Errores y Dificultades en el desarrollo del Pensamiento Numérico.

Luis RICO

Encarnación CASTRO

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada. SPAIN

Abstract: *El estudio de errores y dificultades de comprensión de los escolares constituye una línea de investigación potente y productiva en Educación Matemática. La producción en este campo es amplia y, en muchas ocasiones , se presenta poco articulada. En este trabajo proponemos una fundamentación y una aproximación metodológica para este tipo de estudios; también presentamos un ejemplo de trabajo realizado en el aula.*

La utilización de sistemas figurativos de representación en el estudio de conceptos numéricos proporciona mayor riqueza conceptual, moviliza el pensamiento visual y favorece una mejor comprensión de los escolares mediante el uso de sistemas simbólicos diferentes.

Presentación

Las matemáticas escolares plantean a niños y jóvenes cuestiones y problemas que tienen un enunciado bien definido; las cuestiones tienen una respuesta adecuada; cualquier otra respuesta se considera inadecuada o incorrecta. Esto hace posible clasificar las contestaciones de los alumnos en correctas, incorrectas o sin respuesta. Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es **un error** en relación con la cuestión propuesta (Radatz; 1980). Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas y han sido permanente objeto de estudio e investigación en educación matemática (Buswell & Judd, 1925; Brownell, 1941; Kilpatrick, 1992). Los errores son datos objetivos que encontramos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; las respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de un aprendizaje correcto (Brousseau, Davis & Werner, 1986).

El análisis y estudio de errores en educación matemática se ha visto influido en cada época por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología; también ha estado condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los correspondientes sistemas educativos. La connotación peyorativa del término “error” ha sido una limitación de estos estudios .

Algunos planteamientos epistemológicos revalorizan el papel de los errores en la adquisición del conocimiento y la construcción del saber (Popper, 1979; Bachelard, 1988; Lakatos, 1978).

El racionalismo crítico señala que no hay fuentes últimas del conocimiento; admite el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento; destaca la necesidad de un ejercicio constante de la crítica: la búsqueda crítica del error para superar nuestros conocimientos deficientes es una necesidad epistemológica ineludible. En consecuencia, los errores pueden contribuir positivamente al proceso de aprendizaje; en segundo término, los errores surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente, no aparecen por azar; en tercer lugar, es necesario que cualquier teoría de instrucción modifique la tendencia a culpabilizar a los estudiantes, al condenar los errores, y la reemplace por la prevención de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje; finalmente, todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debidos a diferentes causas.

A partir de sus errores, un jóven o un niño pueden comprender distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente. Al *cometer un error,* el alumno expresa el caracter incompleto de su conocimiento y permite que los compañeros o el profesor le ayuden a completar el conocimiento adicional o, en otros casos, le llevan a comprender por sí mismo aquello que no dominaba. El carácter positivo de los errores en el proceso de aprendizaje es consecuencia de la reflexión epistemológica (Bouvier, 1987; Nesher, 1987).

Principales líneas de investigación sobre errores en el Aprendizaje de las Matemáticas.

Articulamos en torno a cuatro ejes nuestra revisión sobre los estudios e investigaciones recientes relativos a errores en el aprendizaje de las matemáticas

Primero: Estudios relativos al *analisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificaciones de errores detectados* (Radatz, H. 1979). Estos trabajos se fundamentan o proceden de alguna teoría psicológica o psicopedagógica que proporciona un marco explicativo; a su vez, el análisis de errores ofrece un campo adecuado para aumentar su contenido empírico (Davis, 1984; Moshovitz-Hadar, Zavslaski, Imbar, 1987; Hiebert & Carpenter, 1992). Incluimos en este eje las aproximaciones teóricas hechas desde un planteamiento epistemológico o estrictamente matemático, que tratan de establecer causas estructurales para los errores debidas a la propia naturaleza del conocimiento matemático, con exclusividad sobre cualquier otro argumento (González, 1993); los trabajos sobre obstáculos (Brousseau, 1989; Sierpinska, 1990) son ejemplos de esta opción.

