

EL CAMBIO DE VARIABLE: ¿UN PROCESO MATEMÁTICO O UN ARTIFICIO DE LA MATEMÁTICA?

Ramón Flores Hernández

Instituto Tecnológico de Saltillo, Universidad Autónoma de Coahuila. (México)

rnfloresh@hotmail.com

Campo de investigación: pensamiento matemático avanzado. Nivel educativo: superior

Palabras clave: cambio de variable, epistemología, cognición y didáctica

Resumen

Este artículo presenta resultados parciales de una investigación en desarrollo que pretende desentrañar el papel que juega el cambio de variable (cv) en la matemática escolar del nivel superior, conllevando a plantear la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué mecanismos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo, al reconocer el cv como un objeto explícito? Interrogante que toma el papel de guía principal de la investigación, aunada a otras de carácter particular. El marco teórico se sustenta en los siguientes aspectos: epistemológico del cv, de transposición de contenidos, de conversión de representaciones y de situaciones didácticas. La Ingeniería Didáctica es la metodología a utilizar. El estado actual del trabajo se ubica en la Fase del Análisis Preliminar, presentándose en este artículo el desarrollo y las conclusiones de dicha Fase.

Definición del Problema

El problema de investigación consiste en hacer explícito el cv, de tal forma que pueda ser utilizado eficazmente en los temas de la ingeniería. Para llevar a cabo lo anterior es necesario conocer o documentar, cuál es la problemática cognitiva presente en los estudiantes, causada por la presentación actual de los diferentes temas matemáticos que conllevan el cv. También, es importante la actuación del profesor en el aula bajo este tema y la influencia que los libros tienen en él, por último, se mirará cómo se estructuró el cv a través del tiempo y cómo fue evolucionando y permeando diferentes contenidos matemáticos; actividad que permitirá tener una panorámica robusta del papel que ha jugado en el tiempo el cv, bajo el fin de modificar de manera benéfica el papel actual que ocupa en el sistema didáctico. Estas actividades se tratarán de unificar o entrelazar, de tal forma que se obtengan explicaciones sistémicas del problema. Este planteamiento inicial permite proponer algunas preguntas del problema, que pueden llevar a determinar si es o no posible tener un mecanismo que induzca a establecer un instrumento explícito de enseñanza del cv. Debido a esto, dichas interrogantes serán tomadas como guía para solventar la problemática planteada:

1)¿Cómo vive actualmente el cv en la enseñanza?, 2)¿Qué significados posee el cv dentro del sistema didáctico?, 3)¿Qué papel juega el cv en la comprensión del cálculo?, 4)¿Qué mecanismos cognitivos subyacen al surgimiento de una variable adicional que permita minimizar la dificultad de un proceso?, 5)¿Qué es lo que posibilita la epistemología del cv?, 6)¿Qué obstáculos están asociados al cv?, 7)¿Qué elementos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo al reconocer el cv como un proceso explícito?

El Objetivo General, Marco Teórico y Metodológico

Las primeras 6 interrogantes anteriores deberán permitir abordar la pregunta siete que será tomada como el objetivo general, ya que ésta busca resignificar el cv apoyada en la triada: epistemología, cognición y didáctica; al tratar de encontrar una alternativa didáctica para introducir el cv como un tema independiente y enseñable en la matemática de ingeniería y, precisamente éste es el fin de la investigación. El resto de las preguntas se tomarán como los objetivos particulares o secundarios. También, estas interrogantes permitirán estructurar el marco teórico, ya que el significado de cada una se ubica en los actores de nuestro dominio de investigación; es decir, el profesor, el estudiante y el saber enseñado. Por ejemplo: las

preguntas 1 y 2 caen en el ámbito de la transposición didáctica, tal como lo maneja Chevallard (1991); las preguntas 3 y 4 caen dentro de la cognición; y, las preguntas 5 y 6 caen en la dimensión epistemológica. Bajo esta última dimensión se observará: la naturaleza del cv, el análisis de algunas heurísticas y el análisis de obstáculos presentes en el cv. En cuanto a la dimensión cognitiva, el trabajo se apoyará en la actividad cognitiva de conversión de las representaciones semióticas de un registro a otro bajo la noción de no-congruencia de las representaciones (Duval, 1995). Por último, la dimensión didáctica estará apoyada en la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991), dando al trabajo una visión genérica y, en la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), dotando al trabajo de una visión específica. Tocante al aspecto metodológico, se utilizará la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), presentándose en este trabajo la primera fase; es decir, el Análisis Preliminar.

