ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO: SU HISTORIA

Mario Dalcín, Mónica Olave
Instituto de Profesores Artigas. (Uruguay)
filomate@adinet.com.uy, matemoni@adinet.com.uy

Campo de investigación: formación de profesores, resolución de problemas, pensamiento algebraico, pensamiento geométrico
Niveles: medio, superior
Palabras clave: ecuaciones de segundo grado, problemas, culturas antiguas

Resumen
Presentamos una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas a problemas que en el lenguaje del álgebra actual nos remiten a ecuaciones de segundo grado. Recorreremos, sin pretender ser exhaustivos, parte del camino que transitaron culturas como la babilónica, griega, hindú, árabe hasta la resolución dada por François Viète.

En los últimos años ha crecido el interés en el estudio del rol que puede jugar el uso de la Historia de la Matemática en la enseñanza y el aprendizaje de esta asignatura. Se han realizado varios trabajos sobre este tema en los que se apunta a que el uso de la historia de la matemática en la clase no debería ser realizado desde una perspectiva ingenua, esto es, que usar la historia no significa enseñar matemática tratando de que el alumno reproduzca las distintas etapas del desarrollo de la disciplina. Tampoco significa que el uso del conocimiento histórico consista en contar con un conjunto de anécdotas e historias que sirvan de entretenimiento a nuestros estudiantes.
La Historia de la Matemática brinda a los docentes y futuros docentes la posibilidad de reconocer que la matemática, en su desarrollo, ha acumulado un enorme conjunto de hechos que permiten ver que los conceptos que la sustentan, tienen su origen en la abstracción de la realidad objetiva y que existen relaciones importantes entre el desarrollo matemático y el desarrollo de la sociedad.
"La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- *hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas*
- *enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes,...*
- *señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente,...*
- *apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes."* (de Guzmán 1992)

Por otro lado Nuñez y Servat (1998) nos dicen: *"La perspectiva histórica nos permite explicar mejor el papel que juegan determinadas técnicas o métodos matemáticos frente a otros que predominaron en el pasado. [...] Tampoco se pueden despreciar las posibilidades de 'hacer matemática' que ofrece en análisis de un problema en un contexto o con una metodología diferentes a las habituales."*
Teniendo en cuenta lo antes mencionado y a efectos de ser usado en los cursos de formación de profesores, presentamos una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas a problemas que en el lenguaje del álgebra actual nos remiten a ecuaciones de segundo grado. Recorreremos parte del camino que transitaron culturas como la babilónica, griega, hindú, árabe, entre otras, en la resolución de estos problemas. De esta manera podremos comparar los resultados y técnicas que involucran su resolución hoy en día con los resultados y procedimientos conocidos en otras épocas.

Babilonios (2000 a.C. – 600 a.C.)

Para los Babilonios la resolución de la ecuación cuadrática no ofrecía grandes dificultades ya que poseían una gran habilidad para las operaciones algebraicas gracias al uso de tablas de multiplicación hasta 59x59, de división, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas, entre otras. Gracias a ello podían trasponen términos, eliminan factores, completan cuadrados, etc. (Boyer, 1986. pp. 55).

En las tablillas de arcilla, de donde proviene la información que tenemos de ellos, encontramos problemas que, en el lenguaje actual, se refieren a ecuaciones del tipo:

$x^2 + bx = c$ $\qquad$ $x^2 = bx + c$ $\qquad$ $x^2 + c = bx$

con b y c positivos. No figura la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ ya que esta no tiene raíces positivas. Esto mismo sucederá hasta la época moderna.

En la Tabla BM 13901 se encuentran 21 problemas que dan origen a ecuaciones de 2º grado y a sistemas de ecuaciones, donde una de ellas es de 2º grado. En cada problema figura el enunciado y cómo se debe proceder para su resolución.

Problema 1

El enunciado y solución de este problema traducido a nuestro sistema:

He sumado el cuadrado y mi lado obteniendo ¾.

Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1 (:1/2). Multiplicarás ½ por ½ (:1/4). Agregarás ¼ a ¾: 1. 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el ½ que has multiplicado de 1 (:1/2). ½ es el lado del cuadrado. (Sessa, 2005. pp. 21-25).

