última orientación constituye el encuadre de nuestra línea de investigación sobre la resolución de problemas, aunque ambas perspectivas tienen elementos en común y se nutren mutuamente. En particular, el presente trabajo, indaga sobre aspectos de la resolución de problemas en la educación superior, con incorporación de tecnología informática.

Nuestro problema inicial estuvo focalizado en analizar los modos en que los alumnos de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (LEM) de la Facultad Regional General Pacheco de la Universidad Tecnológica Nacional, resuelven problemas "'*cognitivamente no-triviales*' (Selden y Selden, 1989), sobre Cálculo Diferencial e Integral, utilizando herramientas informáticas. En ese sentido, tuvimos en cuenta que la posibilidad de resolver un problema depende, mayormente, de un modo apropiado de encarar el mismo y de las representaciones que se realicen. Esta última característica ofrece un amplio campo de estudio del problema desde distintas perspectivas.

Sobre el marco de referencia de la Teoría de Duval (1999, 2000, 2004), consideramos que un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen la utilización de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones. El conocimiento de un individuo sobre un concepto es estable si él es capaz de articular diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones. Así, en la resolución de problemas, es esencial que el alumno pueda lograr una representación adecuada del problema a resolver.

Cabe señalar que cuando hablamos de "*representaciones*" es necesario considerar los siguientes cuatro aspectos:

1) *El sistema por el cual se produce la representación.* Cualquier representación se produce a través de un sistema particular. El contenido de la representación de un objeto cambia de acuerdo con el sistema de representación que se utiliza para su producción. El pensamiento humano requiere la movilización de varios sistemas de representación de producción y su coordinación. Puede ser un aparato físico (una cámara fotográfica, una pizarra interactiva, una computadora), una organización mental (las imágenes visuales de la memoria), un sistema semiótico (una gráfica, una tabla, una fórmula, un enunciado).

2) *La relación entre la representación y el objeto representado*.

3) *La posibilidad de un acceso al objeto representado, aparte de la representación semiótica*. Cabe recordar que los objetos matemáticos no pueden ser percibidos sino a través de sus representaciones.

4) *La razón por la que el uso de la representación es necesario.* Esta puede ser para comunicación o para procesamiento.

Parafraseando a Duval, en una fase de aprendizaje, la conversión juega un papel esencial en la conceptualización (Duval, 2000). En ese sentido, juega un papel decisivo la habilidad de cambiar de "*registro de representación"* (Duval, 2000, Milevicich, 2008) en situaciones de resolución de problemas, ya sea porque otra presentación de los datos encaja mejor con un modelo ya conocido, o porque se deben poner en juego dos registros diferentes.

Otra perspectiva, no menos importante, está referida a la incorporación de herramientas informáticas en la resolución de problemas (Milevicich y Lois, 2007), lo cual contribuye favorablemente en la adquisición de habilidades tales como: conjeturar, experimentar, simular, verificar, etc., a partir de la utilización de gráficos, tablas numéricas, etc. (Milevicich y Lois, 2008).

Desarrollo

Características de la investigación: Se trabajó sobre una propuesta de investigación y experimentación que se está llevando a cabo en la Facultad Regional General Pacheco (FRGP) de la UTN, enmarcado en el proyecto "*La resolución de problemas de Cálculo en el contexto de las Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería*".

Metodología: Investigación-acción pedagógica aplicada a la resolución de problemas.

Muestra: Formada por 3 grupos de 30 alumnos aproximadamente, pertenecientes a las cohortes 2006, 2007 y 2008, de la LEM de la UTN.

Propósitos generales: Con el actual trabajo se pretende contribuir al desarrollo de una línea de investigación orientada hacia la elaboración de un cuerpo coherente de conocimientos enmarcados en la Didáctica de la Matemática, una de cuyas prioridades es conseguir en nuestros alumnos un aprendizaje significativo basado en un cambio metodológico y de actitudes. En ese contexto, se pretende que los estudiantes de la LEM comiencen a construir un conocimiento profesional fundamentado a partir de su propia práctica.

Propósitos específicos del trabajo: En primer lugar, corroborar si los alumnos de la LEM integran las diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica) en la resolución de problemas. En segundo lugar, comprobar si los procesos de conjetura, experimentación, simulación y verificación, se llevan a cabo en la resolución de problemas con herramientas informáticas.