Metodología

Análisis Preliminar

Esta fase se estructuró con base en las componentes: didáctica, epistemológica y cognitiva.

Componente Didáctica

La dimensión didáctica se refiere al estado que guarda la enseñanza del tema aludido; es decir, cómo vive el cambio de variable en el aula y cuál es su devenir como saber enseñable (Chevallard, 1991), en resumen, se refiere a lo relacionado con el profesor.

Como inicio, se revisó el contenido de los programas de estudio de las ingenierías del Sistema Tecnológico de México (STM) con base en el Instituto Tecnológico de Saltillo (ITS), bajo el fin de observar si contemplan el cv. La revisión abarcó las materias de: cálculo, ecuaciones diferenciales, series y transformadas de Laplace y de Fourier. En la mayoría de estos contenidos no se encuentra el cv de manera explícita, excepto en tres; sin embargo, hay varios temas donde se tiene que aplicar de manera implícita. En segundo lugar se recavaron apuntes de clase de distintos profesores y de las distintas matemáticas en el (ITS), comparándose con los contenidos de los libros de apoyo que utiliza cada docente. Todo esto bajo el objetivo de mirar el cv en el discurso del profesor. Al examinarlos, se observa que el cv aparece explícitamente en muy mínima forma y es, solo en algunos casos correspondientes al cálculo integral. Respecto al resto de temas donde puede aplicarse el cv, éste aparece desapercibido; es decir, no se le da la importancia debida. También se observa aquí que, la forma de enseñar el cálculo es con base en los libros de texto. El discurso matemático escolar del profesor es copiado del contenido de dichos libros casi textualmente. Así que el siguiente trabajo se centró en estudiar los libros de texto utilizados cotidianamente. Se revisaron los libros de matemáticas más utilizados en el ITS (Edwards y Penney, 1986; 1987; Stewart, 1999; Swokowski, 1982; Zill, 1987; 2002; Rainville, 1976; O'Neil, 2001; James, 2002), efectuándose una clasificación genérica de diferentes temas donde tiene cabida el cv, con el fin de observar su uso: observándose que es un tema presentado de manera implícita, en cuanto a su aspecto algorítmico y en cuanto a su aspecto conceptual (significando que, además de cambiar la variable, cambia también su significado; por ejemplo, en la transformada de Laplace). Aún más, es utilizado en algunas demostraciones pero no se explica cómo pensaron en obtener tal cambio de representación de la variable. Por último se escuchó una clase típica de cálculo diferencial sobre el tema de la derivada de un producto, pretendiendo documentar la existencia de otro tipo de cv. Este recurso se planeo de manera general, no así: la clase, el lugar, la hora y el día de la grabación. Tal actividad se realizó desde un salón adyacente y se cotejó con los apuntes de la clase. Los resultados arrojados

indican que el docente hace un cambio verbal de variable, ya que al estudiar el dialogo entre éste y el grupo de alumnos, nos damos cuenta que el docente habla en términos de las variables u y v , y escribe su valor o su derivada en términos de la variable x y según la formula del producto. Es en este paso, del hablar en términos de una variable y del escribir lo que se habla en términos de otra variable, cuando se presenta el cambio verbal de variable.

En resumen, se puede decir que el cv es una herramienta que vive en el aula de manera implícita y no es un saber enseñable, siendo el centro de esta forma de ver el cv; los libros, ya que en ellos se basaron los profesores para su actividad docente. Se puede decir también que los libros generan un consenso para el trabajo del profesor. Bajo estos resultados cabe hacerse la pregunta: ¿cuál fue la epistemología de origen del cv?

Componente Epistemológica

En esta parte se presenta un análisis epistemológico, sin pretender sea exhaustivo, con el fin de indagar cómo surge el cv en la historia, cómo se usaba y si existieron obstáculos para su progreso. Tal análisis abarca desde el siglo XIV al siglo XVIII, periodo donde se ve con claridad el cv. La utilidad de este análisis, aunado a la revisión de libros, radica en que permitirá ensayar predicciones sobre el diseño de secuencias didácticas.