En el lenguaje del álgebra actual se reduce a resolver la ecuación: $x^2 + x = ¾$

cuya solución positiva estaría dada por : $\dfrac{-1+\sqrt{4}}{2} = \dfrac{1}{2}$

Si traducimos la solución dada en la tabla obtenemos:

Pondrás 1, la unidad: $\qquad 1$

Fraccionarás la mitad de 1 (:1/2): $\qquad \dfrac{1}{2}$

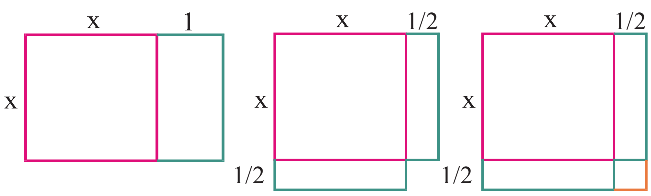
Multiplicarás ½ por ½ (:1/4): $\qquad$ *(1/2)2*

Agregarás ¼ a ¾: 1: $\qquad$ *(1/2)2 + ¾*

1 es (su) raíz cuadrada: $\qquad \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$

Restarás el ½ que has multiplicado de 1 (:1/2). ½ es el lado del cuadrado:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1+3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{4}}{2} = \frac{1}{2}$$



Interpretación geométrica

Esta última figura medirá

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

de donde el lado del cuadrado es 1. Al ser el lado x + ½ obtendremos que x = ½.

En forma algebraica tenemos: $x^2 + x = \dfrac{3}{4}$

$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = ½$ que no es otra cosa que el conocido método de completar cuadrados.

Euclides (300 a.C.): Los Elementos

Trabajaremos con una variante de la Proposición 14 del Libro II.

Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. (Se entiende por figuras iguales a las que tienen igual área.)

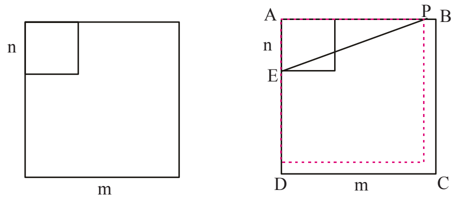
Variante: Construir un cuadrado igual a un rectángulo dado.

En el lenguaje del álgebra actual debemos resolver la ecuación: x2 = a.b

Por la Proposición 5 del mismo libro, Euclides sabe que se puede interpretar cualquier rectángulo como la diferencia de dos cuadrados. En el caso que nos ocupa, es fácil de comprobar que el rectángulo a.b lo podemos interpretar como $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Llamemos $m = \frac{a+b}{2}$ y $n = \frac{a-b}{2}$

Consideramos los cuadrados de lados m y n.



Debemos hallar x tal que x2 = m2 – n2

Si interpretamos a igualdad anterior usando la relación de Pitágoras, entonces debemos encontrar el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea *m* y el otro cateto *n*.

Para ello trazamos una circunferencia con centro en E y radio m ($C(E,m)$)

$C(E,m) \cap AB = \{P\}$. El cuadrado buscado es el punteado.

Veamos otro ejemplo interesante que es una variante de la Proposición 28 del Libro VI de Los Elementos, planteada por Sessa (2005).

Dividir una recta dada de manera que el rectángulo contenido por sus segmentos sea igual a un espacio dado. Ese espacio no debe ser mayor que el cuadrado de la bisección de la línea. (Cuando se habla de recta se está haciendo referencia a un segmento).

Si l es la medida del segmento dado, la condición impuesta por Euclides es que la superficie no sea mayor que (l/2)2. Sabemos que cualquier rectángulo construido a partir de un segmento dado se puede escribir como diferencia de cuadrados siendo el mayor de ellos de lado l/2, por lo que efectivamente el rectángulo tendrá un área menor que (l/2)2.

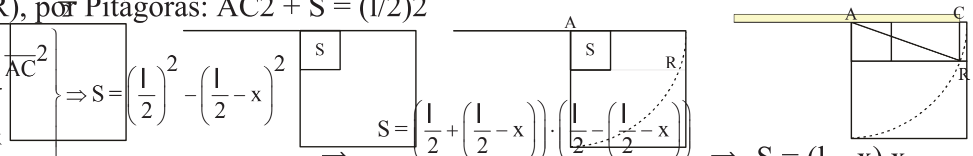
Por otra propiedad se sabe que cualquier superficie rectilínea se puede escribir como un cuadrado, por lo que trabajaremos con ese cuadrado S.

Para hallar el punto de corte (al que llamamos C) en el segmento dado, la construcción que se realiza y los argumentos dados son similares a los presentados en la construcción correspondiente al problema de la Proposición 44 del Libro I.

Presentamos a continuación la construcción en la siguiente sucesión de figuras:

En (ACR), por Pitágoras: AC2 + S = (l/2)2

$$\left.\begin{array}{l} S = \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \overline{AC}^2 \\ AC = \frac{l}{2} - x \end{array}\right\} \Rightarrow S = \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 \Rightarrow S = \left(\frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2} - x\right)\right) \cdot \left(\frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} - x\right)\right) \Rightarrow S = (l - x).x$$



de donde C es el punto buscado.