Implementación: Con cada una de las 3 cohortes, se llevaron a cabo 5 sesiones de resolución de problemas de 1,5 h de duración. Los alumnos debieron trabajar sobre problemas de Cálculo Diferencial e Integral, que a nuestro criterio, permitieran su abordaje mediante el uso de distintos registros de representación.

Cabe observar que los problemas propuestos, tanto en la unidad de Cálculo Diferencial como de Cálculo Integral, tuvieron niveles de complejidad creciente.

Robert y Speer (2001) establecen una categorización respecto de la complejidad de los problemas. Así, en un primer nivel se encuentran aquellos donde se pide a los alumnos aplicar definiciones, propiedades o teoremas directamente. Los problemas en este nivel también implican el uso del lenguaje formal. Por ejemplo, solicitar a los alumnos que enuncien el Teorema Fundamental del Cálculo o bien, las características que debe poseer una función para que sea integrable.

En un segundo nivel, los problemas no son de aplicación directa, se requieren varios pasos, o bien hay que transformar o reconocer algo para aplicar la propiedad o teoremas necesarios. Por ejemplo, encontrar la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ o bien encontrar el intervalo sobre el cual la curva $y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt$ es cóncava hacia arriba, corresponde a una tarea de segundo nivel.

También, tomamos un problema que, a nuestro juicio, permite explorar con claridad la utilización de diferentes representaciones, por parte del alumno:

Aplique las propiedades de las integrales para probar que: $0 \le \int_1^3 \ln \mathrm{x}\mathrm{dx} \le 2\ln 3$

El problema propuesto no indicaba que propiedades debían aplicar, con lo cual los alumnos podían seleccionar diferentes caminos:

a) resolver la integral indefinida, aplicar la regla de Barrow y comparar con las cotas del problema (0 y 2ln3)

b) aplicar cualquiera de los métodos numéricos (regla del punto medio o del trapecio o de Simpson) para calcular la integral y luego comparar con las cotas,

c) aplicar la propiedad de comparación de la integral, es decir:

Si $\ln(1) \le \ln(x) \le \ln(3)\_en\_[1,3] \Rightarrow \ln(1)(3-1) \le \int_1^3 \ln(x)dx \le \ln(3)(3-1)$,

d) graficar los resultados de aplicación de la propiedad de comparación de la integral, tal como se observa en el gráfico 1

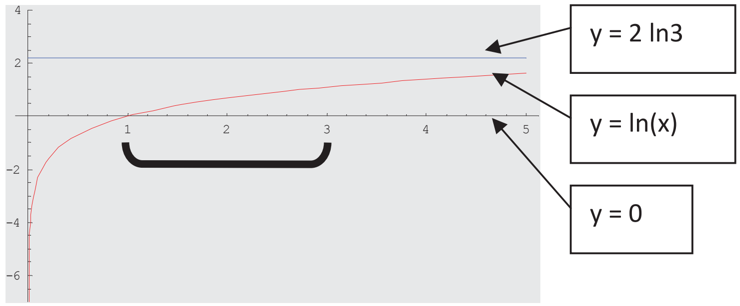

Gráfico 1. El área bajo la curva y = ln(x), comprendido entre y =0 e y = 2 ln3.

En un tercer nivel, aparecen problemas que requieren la habilidad de resolución sin pistas o contextos, dar contraejemplos, cambiar métodos, utilizar conocimientos de otros campos de las ciencias, etc. (Robert y Speer, 2001).

A modo de ejemplo, presentamos algunos de los problemas seleccionados:

Problema 1

En la figura 1 se muestra un semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes sobre P y Q. ¿A qué altura arriba del diámetro debe colocarse la recta horizontal para minimizar el área sombreada?

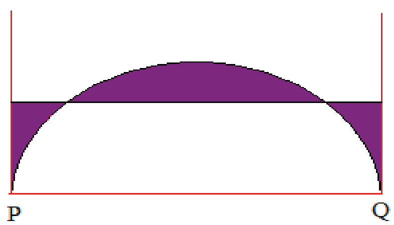

Figura 1. Semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes sobre P y Q

El problema propuesto requiere, en primer lugar, modelizar el cálculo del área mediante una ecuación que involucra la suma de 3 integrales con límites variables. Atendiendo a la solución solicitada, la función a minimizar debe estar expresada en una variable, para lo cual se requieren deducciones algebraicas apoyadas en conjeturas y análisis gráficos y numéricos.