Segundo: Estudios dedicados al *tratamiento curricular de los errores en el aprendizaje en matemáticas*. Se incluyen aquí los trabajos que incorporan la consideración de los errores como un dato importante en el diseño y desarrollo del currículo de matemáticas (Booth, 1984; Hart, 1984; Kerslake, 1986). Una línea de trabajo es la denominada enseñanza diagnóstica o por diagnóstico, que trata de prever los errores, detectarlos y proponer los medios para su corrección (Bell, 1986; Brekke, 1991). También incluimos en estos estudios las propuestas que contemplan los errores como punto de partida para incentivar el estudio e investigación de los contenidos matemáticos (Borassi, 1986, 1987). Igualmente quedan comprendidos en este apartado los estudios sobre evaluación y el papel que desempeñan los errores en las valoraciones que se deben realizar sobre las producciones de los alumnos (Nesher, 1987; Romberg, 1991; Webb, 1992).

Tercero: estudios dedicados a conectar los errores que cometen los alumnos con los *planes de formación de profesores.* Son estudios relativos al papel que la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores de los alumnos tienen en la formación del profesorado. Se trata de un campo de trabajo delimitado que ha tenido cierto desarrollo reciente, aunque algo más restringido (Graeber, Tirosh & Glover 1989; Tirosh & Graeber, 1989, 1990)

Cuarto: trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de *análisis sobre errores* (Mulhern, 1989). El carácter dicotómico de la valoración correcto/incorrecto para las producciones de los alumnos ha permitido una utilización sistemática de procedimientos estadísticos; gran parte de los trabajos de orientación psicométrica van dirigidos al estudio de errores en el aprendizaje.También incluimos las técnicas de análisis para contrastar hipótesis alternativas que justifican el origen o causa de un determinado error, puestas a punto por algunos equipos de investigadores (Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson & Polet, 1989).

Análisis de errores y Pensamiento Numérico.

Las cuatro categorías descritas no son exclusivas de los trabajos dedicados al estudio de errores sobre comprensión de conocimiento numéricos pero si es cierto que, desde los estudios psicométricos iniciales, los errores y dificultades en el campo general de la Aritmética han ocupado una parte considerable en tales estudios.

Es usual agrupar la variedad de métodos para el estudio de los errores en matemáticas en cuatro categorías:

1. Contar el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas. Este método tiene un valor diagnóstico limitado y es cercano al método psicométrico.

2. Análisis de los tipos de errores cometidos. Usualmente, esta técnica implica clasificar diferentes tipos de error, examinar cómo se desvian de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.

3. Análisis de patrones de error. Estos análisis pueden revelar errores sistemáticos, que sean síntoma de una comprensión inadecuada; al variar las tareas resultan patrones de error que pueden proporcionar claves de las estrategias utilizadas.

4. Diseño de secuencias didácticas de tareas que pongan de manifiesto los errores de los individuos. Aquí el investigador observa los patrones de error que aparecen en las producciones de los individuos; genera hipótesis sobre causas posibles de estos errores; y, sistemáticamente, construye nuevos problemas de los que puede predecirse que inducirán a errores similares.

La noción de comprensión deficiente señala un modo de pensamiento derivado de premisas incorrectas, que se ponen de manifiesto por una serie de errores sistemáticos. Seguir la línea de pensamiento de los alumnos no resulta sencillo; los errores ponen de manifiesto la consistencia y sistematicidad, que se deriva de la comprensión alcanzada. Sin embargo, la mayor parte de los estudios informan sobre clasificación de errores y sus frecuencias, pero olvidan explicar su origen y no proponen un tratamiento sistemático para su superación.

Esta carencia de generalidad en los análisis podría evitarse observando las producciones de los alumnos en niveles más profundos de representación, donde evoluciona el sistema de significados que controla las realizaciones superficiales. Cuando se detecta una deficiencia de comprensión, en este nivel más profundo, es posible explicar toda una clase de errores (Rico, 1992). Un criterio para interpretar y guiar los errores lo denominamos concepción deficiente o comprensión inadecuada.

Comprensión de secuencias numéricas

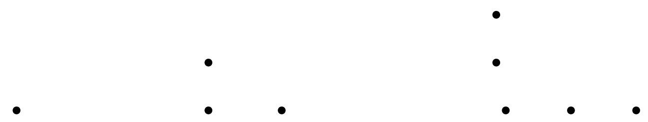
En lo que sigue presentamos una sesión de trabajo con un grupo de alumnos de 8º Curso de E.G.B. (13-14 años) realizada el curso 92-93. En este grupo hay 36 alumnos.