El cv se localizó en la antigüedad en la resolución de ecuaciones de segundo grado. Boyer (1968), menciona el libro llamado “Espejo Precioso de los Cuatro Elementos”, escrito por el matemático Chino Chu Shih-Chieh en 1303, donde explica un método de transformación que llama el *fan fa* y que en Occidente se le conoce como el “método de Horner”. El *fan fa* es en realidad un cv que permite transformar la ecuación original en otra más fácil y de donde se obtiene finalmente una raíz al regresar a la variable original (Boyer, 1968). Idem ocurre con los métodos de Cardano (1501-1576) sobre la resolución de ecuaciones cúbicas y cuárticas publicadas en su *Ars magna*, donde utiliza el cv con el fin de transformar la ecuación dada en otra más sencilla, solo que utiliza un estilo retórico (Boyer, 1968). Aquí es importante resaltar que el cambio de incógnita es parte de un método que facilita la resolución de la ecuación, utilizando una función de estructura variable.

Un caso diferente acerca del papel que juega el cv lo podemos ver en las ecuaciones diferenciales; por ejemplo, en “la ecuación de Bernoulli” $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, donde Jacques Bernoulli, Leibniz y Jean Bernoulli lograron resolver; Jean reduciéndola a una ecuación lineal, por medio de la sustitución $z = y^{1-n}$ (Boyer, 1968). En este caso se presenta un cv intrínseco pero con un fin necesario para poder resolver la ecuación, utilizando una función de estructura fija.

Otro caso muy característico acerca de las ecuaciones diferenciales es la sustitución $y = xt$ que utilizara Leibniz (1707-1783) y después J. Bernoulli para resolver la ecuación homogénea de primer grado (Ríbnikov, 1987; Cauchy, 1981). En este caso el cv tiene un fin primordial, utilizando una función de estructura fija.

Newton utiliza un cv necesario y por primera vez en la regla de la cadena, mostrado en un escrito titulado “The October 1666 Tract on Fluxions” (Newton, 2001; Edwards, 1979). Aquí se puede ver que, originalmente la regla de la cadena surge como un método de sustitución; es decir, como una herramienta que permitía hacer un cv bajo la mira de encontrar la derivada de una función. Edwards (1979) explica como trabajaba Newton al respecto, donde se puede apreciar que el cv es utilizado como una herramienta no indispensable y de estructura variable.

Finalmente podemos ver que: en las ecuaciones algebraicas mostradas y en la regla de la cadena, se busca encontrar una función que permita hacer el cv y, en las ecuaciones

diferenciales mostradas se da esa función que permite hacer un cv; es decir, aquí dicha función ya tiene una estabilidad o tiene el carácter de un invariante.

Componente Cognitiva

Componente referida a los estudiantes, en especial se refiere a cómo piensan el cv; es decir, se tratará de indagar qué concepciones tienen los estudiantes de ingeniería acerca del cv. El resultado de tal indagación surge de la triangulación de información: a partir del año 2003 se han hecho observaciones de clases y se han planteado problemas sobre el cv; en el 2004 se diseñó un curso cuyo tema central fue el cv; en el 2005 se realizaron 11 entrevistas clínicas sobre el cv. Estos diversos acercamientos sobre una misma exploración asumieron el papel de plan piloto para finalmente llegar a establecer el diseño de cuestionarios, pero a la vez apoyaron las conclusiones obtenidas. Así pues, se aplicaron tres cuestionarios a dos grupos de estudiantes de la materia de “Series de Fourier”: un grupo formado por 12 estudiantes y el otro por 17. Estos cuestionarios consistieron en plantear los siguientes 6 problemas:

CUESTIONARIO 1

1. La derivada de $y = \sqrt{1-x}$ se puede hacer por varios caminos, ¿cuáles de los siguientes sabes hacer?

a. Encontrando dy/dx a través de las fórmulas de derivación.

b. Realizando un cambio de variable, por ejemplo, haciendo que $1-x=t$. Para luego aplicar la fórmula:

$$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt).$$

c. Desarrollando $1-x$ a la $1/2$ y luego derivar término a término.

d. A través de la definición de la derivada:
 $dy/dx = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]/h$

e. Aplicando derivadas implícitas al escribir la función dada como $y^2 = 1-x$

f. Aplicando la derivación logarítmica, al escribir la función dada como:

$$\ln y = \ln \sqrt{1-x}, \text{ para luego derivar.}$$

1. Encuentra la derivada de $y = \sqrt{1-x}$ por cada uno de los métodos que sabes.

2. ¿Podrías calcular la derivada de $y = \sqrt{1-x}$ aplicando el método del inciso b)? ¡Inténtalo!

