EL APRENDIZAJE DEL TEMA "TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCIONES DEFINIDAS POR INTERVALOS" CON APOYO DEL CONOCIMIENTO PREVIO SOBRE LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO[§§§]

Emma Antonia Jáuregui Medina, Jorge Ávila Arciniega, Elena Dmitrievna Nesterova
Universidad Autónoma de Nayarit, Universidad de Guadalajara. (México)
emma@ecdif.intranets.com, javila@ecdif.intranets.com,elena.nesterova@cucei.udg.mx
Campo de investigación: gráficas y funciones. Nivel educativo: superior
Palabras clave: aprendizaje significativo, conocimiento previo, representaciones

Resumen
Este trabajo está relacionado con el estudio del problema de aprendizaje del tema "Transformada de Laplace (TL) de funciones definidas por intervalos (FDI)" con apoyo del conocimiento previo sobre la función escalón unitario (FEU). La teoría del aprendizaje significativo y la teoría de representaciones de conceptos matemáticos se consideraron como las bases teóricas para la investigación del problema. La investigación se llevó a cabo con el grupo único de 25 estudiantes de quinto semestre de la carrera de Ingeniería Química Industrial de la Facultad de Ciencias e Ingenierías de la Universidad Autónoma de Nayarit.
Para determinar si existe relación entre la habilidad para representar analíticamente (en términos de la FEU) las FDI (variable independiente) con el aprendizaje del tema TL de FDI (variable dependiente) se realizó un análisis de correlación.

Introducción

Actualmente la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN) se encuentra en un proceso de transformación, resultado del análisis de avances, aciertos, desaciertos y perspectivas de su desarrollo en los últimos años. Una de las políticas que se plantean en esta reforma universitaria es la de transformar el proceso educativo para impulsar la formación integral del estudiante, centrándolo en el aprendizaje significativo y en la construcción de conocimientos (Anzaldo, 2002, p. 21). En este modelo se considera el profesor como un diseñador y promotor de estrategias que posibiliten al estudiante aprendizajes significativos.
El aprendizaje del Cálculo proporciona la base conceptual y metodológica requerida para las matemáticas superiores, de tal manera que cualquier deficiencia u omisión trae como consecuencia problemas de aprendizaje posteriores. Los libros de Cálculo tratan con mayor amplitud las funciones continuas y prestan poca atención a las funciones definidas por intervalos (o compuestas). Sin embargo, este tema es indispensable en el análisis y diseño de sistemas de control. Cuando se modelan sistemas cuya entrada es una función definida a tramos, es necesario poder expresarla matemáticamente y para ello se emplea la función escalón unitario.
El problema de la investigación está relacionada con la búsqueda de los métodos, elaboración del contenido para la enseñanza de la Transformada de Laplace y el estudio de las condiciones de funcionamiento del apoyo del conocimiento previo sobre la función escalón unitario para que, como dice Cantoral (1993), el alumno construye su saber viviente, susceptible de evolución y funcional, que permite resolver problemas y plantear verdaderas preguntas.

[§§§] Proyecto de Cuerpo Académico de Matemática educativa UAN y Cuerpo Académico de Matemática educativa avanzada UdG