El trabajo se desarrolla en el contexto usual del aula y es la cuarta sesión de las dedicadas a trabajar con representaciones puntuales de secuencias numéricas. En las sesiones anteriores los alumnos han trabajado en la representación de números mediante configuraciones puntuales, han comparado diferentes configuraciones y han concluido que algunas comparten una misma estructura o patrón de representación. Por otra parte, han considerado diferentes descomposiciones o desarrollos aritméticos de un mismo número y han expresado cada desarrollo aritmético mediante una configuración puntual; se ha dedicado un tiempo a realizar tareas de traducción entre configuraciones puntuales y desarrollos aritméticos. También se ha iniciado el trabajo con secuencias numéricas lineales o cuadráticas. Se presenta una secuencia mediante la representación geométrica de sus primeros términos; es usual pedir la traducción numérica de cada uno de los términos y el desarrollo aritmético expresado en la representación. Los alumnos tienen también una noción intuitiva de lo que significa el término enésimo en la representación. Presentamos una tarea que incluye todos estos componentes (Castro, 1994).

Tarea:

A continuación tienes los tres primeros términos de una secuencia puntual.

1º 2º 3º



Dibuja el término siguiente.

Dibuja la figura que ocuparía el lugar enésimo.

Debajo de cada figura escribe el número que representa.

Escribe debajo de cada número su desarrollo.

Escribe a continuación cómo se llaman estos números.

Descripción de la sesión de trabajo en el aula:

El profesor escribe la tarea en la pizarra; a medida que escribe inicia el diálogo con los alumnos.

(PP) ¿Cómo es el 4º término?

(RA) Cuatro puntos verticales y cuatro horizontales, con uno común.

(PP) ¿y el séptimo término?

(RA) Igual, sólo que con siete puntos.

(PP) ¿Y el enésimo?

(RA) Igual, pero con n puntos.

En la pizarra se reproducen las representaciones puntuales, según el orden establecido por las preguntas.

(C) Escribimos los números debajo de las representaciones.

Para la tercera fila el profesor escribe: 1, 3, 5, 7, ...

(PP) ¿Qué ponemos en el lugar enésimo?

(RA) "n"

(RA) "n" sólo no; así estaría mal.

Algunos alumnos proponen escribir la expresión 2n -1; otros proponen escribir n + (n - 1). Hay alumnos que opinan que las dos expresiones son iguales.

(RP) Si las dos expresiones son iguales vais a dar vuestra opinión sobre cuál de ellas os parece mas apropiada para representar el número de puntos de la figura que ocupa el lugar enésimo. Contestad de uno en uno.

(RA) Yo creo que es n + (n-1) porque, por ejemplo, para el 3 que es el segundo término hemos dicho que es 2 + (2-1)

(IA) Varios niños, a la vez, afirman que *no están de acuerdo ya que ese es el desarrollo del número,* por lo que no consideran que sea la mejor expresión; consideran que la mejor es 2n - 1, ya que *se ve en esta expresión que las dos filas horizontal y vertical tienen el mismo número de puntos pero hay que quitar uno, ya que las dos filas tienen un punto en común.*

(RA) Yo creo que es n, porque lo que *tenemos que indicar en este momento es el número y no su desarrollo,* y con esas expresiones lo que damos es un desarrollo.

Los alumnos echan en falta que no aparezca una expresión simple como 3, 5, etc, que indique cual es el número, sin necesidad de recurrir a una expresión en forma polinómica que asocian con desarrollo. Se pone de manifiesto una dificultad de comprensión: si lo que se pide es el término enésimo quieren responder con un dato único, no aceptan (muchos alumnos) una expresión en la que se pone de manifiesto una *estructura de relaciones que determina el término general*; cuando aparece tal estructura la expresión es la del desarrollo del término general *pero no es el término general.*

(RP) Si ponemos solamente n estaremos indicando el lugar que ocupa en la secuencia, lo cual no es correcto, ya que el lugar no coincide con el número de puntos que hay; así, en el tercer lugar no hay 3 puntos sino 5, etc.

Dos alumnas discuten entre ellas esta cuestión. Se les pide que realicen el debate en voz alta para que todos los compañeros participen y den su opinión.

(PP) Vais a contarnos a todos lo que estáis discutiendo

(RA) Yo digo que cualquiera de las dos expresiones, $n + (n-1)$ o $2n - 1$, es buena por que las dos son iguales y dicen los puntos que hay en el término enésimo. No podemos escribir n porque indicaría la posición de cada término.

(RA) No estoy de acuerdo con ella, pues quiero poner una expresión simple y no un desarrollo.

(RP) No es posible indicar el número de puntos que hay en el término enésimo con una expresión simple. Hemos de elegir entre $n + (n-1)$, que indica mejor que tenemos dos filas y una de ellas tiene un punto menos que la otra, y $2n - 1$, que parece indicar dos filas iguales con un punto en común.

