LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON APOYO DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN[‡‡‡]

Jorge Ávila Arciniega, Emma Antonia Jáuregui Medina, Elena Nesterova
Universidad Autónoma de Nayarit y Universidad de Guadalajara. (México)
javila@ecdif.intranets.com, emma@ecdif.intranets.com, elenan@ccip.udg.mx
Campo de investigación: modelación matemática; Nivel educativo: superior
Palabras clave: Modelación matemática, trabajo colaborativo

Resumen
En el presente trabajo se propone una técnica "generalizada" para resolver problemas, basada en actividades de modelación matemática, con empleo de diferentes sistemas de representación. La experimentación de campo se desarrolló en catorce horas lectivas con catorce alumnos de tercer semestre de la carrera de Ingeniería Química de la UACI – UAN, que trabajaron en equipos. Mediante el análisis de regresión se determinó la correlación positiva entre el desarrollo de la habilidad en los estudiantes para resolver problemas con apoyo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (variable y), y el proceso de modelación basado en la técnica propuesta (variable x). Se detectaron las dificultades principales a las que se enfrentaron los estudiantes durante el proceso de modelación matemática.

Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene un carácter integrador de la matemática. Es importante propiciar la transferencia de estos conocimientos a situaciones relacionadas con áreas de interés del estudiante para que pueda utilizarlos en la solución de problemas que se le presenten durante el ejercicio de su profesión. Hay que centrar la atención en enseñar a resolver los problemas que involucren ecuaciones diferenciales (Judson, 1997).
El estudio se realizó para responder a las preguntas ¿Cómo involucrar los estudiantes en el proceso de modelación matemática y con que tipo de problemas? ¿Cómo proceden los estudiantes para construir un modelo matemático que represente una situación de la realidad, cuando se conocen las condiciones y características de dicha situación y las reglas que gobiernan los cambios que ocurren?
Se realizó la investigación pre-experimental y transversal para determinar la correlación entre la técnica generalizada, basada en acciones de modelación, y el desarrollo de la habilidad de los estudiantes para resolver problemas con apoyo de EDO's de primer orden. El experimento se aplicó al grupo único integrado por catorce estudiantes del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Química, en el curso de ecuaciones diferenciales que se imparte en la UACI – UAN.

Proceso de modelación

De acuerdo con Mochón (2000), todas las fórmulas, gráficas o tablas que describen de alguna manera el comportamiento de un sistema real, son modelos matemáticos. En este trabajo se tiene interés precisamente en aquellos modelos que involucren ecuaciones diferenciales, específicamente las ordinarias de primer orden.

‡‡‡ Proyecto de Cuerpo Académico de Matemática educativa, UAN y Cuerpo Académico de Matemática Educativa Avanzada, UdG

Las dificultades de enseñanza y aprendizaje en el proceso de modelación (Klauodatos, 1994, citado por Hernández, 1995), se encuentran fundamentalmente en la fase de matematización, aunque la parte de procesamiento matemático no está exenta de dificultades (Fig. 1).

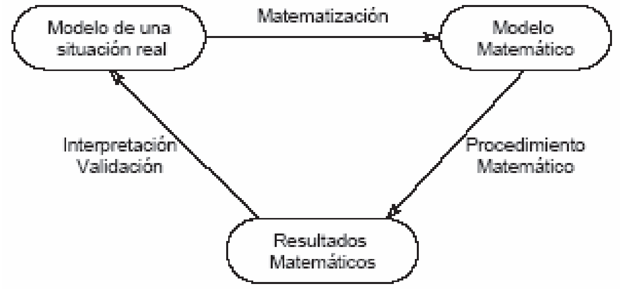

Figura 1. Proceso de modelación matemática.

Según el paradigma de modelación, la resolución de problemas se realiza mediante cuatro estadios (Gascón, 1994):

1. Una situación problemática en la que pueden formularse preguntas y conjeturas, normalmente con poca precisión y en la que se pueden llegar a detectar y formular provisionalmente algunos problemas matemáticos.
2. La definición o delimitación del sistema subyacente a la situación problemática y la elaboración del modelo matemático correspondiente.
3. El trabajo técnico dentro del modelo, la interpretación de este trabajo y sus resultados dentro del sistema modelado.
4. Formulación de problemas nuevos para responder a cuestiones relativas al sistema modelado.

