LUGARES GEOMÉTRICOS: ¿CUÁL ES SU ROL EN LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA?

Verónica Molfino, Greisy Winicki-Landman, Javier Lezama Andalón
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. IPN. (México)
veromol@adinet.com.uy
Campo de investigación: pensamiento geométrico, demostración. Nivel educativo: medio
Palabras clave: demostración, lugares geométricos, bachillerato

Resumen
¿Cómo y para qué enseñar a demostrar en cursos de Enseñanza Secundaria? Esta es un cuestionamiento que se presenta con fuerza entre profesores de Matemática de Bachillerato en Uruguay. Resulta ineludible reflexionar e investigar en vistas de rediseñar el discurso matemático escolar con argumentos teóricos precisos. En la investigación que se reporta se analizó la producción de estudiantes de un curso de Geometría Métrica del Bachillerato al resolver problemas de Lugares Geométricos con la finalidad de evaluar su relevancia para la enseñanza y aprendizaje de la demostración. Se constató la misma a través del análisis de las funciones y esquemas de demostración.

Introducción

El trabajo que se reporta es el resultado de una investigación realizada para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.
Con el objetivo general de investigar un problema relacionado estrechamente con la práctica educativa, de modo que esta investigación sea una herramienta para reflexionar sobre ella y modificarla, se decidió trabajar sobre Lugares Geométricos (LG) y su vínculo con la enseñaza y aprendizaje de la demostración en el curso de Geometría Métrica de 2º año de Bachillerato (16-17 años) en un Instituto de Educación Secundaria en Montevideo, Uruguay. Fue necesario indagar primero sobre el concepto de demostración, específicamente su aspecto relacionado con el discurso actual de la Matemática Escolar. Más adelante se diseñó y puso en práctica una actividad que permitiera dar respuesta a las interrogantes planteadas a partir del análisis de los resultados. Se propusieron dos objetivos concretos: en primer lugar, analizar y describir las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular –de LG y de construcción– en lo que refiere a los esquemas de demostración y procesos que se hacen presentes, así como a las funciones de demostración que se manifiestan en la resolución. En segundo lugar, analizar las maneras de conjeturar resultados de los estudiantes, sus modelos de justificación y cómo el abordaje de este tipo de problemas (de lugar geométrico) permite el fortalecimiento o no en los estudiantes de la práctica de la demostración en matemática y en geometría en particular.

Marco teórico

En el marco de este trabajo se entiende a la demostración –en un contexto educativo- como un proceso social a través del cual una persona descubre que una propiedad es cierta, la comprende, puede argumentar por qué es así, es capaz de integrarla dentro de un sistema de conceptos y relaciones que tienen un significado determinado para ella y de comunicarla a otras personas. Balacheff y Laborde (1988; 267) enfatizan su dimensión social: si bien el proceso de demostrar es individual de cada persona, es fundamental el transitarlo con otras ya que el valor de verdad de un razonamiento es acordado por un determinado colectivo, en un momento determinado (que puede ser, por ejemplo, el grupo de clase en un día de clase). Esta explicación puede ser reconocida por un colectivo y no por otro, o en determinado momento y no en otro.

Coincidiendo con Duval (1999), se concibe a la argumentación como el proceso a través del cual se exponen razones para fundamentar la validez de un resultado o una opinión y buscar la convicción de uno mismo o de otros, que puede o no ser aceptado en cierto contexto. Es precisamente por eso que es importante la consideración de la argumentación en las prácticas educativas: porque es ella, y no tanto la deducción en sí, la que aporta entendimiento al proceso de demostración.

Se utilizaron para analizar las producciones que los estudiantes realizaron al resolver la actividad propuesta dos caracterizaciones: los *esquemas de demostración* que presentan Harel y Sowder (1998): externos, empíricos y analíticos y las *funciones de la demostración* que presenta de Villiers (1993): verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación.