(RA) Entonces puedo poner $n + (n+1)$, ya que tambien en esta expresión se indican dos filas, donde una de ellas tiene un punto mas que la otra.

(RP) Piénsalo y comprueba si es o no correcto.

(RA) Si es correcto, ya que siempre hay un punto mas en la fila que en la columna.

(RA) No estoy de acuerdo porque eso no coincide con lo que hay en los primeros términos.

En este momento los demás alumnos toman partido y se dividen las opiniones en favor de una u otra compañera; todos pretenden tener razón y hablan todos a la vez.

(RA) Creo que las dos llevan razón porque hemos dicho que el lugar enésimo representa a todos, por tanto igual es una expresión que la otra.

Los alumnos continúan la discusión; el profesor trata de poner orden en la clase.

(PP) Uno sólo de vosotros me va a decir qué estáis discutiendo.

(RA) Nos están pidiendo el lugar enésimo, por tanto yo creo que es $n+(n-1)$ porque viendo los otros lugares tenemos: el segundo es 3, que es $2 + (2-1)$; el tercero es 5 que es $3 +(3-1)$.

(PP) y el primer lugar, ¿cómo es?

(RA) $1 + (1-1)$

(RA) Yo creo que es n + (n-1), ya que el lugar cuarto, por ejemplo, es 4+(4-1).

(RA) Eso es igual que 2n - 1

(RA) El lugar enésimo representa a todos los términos, por lo que yo creo que sólo se debe poner n.

(PP) Entonces, si ponemos n ¿os parece que queda expresado el número de puntos que hay?

Hay alumnos que aseguran que no, y vuelven a repetirse los mismos razonamientos.

(R) Revisamos la información: n indica el número de orden, la posición que ocupa el término; la cantidad de puntos viene dada por una de estas dos expresiones 2n - 1 o n + (n-1) que, en realidad, indican el mismo número de puntos; la diferencia entre ellas está en el desarrollo que se considere para los números.

Si se han tomado los desarrollos: 1+(1-1); 2+(2-1); 3+(3-2); .... la expresión es n+(n-1); si se ha tomado el desarrollo 2.1-1; 2.2-1. 2.3-1, ... la expresión es 2n-1.

(PP) Vuelvo a preguntar ¿cuál de las dos expresiones se adapta mejor a la secuencia de puntos?

(RA) Yo creo que es lo mismo una que la otra.

(RA) Indistintamente.

(RA) Como son dos filas iguales con un punto en común, creo que 2n-1.

(RA) Siempre tenemos una fila con un punto más que en la columna, por tanto n + (n-1).

Reflexión y Análisis:

En los párrafos anteriores se presenta la noción de término general de una sucesión como término de la sucesión que ocupa el lugar n. La presentación es aparentemente sencilla: dos filas de n puntos, una horizontal y la otra vertical, con un punto en común.

¿Cómo se escribe ese término? Se presentan dos opciones en las respuestas: hay alumnos que contestan “n”; hay otros que escriben n + (n-1) o bien 2n - 1. La discusión se centra en que *las dos últimas formulaciones no equivalen a un número sino al desarrollo de un número, ya que expresan la estructura de relaciones común a todos los términso de la secuencia.*

La conclusión es que no hay expresión numérica del término general sino un tipo de desarrollo del número para el término general. Cuando se pide el "término general de una sucesión" muchos alumnos entienden "un número, en general", pero no la expresión del desarrollo general de una secuencia numérica.

Hay una dificultad de comprensión fuerte, generada por una deficiente presentación de la cuestión. El Profesor no es consciente de la existencia de dos sistemas simbólicos equivalentes para la representación: números y desarrollos aritméticos, que él maneja como un todo único, cosa que no le ocurre a los alumnos, por inexistencia de información. Una segunda dificultad asociada a la anterior es la relativa al valor de n que se considera para el término general de una secuencia, ¿son lo mismo $n + (n-1)$ que $(n + 1) + n$?

Conclusión

La investigación de errores ha estado encaminada durante mucho tiempo al análisis estadístico de las respuestas incorrectas de los escolares ante una serie de tareas y al estudio de la correlaciones entre dichas respuestas erróneas, según las variables de tarea consideradas. Entendemos que estos estudios son necesarios y constituyen una primera fase de cualquier investigación sobre errores y dificultades. Nuestra línea de estudio se dirige a diseñar situaciones de aprendizaje de conceptos matemáticos que movilicen las capacidades de los estudiantes y les permitan expresar su comprensión sobre dichos conceptos, discutirla y contrastarla con sus compañeros, y someterla a enjuiciamiento crítico. El análisis de las deficiencias o limitaciones que se ponen de manifiesto en dichas expresiones permiten establecer los elementos que constituyen la comprensión de un campo conceptual determinado. La investigación-acción, debates en el aula, estudio de casos y entrevista clínica constituyen las aproximaciones metodológicas utilizadas en nuestro caso.