Consideraciones previas

Hitt (2003, p. 2) considera que uno de los problemas para el aprendizaje del cálculo es el concepto de función. El problema que tienen los estudiantes y algunos profesores de enseñanza media para desarrollar un entendimiento profundo del concepto de función, es que generalmente, tanto los estudiantes como algunos profesores, se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto que produce una limitación en su comprensión. En lo general, las tareas de conectar las diferentes representaciones de un concepto, no es considerada por la mayoría de profesores como algo fundamental en la construcción del conocimiento matemático y, en lo particular, las tareas de conversión son minimizadas por parte de los profesores en relación al concepto de función. Muchos alumnos y profesores tienen muy arraigada la idea intuitiva de pensar en funciones continuas, y que la idea es tan espontánea que anula el pensar en consideraciones analíticas. Nuestro punto es que las tareas de conversión promoverían un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización.
Las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por lo tanto, para su enseñanza y aprendizaje (Font, 2000). A pesar de que poseen la misma información, las diferentes representaciones ponen en función diferentes procesos cognitivos. La verbal se relaciona con la capacidad lingüística de los individuos y es básica para la interpretación de las demás; la gráfica permite conceptualizar mediante la visualización de los objetos; y la simbólica está relacionada con el pensamiento abstracto, analítico y lógico. Estos objetos se articulan mediante relaciones; cada objeto es a su vez parte de una estructura más amplia de conceptos, y los procesos se componen de operaciones sobre éstos objetos y transforman a los mismos (Cantoral, 2000).
Hernández (1998), al realizar un análisis epistemológico de la TL, hizo una propuesta para su enseñanza a partir de la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales mediante factores de integración y tomando la transformada exponencial como un puente entre esta técnica y la transformada de Laplace. El entendimiento del concepto de la TL (tanto en profesores como en estudiantes), se produce a partir de una epistemología del concepto y existen diversas formas de explicar la TL para que el estudiante pueda construirla y/o entenderla (Cordero y Miranda, 2002).
Burtseva y Tyrsa (2002) consideran que el teorema de convolución pertenece a los problemas matemáticos más difíciles en el aprendizaje, dado que dicha operación no tiene analogía con ninguna operación matemática aprendida en cursos anteriores, y proponen dos ejemplos para la interpretación didáctica del teorema de convolución: 1) totalización de las incertidumbres en la metrología y 2) la determinación de la probabilidad del funcionamiento libre de fallas de los sistemas en la teoría de confiabilidad.
Según Ausubel (1996), cuando ocurre el aprendizaje significativo el estudiante relaciona la nueva tarea de aprendizaje, en forma racional y no arbitraria, con los conocimientos y experiencias previas almacenadas en su estructura cognitiva. El aprendizaje significativo adquiere funcionabilidad cuando el alumno construye una representación mental a través de imágenes o proposiciones verbales o elabora su modelo mental como marco explicativo a dicho conocimiento (Díaz Barriga, 2003). Se requiere enseñar al alumno a proveerse de la experiencia adecuada para que cualquier término o concepto nuevo construido se corresponda con algo que ya forma parte de su experiencia concreta generadora de una representación mental razonablemente fuerte y que este conocimiento sea significativo (Gudiño, 2000).

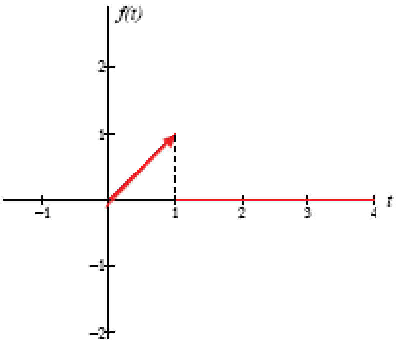
El objetivo de este trabajo fue describir y evaluar efectos del conocimiento previo de la función escalón unitario sobre el aprendizaje del tema de Transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos.
Se planeó la hipótesis que el uso del conocimiento previo (función escalón unitario) por los alumnos para la construcción del nuevo conocimiento (transformada de Laplace) influye positivamente al aprendizaje de los alumnos.

Materiales y métodos

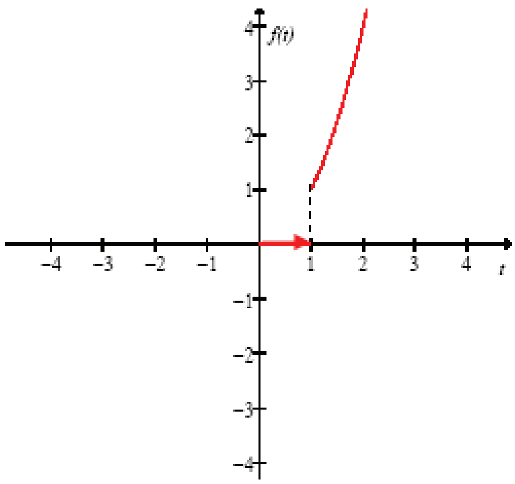
Las etapas y estructura de las actividades se elaboraron en la base del modelo de la formación y el desarrollo de las actividades de aprendizaje (Nesterova, 2000). Se diseñaron las lecturas, las actividades de aprendizaje y los instrumentos y criterios de evaluación. Los materiales didácticos fueron elaborados con una secuencia lógica apropiada cuidando de presentar en un principio los elementos más simples y generales y posteriormente introducir la información más detallada y compleja. En cada uno de ellos se delimitó la intencionalidad.
Con el fin de que los estudiantes lograran una mejor comprensión de los conceptos se hizo hincapié en las diferentes representaciones de una función considerando la forma verbal, gráfica y analítica por intervalos y empleando la FEU así como la traducción entre ellas. El material didáctico fue facilitado a los estudiantes de manera organizada y se propició la participación activa de ellos.
Ejemplos de las actividades.
1. Expresar analíticamente y bosquejar la gráfica de una función de t definida en dos tramos. Es igual a t cuando t es mayor o igual a 0 y menor que 1. Es igual a 0 cuando t es mayor o igual que 1.