En este trabajo, se propone una técnica "generalizada" para resolver problemas, basada en acciones de modelación distribuida en cuatro etapas, Orientación, Planificación, Realización y Control (Polya, 1965; Shoendfeld, 1992; Nesterova, 2000). A continuación se describe su utilización para resolver un problema de mezclas.

Problema. Un recipiente de 10 galones está lleno de agua pura. Supóngase que se empieza a añadir sal al recipiente a razón de ¼ de libra por minuto (flujo másico). Además, se abre la válvula de salida para retirar ½ de galón por minuto de disolución (flujo volumétrico), y se agrega agua pura para mantenerlo lleno. Si la disolución de agua salada está siempre bien mezclada, ¿Qué cantidad de sal se encuentra en el recipiente en un momento determinado t? Calcular la cantidad de sal para a) t =1 min., b) t =10 min., c) t =60 min., d) t =1000 min. y e) para t muy grande. (Blanchard, Devaney y Hall, 1998, p 33)

Solución:

Orientación. Para entender de qué se trata en el problema es importante identificar la información disponible (qué está dado y qué es necesario encontrar).

Se plantean y responden preguntas: ¿Cuál es la cantidad de sal en el recipiente al inicio del proceso? y ¿cuál al final? ¿De qué manera varía el nivel del líquido en el recipiente? ¿Por qué se hace la aclaración de que la solución está siempre bien mezclada? ¿Se puede agregar la sal de manera "indefinida" al recipiente? La información que se obtiene del enunciado del problema, se expresa y se define en una lista de las cantidades físicas (variables y constantes). Se identifica la variable incógnita.

Las siguientes cantidades constantes durante el proceso:

$F = \frac{1}{4}\frac{lbs}{\min}$ - Flujo másico de sal en la corriente de entrada $\left(\frac{masa}{tiempo}\right)$.

$q = \frac{1}{2}\frac{gal}{\min}$ - Flujo volumétrico de la solución (corriente de salida) $\left(\frac{volumen}{tiempo}\right)$.

$V = 10\ gal.$ - Volumen de la mezcla (volumen ocupado del recipiente en un instante dado).

q_e - Flujo volumétrico del agua en la corriente de entrada para mantener lleno el tanque.

Las magnitudes que cambian son:

$x(t)$ - Masa de sal presente en un momento dado en el recipiente. $x_0 = x(0) = 0\ lbs$

$c(t)$ - Concentración de sal en la corriente de salida (la misma que en el recipiente).

t - Tiempo transcurrido en el proceso

Variable incógnita: contenido de sal en el recipiente $x(t)$.

Planificación de la solución

1. Se hace una breve descripción de las ideas de solución.

La determinación de la cantidad de sal en el recipiente en un momento dado, exige la utilización del principio de conservación de masa; su empleo es básicamente un proceso "contable" en el que se lleva un balance de masa (variable incógnita). Para ese propósito, es conveniente considerar una región del espacio delimitada por una superficie (real o ficticia) denominada "superficie de control" y el volumen comprendido por dicha superficie, como "volumen de control". La cantidad que va a observarse (masa de sal en este caso) se denotará con la letra *x*. La ley de conservación se puede enunciar como sigue:

La cantidad total de x contenida dentro del volumen de control en el tiempo t_2 debe ser igual a la cantidad total de x contenida dentro del volumen de control en el tiempo t_1, más la cantidad total de x que entra al volumen de control en el intervalo de tiempo t_1 a t_2 en todos los procesos, menos la cantidad total de x que sale del volumen de control en el intervalo de tiempo t_1 a t_2 para todos los procesos:

$$x\big|_{t_2} = x\big|_{t_1} + cantidad\,de\,x\,que\,entra\,en(t_1,t_2) - cantidad\,de\,x\,que\,sale\,en(t_1,t_2)$$

Se supone que la mezcla es homogénea y que no hay generación de sal (por reacción química) en el recipiente. La concentración de sal en la corriente de salida en un tiempo dado es igual a la existente en cualquier punto del contenedor en ese instante.

2. Se representa el problema mediante dibujos, esquemas o gráficas o alguna otra forma de visualización (Fig. 2).

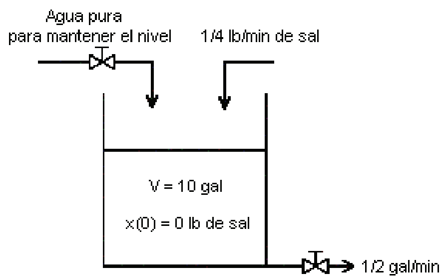

Figura 2. Diagrama de las condiciones del problema

3. Se escriben las variables obtenidas del análisis del problema y se codifican en términos matemáticos.

La concentración de sal en la corriente de salida es la misma que la de la solución que permanece en el tanque: $c(t)=\frac{x(t)}{V}$, donde $x(t)$ es masa de sal presente en un momento dado en el recipiente y *V* es volumen de la mezcla (volumen ocupado del recipiente en un instante dado).