3. Resuelve la ecuación diferencial $2dx + (2x + 3y)dy = 0$, iniciando su resolución al emplear el cambio de variable $z = 2x + 3y$ y

En estos problemas se requería hacer un cv y se pretendía observar el estado que guarda, específicamente se pretendía mirar: los antecedentes del estudiante acerca del cv, el desempeño sin mostrarle ningún apoyo, el desempeño con apoyo y el desempeño con apoyo indirecto solicitándole genere o invente una función para realizar el cv.

Las **respuestas** más notorias fueron las siguientes:

a) 5 estudiantes solo sustituyen la función que representa el cv y el resto de los términos los dejan en función de la variable original. b) 2 estudiantes evitan utilizar el cv y usan los

cuya diferencial total es $dz = 2dx + 3dy$. La ecuación resultante se podrá resolver por el método de separación de variables.

CUESTIONARIO 2

4. Sea $\int (x/\sqrt{x+1}) dx$

a. ¿Se podría calcular la integral al hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x+1}$?

Si _____ ¿por qué? (hacer desarrollo).

No _____ ¿por qué? (hacer desarrollo)

b. ¿Se podría calcular la integral si se hace el cambio de variable $\sqrt{t} = \sqrt{x+1}$?

Si _____ ¿por qué? (hacer desarrollo).

No _____ ¿por qué? (hacer desarrollo)

c. Si la integral la modificamos como $\int (x/\sqrt{x^2+1}) dx$, ¿cómo la resolverías?

CUESTIONARIO 3

6. Si en la integral $\int (1/e^x + e^{-x}) dx$ se hace el cambio de variable $e^x = t$ para poder integrarla,

a. ¿Podrías calcularla? ¡Inténtalo!

b. ¿Qué cambio de variable puedes inventar para integrar $\int (1/1 + \sqrt{x}) dx$? ¡Resuélvela!

métodos tradicionales. c) Un estudiante no usa la variable proporcionada y la cambia por la variable “u”, que es la que se utiliza en la integral. d) 4 estudiantes solo sustituyen la función que marca el cv y el resto de los términos los dejan igual. Luego integran, tomando como constante a la nueva variable. e) En general tienen dificultad para cambiar el dx , por el dt . f) 4 estudiantes cambiaron automáticamente la x del dx por la t . g) Un estudiante en la pregunta donde se pide inventar la función del cv, inventa la igualdad $\sqrt{x} = 1$; es decir, no utiliza una variable. h) Solo 1 estudiante logra inventar correctamente la función solicitada en la pregunta 6, pero no logra manipularla para cambiar el resto de la expresión de la integral. Con base en las respuestas podemos decir que el estudiante asume los siguientes comportamientos: para el estudiante el cv es un tema nuevo (aunque realmente ya lo ha tocado en varios temas) y no logra manipular la función que enlaza la variable nueva con la variable dada. Aunado a esto, no logra hacer un cambio de diferenciales (de la variable dada a la nueva variable), ya que este proceso es intrínseco a la manipulación de la función de conversión (la función que permite hacer el cv). Este aspecto de manipulación de la función que permite hacer el cambio de variable implica decir que deviene en un obstáculo en el conocer. Indudablemente que otro problema mas es el de encontrar o inventar la función que permite hacer el cv. También, desde el punto de vista de Duval (1995), vemos que hay gran dificultad en el cambio de registros, ya que estamos frente a un fenómeno de no-congruencia, debido a que no hay una transformación espontánea; esto es, no hay una correspondencia semántica entre las unidades significantes de los dos registros.