Problema 2

Sean y(t) y V(t) la altura y el volumen del agua en un tanque en el instante t. Si el agua se fuga por un agujero de área "a" que se encuentra en el fondo del tanque, entonces la ley de Torricelli afirma que: $\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2g.y}$ *, donde "g" es la aceleración debida a la gravedad.*

a) Suponga que el tanque es cilíndrico con altura de 195 cm y radio de 64 cm y que el agujero es circular con radio de 2,5 cm. Si consideramos g = 10 m/s², demuestre que y satisface la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{y}$

b) Resuelva esta ecuación para hallar la altura del agua en el instante t, suponiendo que el tanque está lleno en el instante t = 0.

c) ¿Cuánto tardará el agua en drenar por completo?

El problema propuesto, tiene varias instancias. En primer lugar el reconocimiento de variables y constantes en la ecuación diferencial (ley de Torricelli), luego la deducción de la fórmula que representa la variación de altura de agua, donde y = y(t), su interpretación y finalmente su aplicación en una situación concreta (el tiempo necesario para vaciar el tanque).

Resultados

Las producciones de los participantes fueron plasmadas en sus hojas de trabajo (esto incluyó las resoluciones finales y los borradores), luego fueron clasificadas por sesiones y en relación con el nivel del problema (1°, 2° o 3°). Los resultados que se exhiben en la tabla 1 corresponden al tratamiento cuantitativo sobre tales producciones, agrupadas por cohorte.

Las categorías de análisis, en cada nivel de dificultad, fueron: la utilización de distintos registros de representación y la integración de dos o más registros.

Tabla 1. Resultados del análisis sobre la resolución de problemas

Categoría de problema	Registro utilizado	Año 2006	Año 2007	Año 2008
primer nivel	Utiliza registro gráfico	5 %	4 %	6 %
(aplicación directa de	Utiliza registro numérico	0 %	2 %	2.5 %
definiciones, propiedades o teoremas)	Utiliza registro verbal	23 %	31 %	28 %
	Utiliza registro algebraico	78 %	69 %	77 %
	Integra dos o más registros	45 %	47 %	34 %
segundo nivel	Utiliza registro gráfico	24 %	32 %	31 %
(se requieren varios pasos,	Utiliza registro numérico	23 %	26 %	30 %
o bien hay que transformar o reconocer algo para	Utiliza registro verbal	25 %	26 %	24.5 %
aplicar la propiedad o	Utiliza registro algebraico	79 %	78 %	67.5 %

teoremas necesarios)	Integra dos o más registros	34 %	38 %	46 %
tercer nivel (requieren la habilidad de resolución sin pistas)	Utiliza registro gráfico	48 %	56 %	57 %
	Utiliza registro numérico	67 %	68 %	57 %
	Utiliza registro verbal	45 %	47 %	39.5 %
	Utiliza registro algebraico	79 %	82 %	84 %
	Integra dos o más registros	65 %	56.5 %	54 %

Como se puede observar, no se obtuvieron diferencias importantes en los tres años para una misma categoría de análisis y en un mismo nivel dificultad, sin embargo se observan diferencias notables entre las distintas categorías. Así, el registro algebraico es el más usado, con porcentuales muy superiores al resto, en los niveles 1 y 2.

En el tercer nivel, dónde los problemas propuestos ofrecían mayores dificultades, se observa, en las tres cohortes, que los alumnos recurren más asiduamente, a representaciones gráficas y numéricas de los objetos matemáticos.

También, se puede observar, que la integración de dos o más representaciones, tiene más presencia en los problemas de tercer nivel.

En relación con el segundo propósito, en cuanto a *comprobar si los procesos de conjetura, experimentación, simulación y verificación, se llevan a cabo en la resolución de problemas con herramientas informáticas*, analizamos los logros de los diferentes grupos, por niveles de dificultad.

La tabla 2 exhibe los porcentuales de resolución correcta e incorrecta con utilización de CAS (software Mathematica) y otros software didácticos de libre distribución.