Historia y situación actual de la demostración en geometría y del tema "Lugares Geométricos" en el currículo de Educación Secundaria en Uruguay

Se llevó a cabo un análisis de los contenidos programáticos de los cursos de Matemática en las diferentes orientaciones que ofrece el Bachillerato uruguayo desde el programa del año 1941 hasta el vigente en el año 2006. El objetivo de este análisis era obtener un panorama de la existencia y desarrollo de la demostración –particularmente en geometría– en el currículo, así como del tema "Lugares Geométricos" como destreza ineludible en la formación matemática de un individuo. Este análisis reveló, por un lado, que en ningún caso se menciona a la demostración como habilidad a desarrollar en ninguno de los programas, así como tampoco se hacen sugerencias metodológicas o didácticas al respecto. Por otro lado, en lo que hace a la inclusión del tema "Lugares Geométricos" sí se hace referencia explícita a ellos en el programa de primer año de Bachillerato vigente actualmente, pero no en el de segundo año. Esta última observación llama la atención porque en los cursos de Geometría Métrica de ese año es donde más extendido está el tratamiento del tema, siendo incluso requisito para aprobar el curso en la mayoría de los casos.

Los programas del curso de Geometría Métrica de segundo año de Bachillerato son, incluido el actual, una lista de contenidos, sin referencias metodológicas y didácticas, sin sugerencias respecto al tiempo a dedicar para el desarrollo de cada tema e incluso sin sugerencias bibliográficas. Nada en ellos nos permite deducir que se entienda a la demostración como una herramienta para desarrollar habilidades deseadas en el marco de la matemática educativa. Surgen entonces algunas interrogantes: ¿para qué se trabaja la demostración en el aula? ¿Cómo se debe introducir? ¿Qué tipos de problemas tenemos que plantar para favorecer el desarrollo de los procesos argumentativos en nuestros estudiantes?

Descripción de la experiencia

Se decidió acotar la investigación a las siguientes interrogantes:

- ¿Qué tipos de esquemas de demostración se hacen presentes en la resolución de problemas de construcción y lugares geométricos?
- ¿Qué procesos cognitivos relacionados con la demostración en geometría se hacen presentes en la resolución de este tipo de problemas? (A modo de ejemplo, algunos de los procesos esperados son la fase de descubrimiento de un resultado sobre la figura a estudiar, su conjetura inicial, su formulación y, en algunos casos, la demostración: explicaciones y justificaciones).
- ¿Cuáles son las funciones de la demostración que el docente puede detectar en el proceso de resolución de los problemas de lugares geométricos?
- ¿De qué manera intervienen los elementos anteriores para que los estudiantes logren exitosamente demostrar los resultados conjeturados?

- ¿De qué manera influye la resolución de problemas de lugares geométricos en el desarrollo de la habilidad de demostrar de los estudiantes?

Fue diseñada una actividad con tres problemas, la cual se propuso en tres instancias: la primera vez a estudiantes de un centro de formación docente –esta experiencia sirvió como prueba piloto para ajustar detalles– y las otras dos veces a dos grupos de estudiantes de 2º año de Bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria (16-17 años), proponiendo parte de la actividad a un grupo y la otra parte al otro grupo. En las tres instancias se armaron grupos en forma espontánea de uno, dos o tres integrantes. La actividad fue desarrollada en salones de clase en los que había computadoras con software de Geometría Dinámica (GD) (Geometer Sketchpad y/o Cabri-Géomètre) y se permitía trabajar con lápiz y papel, con la computadora, e incluso con ambas.

Se utilizaron diversas estrategias para recolectar datos: *grabación de diálogos* entre la docente y los diferentes grupos y del diálogo entre los miembros del grupo, *registro escrito* de figuras, apuntes, intentos de justificación de resultados obtenidos, *archivos de los programas* de computadora utilizados con producciones de los estudiantes y *apuntes personales*, registrando tanto éxitos como fracasos.

La siguiente es la actividad propuesta:

Te agradecería que al resolver los problemas escribieras *todas* las estrategias que pensaste para abordarlos, tanto aquéllas que crees que son válidas como aquéllas que crees incorrecta, o que descartaste por alguna razón.

Problema 1:

a) Traza una circunferencia C de centro O y radio r y una recta t. Construye en el mismo plano una circunferencia C' de centro O' y radio 3 que sea tangente a C_O y a t.
Discute la cantidad de soluciones según la posición de C_O y t.

b) Se consideran dos circunferencias C_A y C_B de igual radio y la circunferencia C_O, en el mismo plano que las anteriores y tangente a ambas. Halla el lugar geométrico de O en las siguientes situaciones:

i) C_A y C_B son exteriores. ii) C_A y C_B son tangentes.
iii) C_A y C_B son secantes. iv) C_A y C_B son coincidentes.