En lenguaje algebraico actual tenemos: $x.(l - x) = S \Rightarrow x^2 - l.x + S = 0$

La condición para que esta ecuación tenga solución es: $l^2 - 4S \geq 0 \Rightarrow 4.\left(\frac{l^2}{4} - S\right) \geq 0$
(l/2)2 – S ≥ 0 que no es otra que la condición impuesta por Euclides en el enunciado.

Brahmagupta (598-660)

Astrónomo y matemático indio. Es, sin duda el mayor matemático de la antigua civilización india. Desarrolló su actividad en el noroeste de la India y resumió sus conocimientos astronómicos en un libro escrito en el año 628, en el que rechazaba la rotación de la tierra. El rasgo más importante de esta obra es la aplicación de métodos algebraicos a los problemas astronómicos. Los matemáticos indios rindieron un gran servicio al mundo, ya que alguno de ellos, posiblemente Brahmagupta ideó el concepto y el símbolo "cero". Se cree que definió el cero como resultado de restar un número de sí mismo y dio algunas propiedades que lo involucran.

Veamos cómo resolvía la ecuación: $x^2 - 10x = -9$

La solución que plantea Brahmagupta es: *"Multiplica el número absoluto, -9, por el [coeficiente del] cuadrado, 1; el resultado es –9. Añádelo al cuadrado de la mitad [del coeficiente del] término medio, 25, y resulta 16; cuya raíz cuadrada, 4, menos la mitad del [coeficiente de la] incógnita, -5, es 9; y dividido por el [coeficiente del] cuadrado, 1, da como resultado el valor de la incógnita, 9."* (Meavilla Seguí, V., 2001).

Siguiendo la explicación dada por Brahmagupta podemos tener una generalización para la solución de una ecuación del tipo $ax^2 + bx = c$:

"Multiplica el número absoluto, c, por el [coeficiente del] cuadrado, a; el resultado es ac: a2x2 + abx = ac. *Añádelo al cuadrado de la mitad [del coeficiente del] término medio,* (b/2)2 *, y resulta* ac + (b/2)2:

a2x2 + abx + (b/2)2 = ac + (b/2)2 ⇒ (ax + b/2)2 = ac + (b/2)2 *cuya raíz cuadrada,* $\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ *, menos la mitad del [coeficiente de la] incógnita,* b/2*, es;* $-\left(\frac{b}{2}\right)+\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$:

$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2} \Rightarrow ax = -\left(\frac{b}{2}\right)+\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ *y dividido por el [coeficiente del] cuadrado, a, da como resultado el valor de la incógnita."* $x = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right)+\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}{a}$

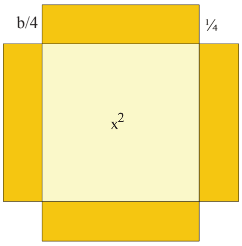
Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi (780 – 850 aprox.)

Sobrevivieron cinco de sus obras y la más importante sobre este tema es *"Precisiones sobre el cálculo del al-jabr y al-muqabala"*. En él se describen seis tipos canónicos de ecuaciones de primer y segundo grado ya que sus coeficientes debían ser positivos ya que no reconocían a los negativos como números. Admite coeficientes y soluciones racionales y positivas y para las ecuaciones de segundo grado el coeficiente principal era siempre 1. El enunciado se daba en forma retórica en términos de tesoros (x^2) raíces (bx) y números ©, donde a la incógnita se la llamaba "cosa".

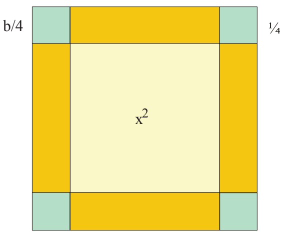
El libro estaba estructurado de la siguiente forma:

1) Se daban reglas de resolución de cada una de las formas canónicas antes mencionadas. El tratamiento se hacía en base a dos operaciones:

al-jabr – que literalmente significa insertar restaurar en el sentido médico de colocar en su lugar un miembro dislocado. En el matemático significa trasposición de términos: sumar a ambos miembros para obtener cuadrados.
al-muqabala – literalmente comparación y se refiere a la reducción de términos semejantes: restar a ambos miembros para quitar lo que es igual.
2) Se plantean una serie de problemas y la resolución de los mismos que consistían en:
(i) construir una ecuación, (ii) reducirla a forma canónica, (iii) aplicar regla
Como en aquella época no había un lenguaje estructurado para escribir ecuaciones, y menos, métodos algebraicos para resolverlas, este matemático recurrió a la geometría para resolver estas ecuaciones inspirado en los Elementos de Euclides.
(Moreno, R. 2002). Realizaba una interpretación geométrica de los pasos y la validación del procedimiento en base a las propiedades de las figuras.
Explicaba sus métodos de resolución con ejemplos concretos pero sabiendo que tenían validez general.
Veamos como ejemplo la forma de resolver la ecuación $x^2 + x = 1$.
$x^2 + x = 1$ $[x^2 + bx = c]$
El primer miembro: $x^2 + x$ $[x^2 + bx]$ representa la superficie lateral de una caja (como de zapatos), cuya base es cuadrada de lado x y las cuatro caras laterales tienen un lado igual a ¼ por un lado igual a x.