La solución se inicia con el análisis de la descripción de la función dada:
¿De cuántas "partes" consta esta función? $\rightarrow$ *De dos*
¿En qué intervalo se da la primera parte? $\rightarrow$ $t < 1$
¿En qué intervalo se da la segunda parte? $\rightarrow$ $t \geq 1$
¿Cómo se representa analíticamente la función en el intervalo $t < 1$? $\rightarrow$ $f(t) = t$
¿Cómo se representa analíticamente la función en el intervalo $t \geq 1$? $\rightarrow$ $f(t) = 0$
¿La función $f(t) = t$ es continua en el intervalo $t < 1$? $\rightarrow$ es continua.
¿La función $f(t) = 0$ es continua en el intervalo $t \geq 1$? $\rightarrow$ es continua.
¿En que punto se cambia la expresión analítica de la función dada? $\rightarrow$ $t = 1$
¿Qué valor tiene la función dada en el punto $t = 1$? $\rightarrow$ $f(1) = 0$
¿Existe $\lim\limits_{t \to 1-0} t$? $\rightarrow$ existe y $\lim\limits_{t \to 1-0} t = 1$
¿Existe $\lim\limits_{t \to 1+0} 0$? $\rightarrow$ existe y $\lim\limits_{t \to 1+0} 0 = 0$
¿La función dada es continua en el punto $t = 1$? $\rightarrow$ es discontinua.

Al usar las respuestas obtenidas se construye la gráfica y se escribe la función dada en la forma analítica y en términos de la FEU:

Representación gráfica de la función definida en dos tramos:	La representación analítica de la función definida en dos tramos $f(t)=\begin{cases} t & t<1 \\ 0 & t\geq 1\end{cases}$
	Al escribirla como $f(t)=\begin{cases} t & t<1 \\ 0 & t\geq 1\end{cases}=\begin{cases} t-0\cdot t & t<1 \\ t-1\cdot t & t\geq 1\end{cases}$ se obtiene la representación analítica en términos de la FEU $f(t)=t-tU(t-1)$. Comprobación: Para $t<1$, $U(t-1)=0$ y $t-t\,U(t-1)=t$ Para $t\geq 1$, $U(t-1)=1$ y $t-t\,U(t-1)=0$

2. Bosquejar la gráfica de la función $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<1 \\ t^2 & t\geq 1\end{cases}$, expresarla en términos de la FEU y determinar la TL respectiva.

Representación gráfica de la función $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<1 \\ t^2 & t\geq 1\end{cases}$	Esta función está definida en dos tramos, que se conectan en $t=1$. En el primer tramo, $0\leq t<1$ la función es constante igual a cero. En el segundo, $t\geq 1$ la función está definida por la fórmula $f(t)=t^2$.
	Para expresarla en términos de la FEU se observa que la función t^2 se "enciende" en $t=1$, lo que se representa como $t^2\,U(t-1)$. A partir de la forma alternativa del segundo teorema de traslación $\mathcal{L}\{U(t-a)f(t)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$, se tiene por comparación, que $f(t)=t^2$ y $a=1$. Entonces $f(t+a)=f(t+1)=(t+1)^2$, $\mathcal{L}\{f(t+1)\}=\mathcal{L}\{t^2+2t+1\}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$.

Del segundo teorema de traslación se tiene $\mathcal{L}\{t^2\,U(t-1)\}=e^{-s}\mathcal{L}\{t^2+2t+1\}=e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$.

Comprobación: Por la definición de transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}\{t^2\,U(t-1)\}=\int_0^1 e^{-st}\cdot 0\;dt+\int_1^\infty e^{-st}\cdot t^2\;dt=0+\int_1^\infty e^{-st}\cdot t^2\;dt=\left.\frac{e^{-st}t^2}{-s}\right|_1^\infty-\frac{1}{-s}\int_1^\infty e^{-st}(2t)\,dt=$$

$$=\left.\frac{e^{-st}t^2}{-s}\right|_1^\infty+\frac{1}{s}\left[2\left.\frac{e^{-st}t}{-s}\right|_1^\infty-\frac{2}{-s}\int_1^\infty e^{-st}\;dt\right]=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s}\left[\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{2}{s^2}\left(\left.\frac{e^{-st}t}{-s}\right)\right|_1^\infty\right]=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{2e^{-s}}{s^3}.$$

Para determinar si existe la relación positiva entre la habilidad para representar en términos de la función escalón unitario las funciones definidas por intervalos (variable independiente x_i) y el aprendizaje del tema de la Transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos (variable dependiente y_i) se realizó el estudio cuasiexperimental, transversal y de correlación. Se trabajó con el grupo de 5º semestre de la carrera de Ingeniería Química Industrial, que se imparte en la Universidad Autónoma de Nayarit, el cual estuvo integrado por 25 alumnos. La investigación se llevó a cabo en la materia de Matemáticas V. El estudio experimental se realizó durante un lapso de tres semanas.