Problema 2:

a) Dadas dos circunferencias $C_{O,r}$ y $C'_{O',r'}$ con $C \cap C' = \{P, Q\}$. B es un punto de C tal que $\overline{BP} = r$ y ΔPOB es horario. Se traza una recta t variable por P, $t \cap C = \{P, A\}$. Halla el LG de H, intersección de la bisectriz de $B\hat{A}P$ con la circunferencia C.

b) B' es un punto de C' tal que $\overline{B'P} = r'$ y ΔPO'B' es antihorario, $t \cap C' = \{P, A'\}$, $AB \cap A'B' = \{J\}$. Halla el lugar geométrico de J.

Problema 3:

Dado un triángulo ADE, B el punto medio del segmento AD y C un punto variable en el segmento AE. Las bisectrices de $A\hat{C}B$ y $A\hat{B}C$ se cortan en I, y las bisectrices de $A\hat{E}D$ y $A\hat{D}E$ se cortan en J. Halla el lugar geométrico de O, circuncentro del triángulo ΔAIJ.

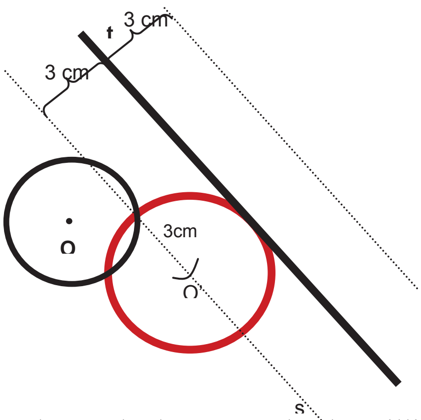
Análisis de la experiencia

Por razones de espacio sólo se desarrollarán las producciones de algunos de los estudiantes, seleccionados por su representatividad.

EP trabajó en forma individual sobre el Problema 1a, solamente con lápiz y papel. Propuso una construcción sin un análisis previo de las condiciones, lo que le condujo a una solución en la que se respetaba la condición de tangencia a la recta y la medida del radio pero no la condición de tangencia a la circunferencia. Cuando se le hizo ver su error, la corrigió por esta otra:

1 – Trazar perpendicular a t que pase por O (al punto de intersección lo llama P).

*2 – Trazar una recta que pase por P y sea tangente a la circunferencia de centro O. (*al punto de tangencia lo llama Q*)*
3 – Trazar una recta s que pase por O y por Q.
*4 – Trazar una circunferencia de centro Q y radio 3cm, el punto que corta a s exterior a la circunferencia de centro O. [*Se supone que se refiere a que ese punto es O'*].*
5 – Trazar circunferencia de centro O' y radio 3cm. (t tiene que estar a menos de 6cm de la circunferencia de centro O).
Esta nueva solución sí respeta la condición de tangencia a la circunferencia y la medida del radio pero no respeta la condición de tangencia a la recta.
A EP no se le presenta en ningún momento la necesidad de justificar los pasos que va haciendo ni las decisiones que va tomando, a pesar de que se le había solicitado en forma explícita. En el segundo intento descubre la necesidad de que los dos centros estén alineados con el punto de tangencia. Sin embargo, el *descubrimiento* no se hace presente como una función propia de métodos deductivos sino como el papel jugado por métodos empíricos en la resolución del problema.
Según la clasificación de Sowder y Harel, en esta situación el estudiante presenta un *esquema de demostración empírico perceptivo*: en las dos soluciones que presenta se convence de la validez de su algoritmo de construcción por la figura que construye (que además cuida que sea precisa, con regla y compás). El haber trabajado sólo con lápiz y papel y sin un software de GD refuerza esta situación.
AR y JO trabajaron sobre el mismo problema integrando ambos métodos: lápiz y papel y Cabri. En un primer intento, trazaron el LG de los puntos que se encuentran a 3cm de la recta t (unión de dos rectas paralelas a la recta a esa distancia) y ubicaron el centro sobre una de esas rectas y a 3cm del punto de intersección de dicha recta con la circunferencia dada originalmente. Los estudiantes respetaron así la condición de tangencia a la recta pero no a la circunferencia, lo que constataron al llevar a cabo su construcción.