Conclusiones del Análisis Preliminar

A través de este análisis se pudo observar que el cv es una herramienta que es utilizada en los libros y por los profesores de manera implícita. Su importancia radica en que permite aplicar métodos, hacer demostraciones y resolver problemas. Esta es su epistemología de origen. Pero por otro lado, para el estudiante es un tema difícil, que, parece ser, que no le toma mucha importancia, ya que cuando lo aplica no lo ve como un cv; es decir, no es conciente cuando aplica esta herramienta, de que está haciendo un cv. Y la dificultad se agudiza cuando se trata de inventar una función que relacione la variable original con la variable nueva y que permita una transformación de registros. Este hecho permite identificar un obstáculo, localizado en la relación funcional entre variables; mas específicamente: la relación entre la variable dada y la nueva variable es una función, pero este hecho de ser una función, donde hay una variable independiente y una variable dependiente, fijas, por la propia naturaleza del concepto de función, evita que en la concepción de función que se usa en el cv, se intercambien los papeles de las variables, por la concepción operacional que ya han interiorizado de una función. También influye en un grado menor que se use la variable x ó y con la nueva variable. Por lo que un obstáculo localizado es el aspecto operacional de una función. Así mismo se puede concluir que bajo el proceso de hacer un cv, puede existir alguna de las siguientes actividades:

A) Inventar el cv (como en el ejemplo 6 del cuestionario). B) Hacer un cambio verbal de variable (como el ejemplo del docente o al derivar o integrar parcialmente). C) Tomar el cv de la expresión dada (como el problema 4 del cuestionario o como en la ecuación de Bernoulli). D) Tomar una función dada como medio para hacer el cv (como en las ecuaciones diferenciales homogéneas). E) Hacer un cv en cuanto a su significado (como en la transformada de Laplace, transformada de Fourier, derivadas e integrales múltiples). Por ejemplo en la transformada de Laplace se cambia la variable tiempo t por la variable s , que

representa la frecuencia compleja. F) Hacer un cv yuxtalineal o sea, letra por letra (por ejemplo en las integrales definidas).

En cuanto al uso que se le da al cv, puede tomar la siguiente clasificación:

A) Una herramienta indispensable para llevar a cabo un proceso (por ejemplo en las ecuaciones diferenciales homogéneas). Aquí el cv es primordial. B) Una herramienta intrínseca a un proceso (por ejemplo en la ecuación de Bernoulli). Aquí el cv es solo una pequeña parte de un proceso global. C) Una herramienta para economizar el tratamiento y por tanto no indispensable (por ejemplo en algunas ecuaciones diferenciales). Aquí el cv es opcional.

La mayoría de estas actividades fueron complicadas para el estudiante. Esto permite visualizar que el cv no es un proceso trivial, ya que se está trabajando con la conversión de registros bajo el fenómeno de no-congruencia. Por el lado de la didáctica y bajo el apoyo del estudio epistemológico se observa que no se ha dado una transposición didáctica, específicamente para el cv. Así que no es suficiente adaptar este conocimiento a los esquemas cognoscitivos del estudiante, sino que requiere de un proceso didáctico específico con carácter sistémico que permita la apropiación del cv; esto es, falta generar una didáctica que permita mirar el cv bajo su significado intrínseco, para que el estudiante se apropie del cv. Esto es lo que se pretende en esta investigación, resignificar el cv.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 33-59). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970 - 1990*. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.
- Boyer, C.B. (1968). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. International Thomson.
- Cauchy, A. L. (1981). *Équations Différentielles Ordinaires*. Éditions Études Vivantes.
- Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. (pp. 213-226). *Cuadernos de Educación* No. 22. Institut de Ciències de L' Educació (Universitat de Barcelona) y Editorial Horsori. Barcelona, España.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang S.A. Éditions scientifiques européennes.
- Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag
- Edwards y Penney. (1986). *Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones*. México: Prentice Hall.
- Edwards y Penney. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Prentice Hall.
- James, G. (2002). *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería*. México: Prentice Hall.
- Newton, I. (2001). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. UNAM. México. [I. Newton. Tractatus De Methodis Serierum Et Fluxionum. 1671]
- O'Neil, P.V. (2001). *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería*. Volumen 2. México: CECSA.
- Rainville, E.D. (1976). *Ecuaciones Diferenciales Elementales*. México: Trillas
- Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. URSS, Moscú: Mir
- Stewart, J. (1999). *Cálculo*. México: International Thomson Editores.
- Swokowski, E. W. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial.
- Zill, D.G. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Zill, D.G. (2002). *Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones de modelos*. México: International Thomson Editores.