Se observó cómo los alumnos representan una función definida por intervalos con el uso del concepto de la función escalón unitario y cómo pasan de una representación a otra (verbal, gráfica y analítica) y se identificaron las principales dificultades y beneficios de la aplicación del conocimiento previo por los estudiantes.

En la evaluación se asignaron valores de acuerdo a los diferentes niveles de ejecución. La información obtenida fue tabulada para analizar los aciertos obtenidos por cada alumno en cada actividad, los reactivos que fueron más difíciles y las observaciones acerca del tipo de errores cometidos en cada reactivo.

Resultados estadísticos

Los estadísticos de prueba que se utilizaron para determinar la significancia de la regresión, fueron la t de Student, a través de una prueba de hipótesis, y la F de Fisher, a través de una razón de varianzas. En ambos casos se consideró un nivel de significancia del 5%.

Se obtuvo el modelo lineal que describe la relación entre los Conocimientos Previos de la FEU (x) y el Conocimiento sobre la TL de FDI (y): $y = 24.744 + 0.656x$.

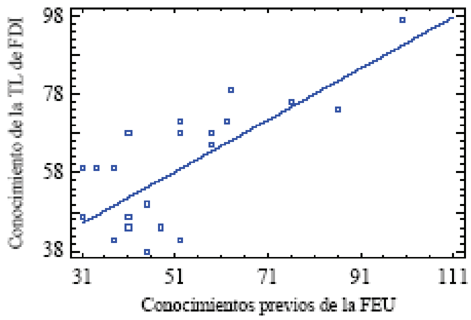


Figura 2. Diagrama de dispersión y del modelo ajustado.

El valor de P = 0.0030 obtenido en el análisis de varianza, menor que 0.05, rechaza la hipótesis nula y establece que existe una relación estadísticamente significativa entre las dos variables con un nivel de significancia del 5%. El coeficiente de correlación de 0.718 indica una relación moderadamente fuerte entre las variables. El valor de R-cuadrada indica que el modelo obtenido explica el sólo el 51.6% de la variabilidad en la variable y y que existen otros factores que deben ser considerados. Se hizo una comparación con modelos alternativos curvilíneos y el que generó el mayor valor de R cuadrada fue el modelo lineal seleccionado.

Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos, se puede concluir que el conocimiento previo de la FEU, las habilidades para realizar la representación gráfica y el transitar entre las diferentes representaciones fue un factor muy importante para el aprendizaje de la Transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos.

Aunque los resultados aquí obtenidos no pueden generalizarse porque fueron obtenidos en único grupo de 25 alumnos, la metodología y los materiales de este experimento se pueden aplicar a una muestra seleccionada al azar para lograr un conocimiento estadísticamente confiable de los obstáculos que tienen los estudiantes para determinar la transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos. Además en este trabajo se consideró el conocimiento previo de la función escalón unitario como única variable independiente, sin embargo, sería interesante realizar un estudio multifactorial para determinar el impacto de otros factores.

Referencias bibliográficas

Anzaldo, V. M. (2002). Nuevo Modelo Curricular, Taller "Elaboración de la estrategia de implantación del nuevo modelo académico", Nayarit, México: Universidad Autónoma de Nayarit.

Ausubel, D.P., Novak J., Hanesian H. (1996). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Burtseva, L., Tyrsa, V. (2002). *Ejemplos de interpretación del teorema de la convolución.* Instituto de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. Recuperado el 15 de mayo de 2003, de

Cantoral, R. (1993). *Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición.* Publicaciones Centroamericanos 7, México: Cinvestav, pp. 391-410.

Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Trillas: México.

Cordero, F., Miranda, E. (2002). El Entendimiento de la transformada de Laplace: Una Epistemología como Base de una Descomposición Genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, International Thomson Editores, Vol. 5, Número 2, 133-168.

Díaz Barriga, F. (2003). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista (2ª Ed.). México: McGrawHill.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas,* No. 25, 21-40.

Gudiño, A (2000). *La problemática en la enseñanza de las ciencias,* Instituto Tecnológico de San Luis Potosí, México.

Hernández, R. A. (1998). La transformada exponencial: un puente entre los factores de integración y la transformada de Laplace. *Memorias del IX Seminario Nacional sobre microcomputadoras en la educación matemática*. Recuperado el 17 de mayo de 2002, de http://148.216.13.35/mem9sem/hernan/hernan.htm.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Recuperado el 15 de mayo de 2003, de http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/FernandoHitt.doc

Nesterova, E.D. (2000). Formación de la habilidad de estructurar el material didáctico en los estudiantes de escuela superior. Tesis de doctorado, Universidad de Krasnoyarsk, Rusia.