En el estudio del Pensamiento Numérico hay elementos conceptuales poco utilizados que nos prtoponemos recuperar. En particular, las representaciones figurativas de los números constituyen (como en el ejemplo que nos ocupa) un sistema simbólico de representación diferente del sistema decimal de numeración, con el que se ponen de manifiesto unas determinadas propiedades que no son evidentes con la notación usual de los números. Favorecer la utilización de sistemas de representación diferentes, que empleen elementos gráficos con los que se movilicen esquemas visuales adecuados es también una componente importante en esta línea de investigación, en la que nos encontramos trabajando actualmente.

Bibliografía:

Bachelard G. (1988). *La formación del espíritu científico*. Mexico: Siglo XXI.

Bell A. (1986). *Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas*.

Booth L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Borassi R. (1986). Algebraic Explorations of the Error 16/64 = 1/4 *Mathematics Teacher*. *Vol. 79,* págg. 246-248.

Borassi R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the learning of Mathematics. Vol 7* , págg. 2-9.

Bouvier A. (1987). The rigth to make mistakes. *For the Learning of Mathematics. Vol. 7,* págg. 17-25.

Brekke G. (1991). *Multiplicative Structures at ages seven to eleven. Studies of children's conceptual development, and diagnostic teaching experiments*. Thesis for the Ph. D. degreé. Nottingham: Unversity of Nottingam.

Brousseau G., Davis R., Werner T. (1986). Observing Students at work, en Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Edts): *Perspectives on Mathematics Education.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Brousseau G. (1989). *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*.
Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Brownell W. (1941). *Arthimetic in grades I y II. A critical summary of new and previonsly research*. Durham: Duke University Press.

Buswell G., Judd C. (1925). *Summary of Educational Investigations Relating to Arithmetic.* Chicago: University of Chicago.

Castro Martínez E. (1994). *Analisis y generalización en secuencias numéricas lineales y cuadráticas mediante configuraciones puntuales, con escolares de 12-14 años*. Granada: Universidad de Granada.

Centeno J. (1988). *Números decimales*. Madrid: Síntesis.

Davis R. (1984). *Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Australia: Croom Helm.

González, J.L. (1994). *Pensamiento Numérico Relativo. El Número Relativo y el Número Entero en situaciones relativas discretas con estructura aditiva* Granada: Universidad de Granada.

Hart K. (1981). *Children's understanding of Mathematics 11-16*. Londres: J. Murray.

Hart K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Hiebert, J & Carpenter, T (1992) Learning and teaching with understandisng, en Grouws D. (Edts.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.

Kerslake D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Kilpatrick J. (1991). A history of Research in Mathematics Education, en Grouws D. (Edts.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan.

Lakatos I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Universidad.

Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O., Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education.* vol. 18, págg. 3-14.

Mulhern G. (1989). Between the ears: making inferences about internal processes, en Greer B. & Mulhern G. (Edts.) *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.

Nesher P. (1987). Toward an Instructional Theory: the Role of Students' Misconceptions. *For the Learning of Mathematics. Vol. 7,* págg. 33-39.

Popper K. (1979). *El desarrollo del conocimiento científico*. México: Siglo XXI.

Radatz H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 9,* págg. 163-172.

Radatz H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics. Vol. 1*, págg. 16-20.

Resnik L., Nesher P., Leonard F. Magone M., Omanson S., Pelet I. (1989). Conceptual bases of Arithmetic Errors: the case of Decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20*, págg. 8-27.

Rico, L. (1992) *Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática* Granada: Universidad de Granada.

Romberg T. (1989). Evaluation: a coat of many colours, en Robitaille D. (Edt.): *Evaluation and Assessment in Mathematics Education*. París: Unesco.

Sierpinska A. (1990). Some remarks on undertanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics. Vol. 10*, págg. 24-36.

Tall D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tirosh D., Graeber A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 20*, págg. 79-96.

Tirosh D., Graeber A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 21*, págg. 98-108.

Webb, N. (1992) Assessment of Students' Knowledgeof Mathematics: Steps toward a Theory, en Grouws D. (Edts.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.