Realización de la solución.

1. Se determinan las relaciones entre variables en forma analítica.

De acuerdo al principio de conservación de la masa y si $t_1=t$ y $t_2=t+\Delta t$, entonces:

$$\left\{\begin{matrix} masa\ en\ el\ recipiente \\ en\ el\ tiempo\ t+\Delta t \\ x(t+\Delta t)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} masa\ en\ el\ recipiente \\ en\ el\ tiempo\ t \\ x(t)\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} masa\ que\ entró \\ entre\ t\ y\ t+\Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} F dt\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix} masa\ que\ salió \\ entre\ t\ y\ t+\Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} q(t)c(t)dt\end{matrix}\right\}$$

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\int_t^{t+\Delta t} Fdt-\int_t^{t+\Delta t} q(t)c(t)dt$$

Al aplicar el teorema de valor medio para integrales, en la segunda integral de la expresión anterior, se tiene $x(t+\Delta t)=x(t)+F\Delta t-\overline{qc}\,\Delta t$, donde el guión superior indica que la función es evaluada entre *t* y $t+\Delta t$. Para $\Delta t\to 0$ se obtiene $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=F-q(t)c(t)$, donde el miembro izquierdo representa una derivada de la función $x(t)$. La ecuación diferencial obtenida $\frac{dx(t)}{dt}=F-q(t)c(t)$ (1) representa las relaciones entre variables el problema dado.

2. Se construye la secuencia de operaciones (algoritmo) para las relaciones obtenidas:

Paso 1. La sal entra en el recipiente mediante flujo constante $F=\frac{1}{4}\frac{lbs}{\min}$

Paso 2. El flujo volumétrico de salida es de ½ galón por minuto y su concentración es la misma que la de la disolución en el recipiente. Para un volumen de 10 galones se tiene:

$$q(t)c(t)=q\frac{gal}{\min}\frac{x(t)}{V}\frac{lbs}{gal}=\frac{1}{2}\frac{gal}{\min}\frac{x(t)}{10}\frac{lbs}{gal}=\frac{x(t)}{20}\frac{lbs}{\min}$$

Paso 3. Al sustituir *F* en la ecuación (1) se obtiene: $\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{4}-\frac{x(t)}{20}\Rightarrow\frac{dx(t)}{dt}=\frac{5-x(t)}{20}$ (2), que es una ecuación diferencial de primer orden con variables separables y se resuelve fácilmente después de separarlas.

Paso 4. Se resuelve la ecuación (2):

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{5-x(t)}{20}\Rightarrow\int\frac{dx}{5-x(t)}=\int\frac{1}{20}dt\Rightarrow-\ln\left|5-x(t)\right|=\frac{t}{20}+C\Rightarrow\ln\left|5-x(t)\right|=-\frac{t}{20}+C\Rightarrow$$

$$5-x(t)=\pm e^{-\frac{t}{20}+C}\Rightarrow 5-x(t)=\pm e^{C}e^{-\frac{t}{20}}\Rightarrow 5-x(t)=Ce^{-\frac{t}{20}}\ \Rightarrow\ x(t)=5-Ce^{-\frac{t}{20}}.\quad(3)$$

De la condición inicial $x(0)=0\ lbs$ se tiene $0=5-Ce^{\frac{0}{20}}\Rightarrow C=5\Rightarrow x(t)=5\left(1-e^{-\frac{t}{20}}\right)$.

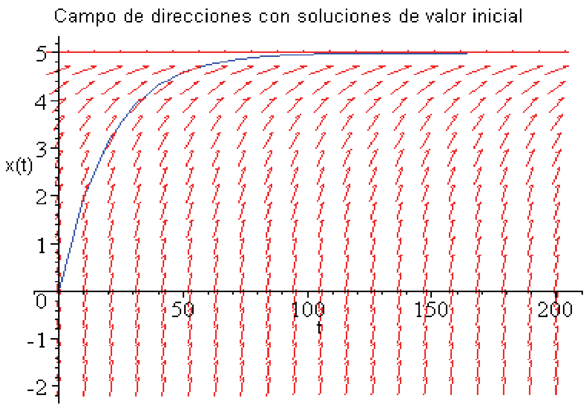

Figura 3. La gráfica de la función $x(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$.