Tabla 2. Porcentuales de resolución correcta e incorrecta de problemas propuestos

Categoría de problema	Categorías	Grupo año 2006	Grupo año 2007	Grupo año 2008
primer nivel (aplicación directa de definiciones, propiedades o teoremas)	Resuelve el problema propuesto	83 %	86 %	87 %
	No resuelve el problema propuesto	17 %	14 %	13 %

segundo nivel (se requieren varios pasos, o bien hay que transformar o reconocer algo para aplicar la propiedad o teoremas necesarios)	Resuelve el problema propuesto	65 %	67 %	60 %
	No resuelve el problema propuesto	35 %	33 %	40 %
tercer nivel (requieren la habilidad de resolución sin pistas)	Resuelve el problema propuesto	48 %	40 %	52 %
	No resuelve el problema propuesto	52 %	60 %	48 %

Se observa que los porcentuales de "Resuelve el problema propuesto" son notablemente mayores para los problemas del primer nivel; algo menores, para los de segundo nivel, y bastante inferiores para los de tercer nivel. Cabe observar, que justamente, este último nivel es el que más requiere de actividades de conjetura, simulación y verificación.

Conclusiones

Luego del análisis de las 3 cohortes, los resultados nos permiten concluir que, si bien la utilización de diferentes registros de representación fue empleada por los alumnos en la resolución de los problemas propuestos, no lograron establecer una adecuada integración entre dos registros diferentes.

Tal integración es más fuerte en aquellos problemas más complejos. En ese sentido, los borradores de los alumnos, dan cuenta de las representaciones utilizadas. En algunas ocasiones prefirieron utilizar un gráfico, en otras, una tabla numérica, o bien describir verbalmente la situación, pero no se evidencian frecuentes articulaciones entre las diferentes representaciones.

En cuanto a los procesos de resolución y en relación con el segundo propósito de nuestra investigación, los logros son muy pobres, en los problemas de mayor dificultad.

Las producciones de los alumnos dan cuenta de dificultades similares en las 3 cohortes:

a) Escaso dominio de procedimientos heurísticos, generales y específicos, para resolver problemas.

b) Dificultad para planificar el proceso de resolución del problema: representación gráfica del enunciado del problema, exploración gráfica o numérica, aislamiento de la información relevante, organización de la información, planificación de estrategias de resolución, aplicación de procedimientos adecuados.

c) Tendencia a operar directamente sobre los datos explicitados en el enunciado del problema.

d) Dificultad para encontrar los datos intermedios, no explícitos en el enunciado del problema.

Consideramos que la línea de investigación sobre resolución de problemas, mediados por tecnología, tiene numerosas vetas aún por explorar. Los modos en que los alumnos resuelven, las estrategias que utilizan, las dificultades que se presentan, las validaciones que realizan; son temas de investigación, cuyos resultados podrían contribuir al diseño de una metodología de resolución de problemas más eficaz.

Referencias bibliográficas

Caillot, M. y Dumas Carrè, A. (1987). Prophy: Un enseignement de une méthodologie de résolution de problèmes. *Rapports de Recherches*, 12, 199-224. Paris: INPR.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali. Colombia: Universidad del Valle y Peter Lang S.A.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME24), Hiroshima (Japón), (pp. 55-69).

Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register, Regular Lecture en *10th International Conference on Mathematics Education* (ICME10), Dinamarca.

Gil, D y Martínez Torregrosa, J. (1983). A model for problem-solving with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), 447-455.

Glaser, R. (1992). Expert knowledge and processes of thinking. En D.F. Halpern (Eds.) *Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics*. Nueva Jersey: Hillsdale.

López Ruperez, F. (1991). *Organización del conocimiento y resolución de problemas en Física*. Madrid: MEC.

Milevicich, L y Lois, A. (2007) El ordenador como recurso didáctico en la resolución de problemas. En C. Crespo Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20, 641-646*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Milevicich, L (2008) *La construcción de los objetos matemáticos del Cálculo diferencial* e *integral a través de las representaciones semióticas*. Primer encuentro de Docentes e Investigadores de

Estadística en Psicología. Universidad de Buenos Aires, Recuperado el 20 de enero de 2009 de:

http://www.psi.uba.ar/encuentroestadistica/programa_cientifico/resumenestalleres.php?idtaller=4

Milevicich, L y Lois, A. (2008) La resolución de problemas de cálculo integral en un entorno informático. En: *Workshop, 11th International Congress of Math Education*, Monterrey, Mexico.

Robert, A. y Speer, N. (2001) Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (pp. 283-299).

Selden, J., Mason, A. y Selden, A. (1989) Can Average Calculus Students Solve Nonroutine Problems?, *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 45-50.

Selveratnam, M. (1990). Problem-Solving, a model approach. *Education in Chemistry* 27(6), 163-165.

Taconis, R., Ferguson-Hessler, M. y Broekkamp, H. (2001). Teaching science problem solving: An overview of experimental work. *Journal of Research in Science Teaching*, 38 (4), 442-468.