Darse cuenta del fracaso los llevó a intentar nuevamente, y después de un proceso de búsqueda con métodos empíricos e inductivos, presentaron un segundo intento de solución. En esta nueva construcción impusieron una condición extra al centro buscado: estar en una circunferencia concéntrica con la original y de radio 3 unidades mayor.
Adaptando la teoría de de Villiers a este ambiente de resolución de problemas, podemos afirmar que en los razonamientos de AR y JO se pueden detectar varias funciones de la demostración, algunas más explícitas que otras: el *descubrimiento* de una solución, que es en definitiva un resultado geométrico generalizable y a la cual se arribó a partir de la deducción de las figuras en las que se debía encontrar el centro de la circunferencia buscada, la *explicación* de por qué la solución encontrada es una solución válida (especialmente en la pertenencia de O' a la recta paralela a t) y la *sistematización* de resultados, que se hace más explícita en la discusión de la cantidad de soluciones.
Puede encontrarse en los razonamientos de esta pareja una combinación del *esquema de demostración analítico por transformación* (en la búsqueda del cumplimiento de la condición de tangencia a la recta) con el *empírico inductivo* (en la búsqueda del cumplimiento de la otra condición). Especialmente en el primer caso se puede apreciar una intención explícita de

anticipar el resultado: "El punto O' va a estar en …". RS y SA trabajaron juntos sobre los problemas 1b, 2 y 3 solo con lápiz y papel. En su producción se puede apreciar cómo la predicción jugó un papel importante en la resolución de los ejercicios. En su diálogo aparecen frases que lo atestiguan, como: "…el lugar geométrico del centro de la circunferencia va a ser la mediatriz del segmento AB porque el centro O va a equidistar al punto de tangencia con la circunferencias C_A y C_B …"; o "…las bisectrices de [los ángulos de vértices] B, C y A se van a cortar en el punto I porque las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, entonces si dos de ellas se cortan en este entonces la tercera también se va a cortar acá".
La docente pudo detectar con claridad diferentes funciones que, si bien de manera inconsciente e implícita por parte de los estudiantes, se le asignó a la demostración: ya sea para *verificar*, para *explicar*, para *sistematizar*, para *comunicar* o para *descubrir*. Esta pareja presentó una gran variedad de *esquemas de demostración*, en su mayoría *empírico inductivos* y *analítico axiomáticos*, pero también utilizaron mecanismos *externos* de convencimiento (apuntes de clase, por ejemplo).

Reflexiones finales

Con respecto al análisis del discurso escolar, la investigación arrojó que la demostración es considerada como una habilidad a desarrollar instaurada de manera implícita entre los docentes, y a la vez una práctica que se introduce en las clases de Matemática en Bachillerato. Pero existen al día de hoy pocos consensos explícitos acerca de para qué introducirla en el aula, de qué manera y cuáles son las problemáticas concretas que están asociadas a ella y que permiten a los estudiantes desarrollar los procesos argumentativos asociados. Por su parte, el tema "Lugares Geométricos" no es un contenido programático en el curso de Geometría Métrica de 2º año de Bachillerato pero forma parte del discurso matemático escolar. De esta manera, se está corriendo un grave peligro: las prácticas educativas dependen de cada profesor, lo que atenta contra la equidad necesaria en todo sistema educativo.
En lo que refiere al primer objetivo planteado, se pudo observar que los problemas propuestos –de LG y de construcción- son actividades en cuya resolución se hace presente la demostración cumpliendo diferentes roles. Esta instancia permitió a la docente distinguir diferentes funciones de la demostración en el análisis de la resolución de los problemas por parte de los estudiantes. Creemos que esto puede favorecer la resignificación de la demostración como una de las habilidades a desarrollar dentro de su cultura matemática y su formación como ciudadano en general. Asimismo, se detectó que este tipo de problema permite al docente detectar cuál es el esquema de demostración que está atravesando quien lo intenta resolver, lo que es un buen punto de partida para saber cómo intervenir para lograr esquemas de demostración más elaborados. En suma, la resolución de problemas de lugares geométricos ofrece una excelente oportunidad de acercarse de manera significativa a la demostración en geometría y favorecer el desarrollo de razonamientos de tipo analítico-deductivos. Se observa que a diferencia del tratamiento usual de la demostración (exposición por parte del profesor de resultados y demostraciones ya fabricadas y que aportan poco aprendizaje significativo a los estudiantes), este tipo de problema ofrece a los estudiantes una oportunidad de acercarse de manera significativa a la demostración en geometría. Estas razones hacen que éste sea un tema que vale la pena seguir trabajando con los estudiantes y que sería recomendable explicitarlo en el listado de contenidos del curso, a la vez que pueden explicar el por qué ha sobrevivido en las prácticas reales de los docentes a pesar de que no se mencionen de forma explícita a nivel curricular. También se hicieron observaciones que permiten comenzar a dar respuesta a las preguntas asociadas al segundo objetivo. Por un lado, se puede afirmar que los esquemas de demostración externos o el empírico perceptivo