La superficie de la base cuadrada vale lado por lado, es decir: $x.x = x^2$
La superficie de cada cara lateral es: $¼.x = x/4$ $[(b/4)x]$
Como hay 4 caras, la superficie total será: $4. x/4= x$ $[4.(b/4)x = bx]$
Esta superficie vale: 1 $[c]$, porque así dice la ecuación inicial.
Ahora, Al-Khwarizmi, completa los cuatro cuadraditos de los ángulos, para obtener un nuevo gran cuadrado y calcula la superficie del mismo.
La superficie del nuevo cuadrado vale 1 + 4 cuadraditos: $1 + 4.(1/4)2$ $[c + 4.(b/4)2]$
El lado del nuevo cuadrado es $x + 2.1/4$ $[x + 2.b/4]$



Entonces tenemos:

$$\left(x + 2\cdot\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \qquad \left[\left(x + 2\times\frac{b}{4}\right)^2 = c + 4\times\left(\frac{b}{4}\right)^2\right]$$

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \qquad \left[x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}\right] \Rightarrow$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \left[x = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2}\right]$$ (fórmula actual).

François Viète (1540 – 1603)
Introduce utilización de letras para expresar en forma general los datos (consonantes) y las incógnitas (vocales). El plan era copiar de la geometría (clásicos griegos) el tratamiento de lo general con la utilización de estas letras, como hacía Euclides en las demostraciones. Esto permitía no sólo identificar los objetos con que trataba, sino también establecer condiciones de existencia y unicidad a través del cálculo algebraico.
En lugar de ir de lo que se conoce a lo que se desconoce (síntesis), como lo hacían los griegos, parte de suponer que el valor de la incógnita está y establece una relación de igualdad expresando de dos formas distintas una cantidad que involucre la incógnita. Tal igualdad será cierta para el o los valores adecuados de la incógnita. (do Amaral, J. T., 1988).
Veamos el método de Viète para la resolución de la ecuación de segundo grado:

$ax2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$
Introduce 2 variables auxiliares mediante el cambio de variable: $x = t + y$:

$$a(t+y)^2 + b(t+y) + c = 0 \Rightarrow a\left(t^2 + 2ty + y^2\right) + b(t+y) + c = 0$$

Ordenando en potencias de y se obtiene: $ay^2 + (2at+b)y + \left(at^2 + bt + c\right) = 0$

Anula el término en y sustituyendo $t = -\frac{b}{2a}$: $ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$

Operando y despejando se obtiene: $y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

si $b^2 - 4ac \geq 0$ entonces $y = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene: $x = t + y = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

El conocimiento por parte de los docentes de cómo, cuándo y por qué se utilizaron determinadas técnicas de resolución de problemas, de cuándo y por qué subsistieron unas y otras fueron dejadas de lado les proporciona algunos elementos que se ponen en juego en el aula que lo ayudarían en su labor docente.

Al respecto Miguel de Guzmán (1992) dice: *"el profesor debería saber cómo han ocurrido las cosas, para:*

- *comprender mejor las dificultades del hombre genérico, de la humanidad, en la elaboración de las ideas matemáticas, y a través de ello las de sus propios alumnos*
- *entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática*
- *utilizar este saber como una sana guía para su propia pedagogía."*

Referencias bibliográficas

Bashmakova, I. y Smirnova, G. (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra*. U.S.A.: The Mathematical Association of America.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

da Cunha Fragoso, W. (2000). Uma abordagem histórica da equaçao do 2º grau. Brasil: *Revista do Profesor de Matemática*, nº 43, págs. 20-25.

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Buenos Aires: OMA.

do Amaral, J. T. (1988). Método de Viète para resoluçao de equaçoes do 2º grau. Brasil: *Revista do Profesor de Matemática*, nº 13, págs. 18-20.

Larios Osorio, V. (2001). Filosofía e historia de la matemática en la formación docente. *Educación Matemática*, Vol.13, nº3, pp. 64-74.

Meavilla Seguí, V. (2001). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Millán, A. (2004). Euclides. *La fuerza del razonamiento matemático*. Madrid: Nivola.

Moreno, R. (2002). *Omar Jayyam. Poeta y matemático.* Madrid: Nivola.

Núnez, J. y Servat, J. (1998). Los recursos históricos en la educación matemática: el tratado de Alarifes de Diego López de Arenas. *Educación Matemática*, Vol.10, nº2, pp. 121-132.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectiva.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.