De la función $x(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$, que describe la variación de la cantidad de sal en el recipiente, se obtiene la cantidad de sal en los diferentes momentos:

a) $x(1) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{20}}\right) \approx 0.244\, lbs$, b) $x(10) = 5\left(1 - e^{-\frac{10}{20}}\right) \approx 1.967\ lbs$,

c) $x(60) = 5\left(1 - e^{-\frac{60}{20}}\right) \approx 4.751\ lbs$, d) $x(1000) = 5\left(1 - e^{-\frac{1000}{20}}\right) \approx 5\ lbs$,

e) Para un tiempo "grande", como $t = 5000\,\text{min}$, se obtiene $x(5000) = 5\left(1 - e^{-\frac{5000}{20}}\right) \approx 5\ lbs$.

Control. Se verifica el resultado obtenido (que tenga sentido). La concentración de sal en el recipiente se incrementa a medida que transcurre el tiempo, tal como se muestra en el campo de pendientes (Fig. 3), lo cual es congruente con el resultado obtenido; además, la consistencia de unidades mostrada durante el planteamiento y resolución del problema, hace pensar que dicha resolución ha sido correcta.

Se expresa la respuesta en términos del problema dado: Si se tiene un recipiente de 10 galones de capacidad, originalmente lleno de agua, al cual se agrega sal a razón de ¼ de libras por minuto y se retira ½ galón por minuto de disolución de mezcla homogénea, y se añade agua pura a un flujo suficiente para que el tanque permanezca siempre lleno, entonces la cantidad de sal en el recipiente en cualquier momento es igual a $x(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$.

Resultados y conclusiones

La confirmación de la existencia de una relación lineal entre la habilidad para resolver problemas (y) y Acciones de modelación matemática (x) se obtuvo con el modelo lineal $y = 0.8158 + 0.9217x$ ajustado a los datos de los catorce estudiantes, con un nivel de significancia del 5% (Fig. 4).

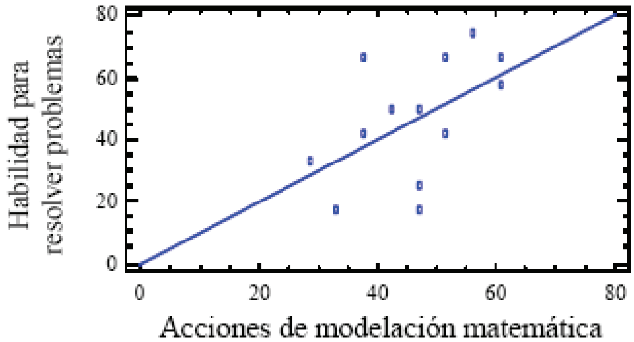

Figura 4. Diagrama de dispersión y del modelo ajustado.

El coeficiente de correlación obtenido, 0.517, indica una relación lineal positiva moderada entre las variables. Sin embargo, la expectativa era la existencia de una fuerte correlación positiva. El hecho de que sólo el 26% de la variabilidad total en la habilidad para resolver problemas sea explicada por las acciones de la propuesta, muestra que deben existir otros factores que no fueron considerados, tales que están relacionados con la estructura misma de la técnica propuesta, la forma en que se aplicó y el tiempo de su aplicación.

Para obtener el conocimiento seguro sobre el desarrollo de habilidades de modelación matemática en la solución de problemas es necesario realizar la experimentación durante un periodo de tiempo más largo.

Referencias bibliográficas

Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Internacional Thomson Editores.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educación Matemática*. Vol.6, No. 3, Diciembre 1994. Editorial Iberoamérica México.

Hernández, A. (1995). Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Gráfico y Algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Tesis Doctoral. CINVESTAV-IPN. Departamento de Matemática Educativa.

Judson, T. (1997). *University Mathematics Education in the United States.* Recuperado el 7 de julio de 2003 de:
http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/rep97/etrang/judson/node14.html

Mochón, S. (2000). *Modelos matemáticos para todos los niveles.* México: Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Nesterova, E. D. (2000). Formación de la habilidad de estructurar el material didáctico en los estudiantes de escuela superior. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Krasnoyarsk, Rusia.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1999). *Looking Toward the 21ST Century: Challenges of educational theory and practice*. Disponible en: http://www.gse.berkeley.edu/faculty/aschoenfeld/AERA_final.pdf