representan obstáculos a la hora de generar argumentos deductivos para justificar un resultado. Esto puede ser un buen punto de partida para trabajar con los estudiantes que presentan mayores dificultades en el tema, ahora la pregunta sería más concreta: ¿qué tipo de trabajo previo es necesario para que los estudiantes logren ir más allá de las demostraciones externas y empírico-perceptivas, que son las que representan obstáculos para razonamientos más elaborados? ¿A través de qué procesos los estudiantes pueden atravesar esa barrera? ¿En qué etapa de la escolarización se debe abordar?

Por otro lado, se detectó que la presencia de esquemas de tipo analítico-axiomáticos fue precedida en la mayoría de los casos por la de esquemas de tipo empírico inductivos, situaciones en las que la demostración se hizo presente en una mayor variedad de funciones. Entonces la pregunta que queda planteada es: ¿Qué tipo de trabajo previo es necesario realizar con los estudiantes para fomentar el desarrollo de esquemas de demostración de tipo empírico inductivos? Una posible repuesta puede encontrarse si se reconoce a la Geometría Dinámica como una herramienta ideal para desarrollar el tipo de razonamiento empírico inductivo ya que permite al estudiante construir infinidad de posiciones para una figura en un tiempo muy reducido. Otro aspecto que se pudo observar en la producción de los estudiantes es que en general, los estudiantes que son capaces de diferenciar entre los elementos variables y los fijos presentan más posibilidades de arribar a una solución y lograr convencerse a sí mismos y a sus compañeros de la misma. Se detecta en los diálogos de los estudiantes la intención de predecir la posición de la figura en cuestión. La predicción se hace presente como elemento que motiva y conduce en la mayoría de los casos a encontrar una solución. La pregunta que queda planteada entonces es: ¿se podrá vincular este tipo de trabajo con la teoría del pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis desarrollada, entre otros autores, por Cantoral y Farfán (1998)? ¿Será provechoso para la Matemática Educativa encontrar vínculos entre ambas líneas de investigación? Los aportes al pensamiento gráfico e intuitivo pueden representar antecedentes importantes para dicha teoría.

Existen diversos aspectos que no han sido considerados y en los cuales se debería profundizar para continuar mejorando nuestras prácticas educativas: el trabajo en parejas vs el trabajo individual, la influencia de la GD, el tratamiento del tema en libros de texto, la relación entre el tratamiento del tema en las aulas y la evaluación y la relación entre las expectativas docentes y las prácticas educativas reales, entre otros.

Referencias bibliográficas

Alsina, C, Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Editorial Síntesis.

Balacheff, N. y Laborde, C. (1988). Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo. In Mugny, G. y Pérez, J.A. *Psicología social del desarrollo cognitivo* (pp. 265-288). Barcelona: Editorial Antroupos.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon,* 42, Vol. 14(3), 353 – 369.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15 – 30.

Duval, R (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? México D. F.: Grupo Editorial Ibeoroamericana.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Types of Students' Justifications. The Mathematics Teacher, Vol. 91, 8, 670-675.

Molfino, V. (2006). *Lugares geométricos: ¿cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría?* Tesis de maestría no publicada. Cicata – IPN.